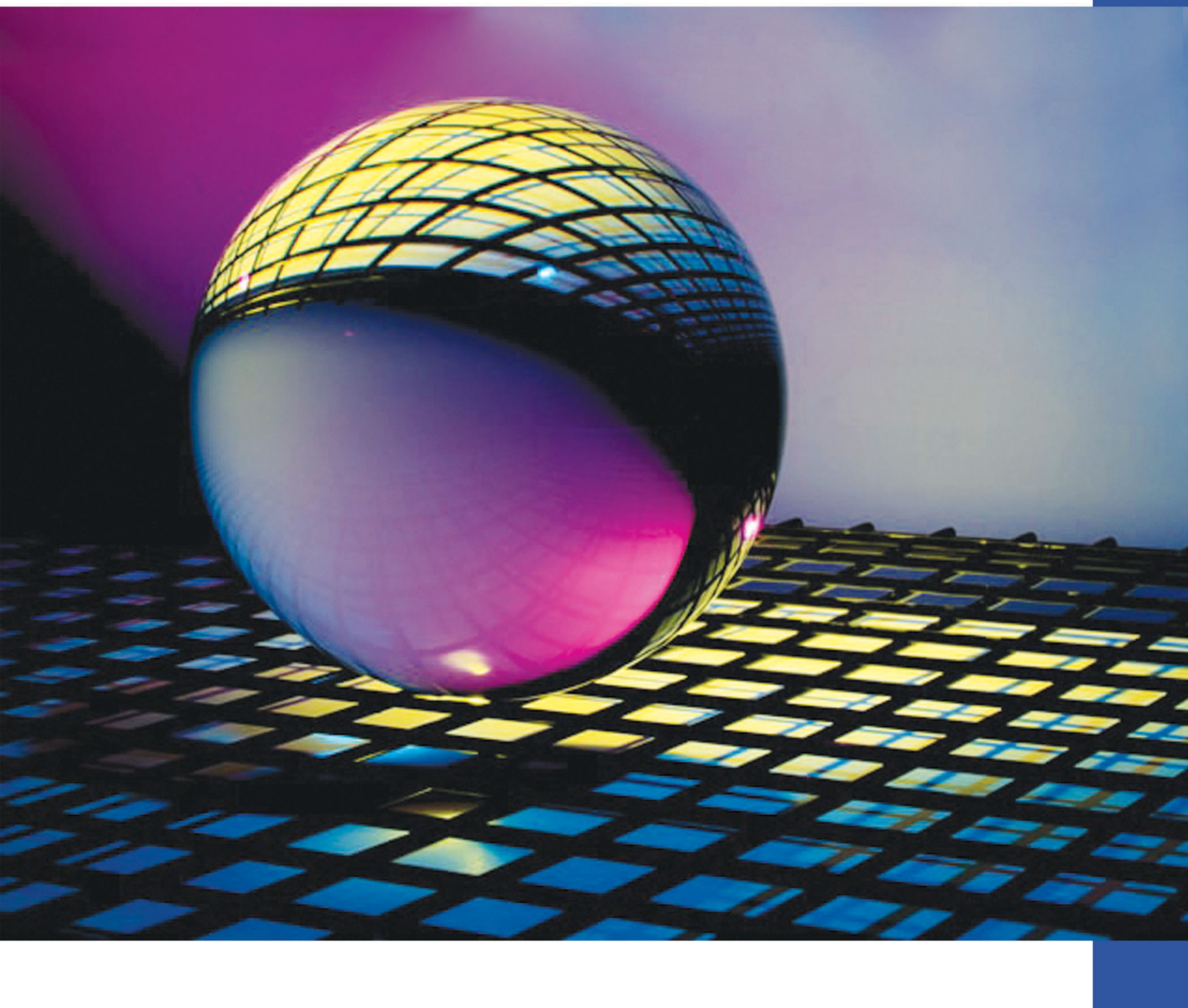
მათემატიკა

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი

№6 2020

ივანე ჯავახიშვილის
სახელობის თბილისის
სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო
მეცნიერებათა
ფაკულტეტი



ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

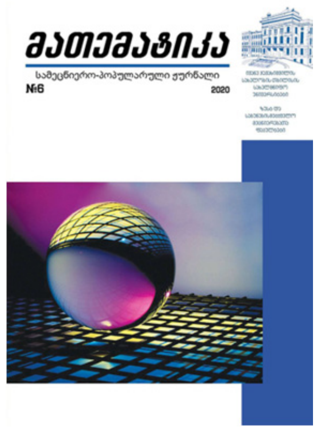
მათემატიკა

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი

დაარსდა 2013 წელს;
მიეძღვნა ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
95 წლის იუბილეს.

ჩვენი მიზანია მასწავლებლებსა და მოსწავლეებში მათემატიკური ცოდნის პოპულარიზაცია, მათემატიკის მასწავლებელთა პროფესიული ზრდის ხელშეწყობა, მოსწავლეთა ჩართვა მათემატიკის ლამაზ სამყაროში მოგზაურობისა და საინტერესო ამოცანების ამოხსნის პროცესში; მოგაწვდით ინფორმაციას ჩვენი წარმატებული კურსდამთავრებულების საქმიანობისა და მომავალი სტუდენტების პერსპექტივების შესახებ.

უნივერსიტეტის გამომცემლობა



სარჩევი

სარჩევი

ჟურნალი „მათემატიკა“

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი „მათემატიკა“ დაარსდა 2013 წელს, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის 95 წლის იუბილესთან დაკავშირებით, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის საბჭოს გადაწყვეტილებით. ჟურნალის შექმნის იდეა ფაკულტეტის დეკანს — რამაზ ბოჭორიშვილს ეკუთვნის.

ჟურნალის მთავარი რედაქტორია თეიმურაზ ვეფხვაძე, მთავარი რედაქტორის მოადგილე — ომარ ფურთუხია.

ჟურნალში რამდენიმე განყოფილებაა, რომლებსაც სარედაქციო საბჭოს წევრები ხელმძღვანელობენ: „მათემატიკური სკოლები“ (ჯონდო შარიქაძე) — წარმოაჩენს იმ ქართველ მეცნიერებს, რომლებმაც დიდი წვლილი შეიტანეს ქართული მათემატიკური სკოლების ჩამოყალიბებასა და განვითარებაში; „ქართველი ავტორები“ (გია გიორგაძე) — პოპულარულ ენაზე გადმოიცემა მასალა მათემატიკური ცნებებისა და პრობლემების წარმოშობისა და განვითარების შესახებ; „თარგმანი“ (ილია თავხელიძე) — უცხოელი ავტორების სამეცნიერო-პოპულარული სტატიები; „მეთოდიკა“ (თეიმურაზ ვეფხვაძე, ქეთევან შავგულიძე) — მასალა, რომელიც ხელს შეუწყობს მასწავლებელთა პროფესიულ ზრდას; „მოსწავლეები“ (თენგიზ კოპალიანი, ბეჟან ღვაბერიძე) — მასალა, რომელიც განკუთვნილია მოსწავლეებში მათემატიკის პოპულარიზაციისთვის, მათემატიკური ოლიმპიადების მიმოხილვა, საინტერესო ამოცანები მოსწავლეებისთვის; „სტუდენტები“ (თინათინ დავითაშვილი) — წარმოაჩენს მათემატიკის დეპარტამენტის წარმატებულ სტუდენტებს; „კურსდამთავრებულები“ (როლანდ ომანაძე) — წარმოგვიდგენს მათემატიკის დეპარტამენტის წარმატებულ კურსდამთავრებულებს; „თსუ“ (რამაზ ბოჭორიშვილი, თინათინ დავითაშვილი) — დაეხმარება ახალგაზრდებს სამომავლო კარიერის დაგეგმვაში; იბეჭდება მასალა, რომელიც აღწერს სასწავლო პროგრამებს, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში ჩატარებულ საინტერესო ღონისძიებებს; რუბრიკით „ჩვენი ამაგდარი პედაგოგები“ წარმოგიდგენთ ჩვენს ღვაწლმოსილ პროფესორებს.

ჟურნალი იღებს სტატიებს ჩამოთვლილი განყოფილებების მიხედვით და დადებითი რეცენზიის მიღების შემთხვევაში იბეჭდება. სტატიის წარმოდგენისას ავტორებმა უნდა დაიცვან მათთვის განკუთვნილი ინსტრუქციის მოთხოვნები.

აკადემიკოსი გურამ ხარატიშვილი

თამაზ თადუმაძე

ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის პროფესორი

გურამ ხარატიშვილი — 85

ცნობილი ქართველი მათემატიკოსი, საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის აკადემიკოსი, პროფესორი გურამ ხარატიშვილი დაიბადა 1934 წლის 14 იანვარს ქალაქ გორში. მან 1951 წელს დაამთავრა საშუალო სკოლა და იმავე წელს სწავლა განაგრძო მ. ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტში. გ. ხარატიშვილმა თავისი სადიპლომო ნაშრომი შეასრულა გამოჩენილი მათემატიკოსის, ილია ვეკუას ხელმძღვანელობით. მისივე რჩევითა და რეკომენდაციით, იგი 1956 წელს დაბრუნდა თბილისში და მუშაობა დაიწყო საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის გამოთვლით ცენტრში, სადაც მან 1957-1966 წწ განვლო გზა უმცროსი მეცნიერი თანამშრომლიდან განყოფილების გამგემდე. გ. ხარატიშვილის პირველი გამოკვლევა ეხებოდა მინიმალური საკუთრივი რიცხვების გამოთვლის მეთოდის დამუშავებას სპეციალური კლასის ინტეგრალური განტოლებებისათვის. გ. ხარატიშვილის ცხოვრებაში მნიშვნელოვანია 1958 წელი, როდესაც იგი პირველად შეხვდა გენიალური რუსი მათემატიკოსის, ლევ პონტრიაგინის მოწაფესა და მისი სკოლის ერთ-ერთ თვალსაჩინო წარმომადგენელს, ოპტიმალური მართვის მათემატიკური თეორიის ერთ-ერთ ფუძემდებელ რევაზ გამყრელიძეს. შეხვედრას შედეგად მოჰყვა ის, რომ ბატონი გურამი 1958-1961 წლებში, რ. გამყრელიძის ხელმძღვანელობით, გადიოდა სამეცნიერო სტაჟირებას მოსკოვში, ვ. სტეკლოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტში, სადაც ფუნქციონირებდა ლ. პონტრიაგინის სახელგანთქმული სემინარი. ერთ-ერთ სემინარზე ავტომატური მართვის პრობლემის მკვლევრების — ა. ფელდბაუმისა და მ. აიზერმანის მიერ დაისვა კონკრეტული ოპტიმალური ამოცანა დაგვიანების ფაქტორის გათვალისწინებით. შემდეგ ეს ამოცანა, რ. გამყრელიძის მიერ მათემატიკურად ფორმალიზებული, გახდა ბატონი გურამის კვლევის საგანი. 1961 წელს გ. ხარატიშვილმა შეასრულა ფუნდამენტური გამოკვლევა, რომელმაც მას მოუტანა ფართო საერთაშორისო აღიარება და პოპულარობა. სახელდობრ, გ. ხარატიშვილის მიერ ფაზურ კოორდინატებში მუდმივი დაგვიანების შემცველი სამართი სისტემისათვის პირველად დამტკიცდა პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპის ანალოგი. შემდგომ ეს გამოკვლევა საფუძვლად დაედო დაგვიანებულარგუმენტიანი ოპტიმალური მართვის თეორიას და შეიტანეს მრავალი მეცნიერის წიგნში. მას ცალკე პარაგრაფი აქვს დათმობილი მსოფლიოში აღიარებულ მონოგრაფიაში „L. S. Pontriagin, V. G. Boltianskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes, Wiley“, New-York, 1962.

გ. ხარატიშვილის მეცნიერული ინტერესები მრავალფეროვანი იყო. იგი ეხებოდა დაგვიანების შემცველი სისტემების ოპტიმალურ მართვას, ექსტრემალური ამოცანების ზოგად თეორიას, დიფერენციალური თამაშების თეორიას, გამოთვლით მეთოდებს ოპტიმალურ ამოცანებში, ცვლადსტრუქტურიან სამართ სისტემებს, ეკონომიკური სისტემების მოდელირებასა და ოპტიმიზაციას, ჩვეულებრივ და ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებების თეორიის სხვადასხვა ასპექტს.

გ. ხარატიშვილმა 1969 წელს დაიცვა სადოქტორო დისერტაცია თემაზე „ექსტრემალური ამოცანები წრფივ ტოპოლოგიურ სივრცეებში". იგი 1970 წლიდან იყო ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის (თსუ) პროფესორი. 1979 წელს აირჩიეს საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის წევრ-კორესპონდენტად, ხოლო 1988 წელს — აკადემიის ნამდვილ წევრად. გ. ხარატიშვილს 2001 წელს, თავის მოწაფეებთან ერთად, მიენიჭა საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის ა. რაზმაძის სახელობის პრემია ნაშრომთა ციკლისათვის „გადახრილარგუმენტიანი დიფერენციალურ განტოლებათა ამონახსნების ვარიაციის თეორია და მისი გამოყენება ოპტიმალური მართვის ამოცანებში წყვეტილი საწყისი პირობით".

გ. ხარატიშვილი მრავალი საერთაშორისო სამეცნიერო ფორუმის მონაწილე და ორგანიზატორი იყო, მათ შორის აღსანიშნავია: საერთაშორისო სიმპოზიუმი მართვის თეორიაში: ლოს ანჯელესი (1967, აშშ), თბილისი (1969, 1976); მათემატიკოსთა საერთაშორისო კონგრესი (1970, საფრანგეთი). ბატონი გურამი მართვის თეორიის პრობლემებზე ლექციების წასაკითხად არაერთხელ იყო მიწვეული უცხოეთის სამეცნიერო ცენტრებში. მის სამეცნიერო მოხსენებებს ისმენდნენ გამოჩენილი მათემატიკოსები: ლ. პონტრიაგინი, რ. ბელმანი, ლ. ნოიშდადტი და სხვები.

გ. ხარატიშვილი, მის მასწავლებელთან — რ. გამყრელიძესთან ერთად, ითვლება თსუ-ში ოპტიმალური მართვის თეორიის განვითარების ორგანიზატორად და პირველი ქართველი მათემატიკოს-მეცნიერ ა. რაზმაძის მეცნიერული მემკვიდრეობის გამგრძელებლად. გ. ხარატიშვილმა, რ. გამყრელიძესთან ერთად, ი. ვეკუას ხელშეწყობით თსუ გამოყენებითი მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტზე ჩამოაყალიბა მართვის თეორიის კათედრა, ხოლო თსუ გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტში — დიფერენციალური განტოლებებისა და მართვის თეორიის განყოფილება. მოკლე ხანში კათედრა და განყოფილება გადაიქცა ახალგაზრდა სამეცნიერო კადრების მომზადებისა და მეცნიერული კვლევების მძლავრ კერად.

გ. ხარატიშვილი მაღალი პროფესიონალიზმითა და მისთვის ჩვეული პასუხისმგებლობით ეწეოდა სახელმწიფოებრივ და საზოგადოებრივ მოღვაწეობას. იგი იყო თსუ-ის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის განყოფილების გამგე, თსუ-ის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის დეკანი, თსუ-ის მართვის თეორიის კათედრის გამგე, მართვის სისტემების ინსტიტუტის დირექტორი, კიბერნეტიკის ინსტიტუტის დირექტორი, საქართველოს 1991 წლის მოწვევის უზენაესი საბჭოს დეპუტატი, თსუ-ის სადისერტაციო საბჭოს თავმჯდომარე, საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის ვიცე-პრეზიდენტი და ფიზიკა-მათემატიკის ბიუროს წევრი, მრავალი სამეცნიერო საბჭოსა და სამეცნიერო ჟურნალის რედკოლეგიის წევრი. მნიშვნელოვანია გ. ხარატიშვილის წვლილი ახალგაზრდა სამეცნიერო კადრების მომზადებაში. მის მრავალრიცხოვან მოწაფეებს შორის მრავლადაა მეცნიერებათა კანდიდატი და დოქტორი, რომელთა გამოკვლევები აღიარებულია და ცნობილია საერთაშორისო მასშტაბით. ბატონი გურამი გამორჩეული ლექტორი და მოსაუბრე გახლდათ; იგი გატაცებით, მომხიბვლელად და საგნისადმი სიღრმისეული წვდომით კითხულობდა ლექციებს თსუ-ის მექანიკა-

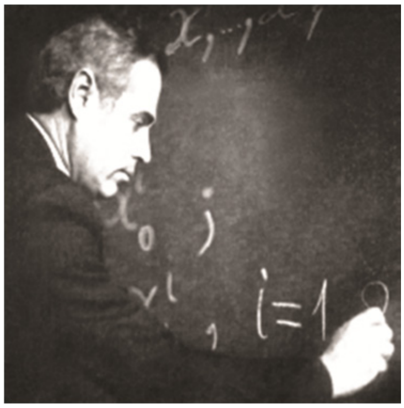
მათემატიკის, თსუ-ის გამოყენებითი მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტზე.

გ. ხარატიშვილი გარდაიცვალა 2009 წლის 8 სექტემბერს, რაც დიდი დანაკლისია ჩვენი სამშობლოსთვის და, საერთოდ, მათემატიკისთვის, მისი მრავალრიცხოვანი მოწაფეებისათვის. გურამ ხარატიშვილის მიერ განვლილი ცხოვრების გზა და დატოვებული მეცნიერული მემკვიდრეობა მომავალი თაობებისათვის იქნება მისაბაძი და სტიმული შემოქმედებითი მუშაობისაკენ.

ერთი დასამახსოვრებელი დღე თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში

1966 წლის შემოდგომაა. ვარ თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის მე-2 კურსის სტუდენტი. ამჟამად ეს ფაკულტეტი მათემატიკის დეპარტამენტის სახელწოდებით შედის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის შემადგენლობაში. ერთხელ ჩემმა ნათესავმა ია რამიშვილმა, რომელიც მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის მე-5 კურსის სტუდენტი იყო, მითხრა: მე ვესწრები სპეციალურ კურსს ოპტიმალური მართვის მათემატიკურ თეორიაში, რომელსაც გვიკითხავს მ. ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის კურსდამთავრებული, ახალგაზრდა მეცნიერი გურამ ხარატიშვილი. პარალელურად იგი ხელმძღვანელობს სასწავლო-სამეცნიერო სემინარს, რომელსაც ესწრებიან სტუდენტები და ხომ არ გექნება სურვილი, რომ შენც გახდე სემინარის მონაწილეო. მე დავთანხმდი და დავთქვით დღე, როცა უნდა შევხვედროდით გურამ ხარატიშვილს.

დადგა ეს დღეც. ჩვენ ვდგავართ მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის დეკანატის წინ თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მე-2 კორპუსში. ჩემმა ნათესავმა მითხრა: - შეხედე, მოდის გურამ ხარატიშვილიო. უცებ გული შემეკუმშა. მოდიოდა მოხდენილად ჩაცმული, გარეგნობით გამორჩეულად ლამაზი პიროვნება. იგი მოგვიახლოვდა, გამიღიმა და ხელი ჩამომართვა. შევედით იქვე, თავისუფალ აუდიტორიაში. მე ჩანთიდან ამოვიღე



მისი მონოგრაფია, მან ღიმილით მითხრა, თქვენ უკვე მომზადებული მოსულხართო და შემდეგ მოკლედ მომითხრო ოპტიმალური მართვის თეორიის საფუძვლებისა და მისი გამოყენებითი ასპექტების შესახებ, თანაც დასძინა, რომ ამ თეორიის ერთ-ერთი ფუძემდებელი მოსკოვში მოღვაწე, ჩემი სამეცნიერო ხელმძღვანელი და მასწავლებელი რევაზ გამყრელიძეაო (მსოფლიოში სახელგანთქმული მეცნიერი, რუსეთისა და საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიების აკადემიკოსი, ლენინური პრემიის ლაურეატი). რ. გამყრელიძეს და მე გადაწყვეტილი გვაქვს განვავითაროთ ოპტიმალური მართვის თეორია საქართველოში, ამისათვის გვსურს ამ დარგში მოვამზადოთ ახალგაზრდა სამეცნიერო კადრებიო. ბატონმა გურამმა მონოგრაფიაში მიმითითა რამდენიმე პარაგრაფი და მითხრა: — წაიკითხე და ეცადე რაიმე გაიგო, მოამზადე მოხსენება, შემდეგ შეხვედრაზე მოგისმენო. გამომშვიდობებისას წარმატებები მისურვა და თან დაამატა: — მეცნიერება მოითხოვს დიდ შრომას და პასუხისმგებლობას. ოპტიმალური მართვის თეორიის განვითარება საქართველოში იქნება ანდრია რაზმაძის (უნივერსიტეტის ერთ-ერთი დამაარსებლისა და პირველი ქართველი მკვლევარი მათემატიკოსის) მეცნიერული მემკვიდრეობის გაგრძელებაო. პირველი შეხვედრით ორმაგად გახარებული ვიყავი, ერთი მხრივ, იმით, რომ ოპტიმალური მართვის მათემატიკური თეორია საინტერესოდ მომეჩვენა როგორც თეორიული, ისე გამოყენებითი თვალსაზრისით, რადგანაც ამ თეორიის კვლევის საგანს წარმოადგენდა ისეთი ამოცანები, სადაც დასაშვები ვარიანტებიდან საჭირო იყო, გარკვეული აზრით, საუკეთესოს ანუ ოპტიმალურის ამორ-

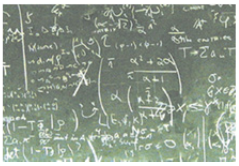
ჩევა; მეორე მხრივ, იმით, რომ შეხვედრისას გაიჟღერა ანდრია რაზმაძის სახელმა. წარმოშობით მე ვარ იმ რაიონიდან, სადაც დაიბადა ანდრია რაზმაძე. ჩემს ბავშვობაში უფროსებისგან, განსაკუთრებით ჩემი მეზობლისგან, ნოშრევან გაგუასგან, ბევრი რამ მქონდა გაგონილი ანდრია რაზმაძის მოღვაწეობის შესახებ თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, რუსეთში, გერმანიასა და საფრანგეთში. მეორე შეხვედრისას, ჩემს გამოსვლაში აქცენტი გავაკეთე ერთ განტოლებაზე და შევეცადე მისი არსის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. ბატონი გურამი ღიმილით და კეთილი განწყობით მისმენდა. შემდეგ მითხრა, რომ ამ განტოლებას გადამწყვეტი მნიშვნელობა ჰქონდა მთელს მონოგრაფიაში და ამას მაშინ მივხვდებოდი, როცა ძირითადი შედეგის დამტკიცებას გავეცნობოდი. მე თავიდანვე ვგრძნობდი, რომ ჩემი ცოდნის დონე არ იყო საკმარისი მონოგრაფიის წასაკითხად, ამიტომ დავიწყე სხვა სამეცნიერო ლიტერატურის მოძიება\გაცნობა. ასე გავხდი სემინარის აქტიური მონაწილე, რომელმაც საბოლოოდ განსაზღვრა ჩემი ორიენტაცია მეცნიერებაში.

2001 წელს ჩემს მასწავლებელ გურამ ხარატიშვილთან და ჩემს მოწაფე ნიკა გორგოძესთან ერთად მომენიჭა საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის ანდრია რაზმაძის სახელობის პრემია ნაშრომისათვის „გადახრილარგუმენტიანი დიფერენციალურ განტოლებათა ამონახსნების ვარიაციის თეორია და მისი გამოყენება ოპტიმალური მართვის ამოცანებში წყვეტილი საწყისი პირობით". ეს ჩემთვის განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი და შთამბეჭდავი იყო, რადგანაც პრემიის მონიჭებასთან დაკავშირებულ ტექსტში მოხსენიებული იყო ანდრია რაზმაძე, ჩემი მასწავლებლი და ჩემი მოწაფე. პრემიის მონიჭებასთან დაკავშირებით ცნობილმა ჟურნალისტმა თამაზ ებანოიძემ გამოაქვეყნა სტატია სათაურით „ჯაჭვური რეაქცია ახალ ლაურეატთა შორის". სტატიას თან ახლდა ჩვენი ერთობლივი სურათი, რომელიც გადაღებული იყო თსუ-ის პირველი კორპუსის ეზოში ანდრია რაზმაძის ბიუსტის ფონზე (გაზეთი „თბილისი", 26 ივლისი, 2001 წელი).

წილად მხვდა ბედნიერება, რომ ანდრია რაზმაძის ცხოვრებისა და მოღვაწეობის შესახებ არაერთხელ წამეკითხა მოხსენება საქართველოში გამართულ სამეცნიერო ღონისძიებებზე; აგრეთვე მათემატიკის დეპარტამენტის მე-2 კურსის სტუდენტებისათვის ლექციათა კურსის „ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები" ფარგლებში. 2014 წლის 24-26 თებერვალს სალერნოს უნივერსიტეტში (იტალია) გაიმართა სალერნო-თბილისის პირველი საერთაშორისო ვორკშოპი „მოდელირების შესახებ მათემატიკაში", სადაც წავიკითხე მოხსენება, რომელიც მივუძღვენი ანდრია რაზმაძისა და იტალიელი მათემატიკოსის, ლეონიდა ტონელის მეგობრობასა და თანამშრომლობას.

2004 წელს ბატონი გურამისგან, რომელიც უკვე იყო ცნობილი მეცნიერი, პროფესორი, საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის აკადემიკოსი, თსუ-ის მართვის თეორიის კათედრის გამგე და კიბერნეტიკის ინსტიტუტის დირექტორი, ვიღებდი ,,ინტერვიუს", რათა დამეზუსტებინა მასალა მისი ბიოგრაფიისათვის, რომლის გამოქვეყნება ბატონი გურამის დაბადებიდან 70 წლისთავთან დაკავშირებით გათვალისწინებული იყო ანდრია რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის საერთაშორისო ჟურნალში „მემუარები დიფერენციალურ განტოლებებსა და მათემატიკურ ფიზიკაში". ჩემ მიერ დასმულ შეკითხვებს იგი გულდასმით ისმენდა და მპასუხობდა, როგორც მორჩილი ბავშვი. მე პასუხებს ვიწერდი და ფიქრებით მოგონებებში წასული ვიხსენებდი იმ დღეს, როცა მას პირველად შევხვდი. ვიყავი ძალიან ბედნიერი, რომ განგებამ შემახვედრა ასეთ გამორჩეულ პიროვნებას, სულიერად ამაღლებულს, გულისხმიერს, აღიარებულ მეცნიერს და ინება რომ გავმხდარიყავი მისი მოწაფე, თანამშრომელი, კოლეგა და ისეთი, როგორიც დღეს ვარ.

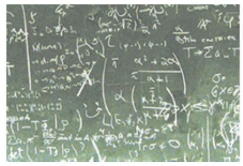
რევაზ გამყრელიძისა და გურამ ხარატიშვილის ძალისხმევით თსუ-ში შეიქმნა მსოფლიოში აღიარებული სამეცნიერო კერა ოპტიმალური მართვის თეორიაში. მათი და მათი მოწაფეების ხელმძღვანელობით აღიზარდა არაერთი ქართველი მეცნიერი, რომლებიც



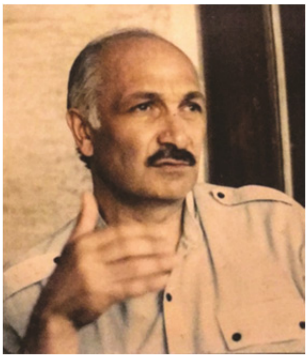
დღეს წარმატებით მოღვაწეობენ თსუ-ში და საქართველოს სხვადასხვა უნივერსიტეტში.

ბატონი გურამი, ტრაგიკული შემთხვევის გამო, უეცრად გარდაიცვალა 2009 წლის 8 სექტემბერს. საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემია იუწყებოდა, რომ გარდაიცვალა გამოჩენილი ქართველი მეცნიერი და საზოგადო მოღვაწე, ცნობილი მათემატიკოსი, საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის ვიცეპრეზიდენტი, აკადემიკოსი გურამ ხარატიშვილი (გაზეთი „საქართველოს რესპუბლიკა“, 12 სექტემბერი, 2009 წელი, № 180).

ჩემი მასწავლებლის გარდაცვალება ჩემთვის ძალიან მტკივნეული იყო იმ სიყვარულის ფონზე, რომელსაც მე გულით ვატარებდი 40 წლის მანძილზე. ჩემს მეხსიერებაში ბატონი გურამი დარჩა ისეთივე ლამაზი და მომხიბვლელი ინტელექტუალი, როგორი შთაბეჭდილებაც დატოვა მან ჩემზე იმ დღეს, როცა მას პირველად შევხვდი.



ზაურ ჭანტურია — 80



ლერი გოგოლაძე

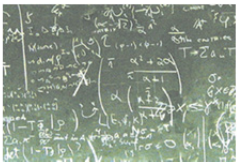
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
თსუ-ის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო
ფაკულტეტის ასოცირებული პროფესორი.

რუსუდან მესხია

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი,
თსუ-ის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა
ფაკულტეტის ასისტენტ-პროფესორი.

სახელოვანი ქართველი მათემატიკოსი ზაურ ჭანტურია დაიბადა 1939 წლის 30 აპრილს ქალაქ ფოთში, ცნობილი პედაგოგების ოჯახში. მამა — ამბროსი ჭანტურია მათემატიკოსი იყო, დედა — ალექსანდრა ჯიქია — ქიმიის მასწავლებელი.

ზაურ ჭანტურიამ 1957 წელს წარჩინებით დაამთავრა თბილისის პირველი საშუალო სკოლა და თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სტუდენტი გახდა. 1962-1965 წლებში გაიარა ასპირანტურის კურსი ფუნქციათა თეორიაში პროფესორ ლევან მაღნარაძის ხელმძღვანელობით; წარმატებით დაიცვა საკანდიდატო და შემდეგ სადოქტორო დისერტაციები. ზაურ ჭანტურიას მეცნიერული ინტერესები მოიცავდნენ აქტუალური პრობლემების ფართო სპექტრს. ბატონმა ზაურმა ჯერ კიდევ ასპირანტურის წლებში ამოხსნა ცნობილი ამოცანა უწყვეტ ფუნქციათა სივრცეში პოლინომური ბაზისების რიგის ზრდის შესახებ და შექმნა ახალი მეთოდი, რითაც გამოიკვლია ანალოგიური ამოცანა ორთოგონალური ბაზისებისთვისაც. მან შემოიღო ფუნქციის ცვლილების მოდულის ცნება და ამ მახასიათებლით განსაზღვრა ფუნქციათა ახალი კლასი, რაც მნიშვნელოვანი აღმოჩნდა ფურიეს



მწკრივთა თეორიაში და სამეცნიერო ლიტერატურაში დამკვიდრდა ჭანტურიას კლასების სახელწოდებით. ფუნქციათა თეორიაში ზაურ ჭანტურიას მიერ მიღებული შედეგები არაერთი უცხოელი ავტორის სამეცნიერო შრომებში აისახა და ქართველ მეცნიერს მაღალი სამეცნიერო ავტორიტეტი დაუმკვიდრა.

ბატონი ზაური 70-მდე სამეცნიერო ნაშრომის ავტორი იყო და მათი უმრავლესობა პრესტიჟულ საზღვარგარეთულ სამეცნიერო ჟურნალებშია გამოქვეყნებული. ჭანტურიას ნაშრომთა ციკლმა: „ორთოგონალური პოლინომური ბაზისებისა და ფურიეს მწკრივების კრებადობის შესახებ“ ანდრია რაზმაძის სახელობის პრემია დაიმსახურა.

აღსანიშნავია ზაურ ჭანტურიას აქტიური თანამშრომლობა საზღვარგარეთის ქვეყნების სამეცნიერო წრეებთან, ახლო კონტაქტები და მეგობრობა ბევრ ცნობილ მათემატიკოსთან.

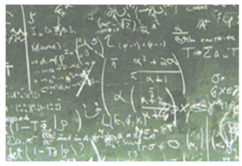
ზაურ ჭანტურია წლების განმავლობაში ხელმძღვანელობდა თსუ-ის ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის ფუნქციონალური ანალიზის განყოფილებას; პედაგოგიურ მოღვაწეობას ეწეოდა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტსა და პოლიტექნიკურ ინსტიტუტში. მისი ხელმძღვანელობით დაიცვეს ექვსი საკანდიდატო დისერტაცია.

ბატონ ზაურს მეცნიერული კვლევა და ასპირანტების ხელმძღვანელობა მძიმე სენთან ბრძოლის პირობებშიც არ შეუწყვეტია.

ზაურ ჭანტურია 50 წლის ასაკში გარდაიცვალა და გარდა მეცნიერული მემკვიდრეობისა, დატოვა შესანიშნავი ოჯახი — მეუღლე, შვილები, შვილიშვილები, რომლებიც ღირსეულად ინახავენ მის ნათელ ხსოვნას.

ზაურ ჭანტურიას მოღვაწეობა მშვენიერი მაგალითია ახალგაზრდებისათვის მიზანდასახულობის, შეუპოვრობის და საყვარელი საქმის უანგარო სამსახურისა, ხოლო მისი გამორჩეული პიროვნული თვისებები დაუვიწყარია მეგობრებისა და მოწაფეებისათვის.

წელს ბატონ ზაურს 80 წელი შეუსრულდებოდა.



ზაურ ჭანტურიას მოსაგონარი

ციცინო გაბესკირია

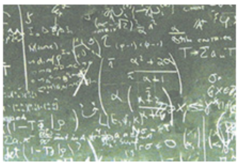
თსუ გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სპეციალისტი (ჟურნალების: Proceedings, Seminar, Reports of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, AMIM, Bulletin of TICMI, Lecture Notes of TICMI ინგლისური ენის რედაქტორი).

ნახევარ საუკუნეს გადაცილებულ ადამიანს, დამეთანხმებით, ხშირად უფიქრია იმაზე, სად უფრო მეტი საყვარელი ადამიანი ეგულება — აქ, ამ „ცოდვილ ქვეყანაზე“, თუ იქ, სულთა საუფლოში, საითკენაც სხვადასხვა დროს მრავალი ძვირფასი მეგობარი თუ ნათესავი, ოჯახის წევრი ან უბრალო ნაცნობი გაუცილებია... და თუ ასეთ ფიქრს ერთხელ მაინც გავივლებთ გულში ზაურ ჭანტურიას ახლობლები და მეგობრები, მაშინ რაოდენ ლამაზად უნდა მოგვეჩვენოს ის განათებული სამყარო, სადაც ახლა ზაური იმყოფება და რაოდენი სითბოთი და სიყვარულით უნდა აღავსებდეს ის ჩვენს გაციებულ, შემზარავი ყოველდღიურობით გადაღლილ გულებს.

ლამაზად იცხოვრა და იღვაწა ზაურ ჭანტურიამ. მას, როგორც მეცნიერს, მისი კოლეგები და სამეცნიერო საზოგადოება შეაფასებს, მის ღვაწლს და შემოქმედებით მემკვიდრეობას ახლაც და მომავალშიც ეყოლება დამფასებელი, მაგრამ მე მსურს მასზე, როგორც პიროვნებაზე ვისაუბრო.

ზ.ჭანტურია იყო განსახიერება ჭეშმარიტი ინტელიგენტის, დახვეწილი ქართველისა, რომელთა ნაკლებობა, ვაი, რომ ასე იგრძნობა ჩვენს დროში. პატიოსნება და დიდი ნიჭი, საქმისადმი ერთგულება და წესრიგის სიყვარული, გაწონასწორებულობა და სიდარბაისლე, პატრიოტიზმი — არა დეკლარირებული და აფიშირებული, არამედ ჩუმი, მაგრამ პრინციპული. ეს იმდენად გამორჩეული თვისებები იყო, რომ მავანსა და მავანში განცვიფრებასაც იწვევდა. უკვირდათ ზაურის ეს თვისებები ზოგიერთებს, ვინაიდან მისი პიროვნება ვერაფრით ვერ თავსდებოდა ჩვენში დამკვიდრებულ ქართველის იმ სტერეოტიპში, რომლის შემოქმედებით სამყაროში, სამწუხაროდ, კლანური და ძმაბიჭური პრინციპებია გამეფებული, ხოლო „ნაღდი ქართველი“ ხშირად ზერელე ინტერესების მქონე სნობია, რომელსაც პატრიოტიზმი მხოლოდ სუფრასთან, ჭიქით ხელში აქვს წარმოდგენილი, ცხოვრების არსს კი ოდენ ამქვეყნიური სიამოვნებით გამოწვეულ ბედნიერებაში ხედავს.

სულ სხვა რამეში ხედავდა ბედნიერებას ზაურ ჭანტურია. გადაუჭარბებლად შეიძლება ითქვას, რომ მას ცხოვრების ერთი დღეც არ გაუტარებია ფუჭად, უშინაარსოდ. მისი სტიქია ჯანსაღი შემოქმედებითი საქმიანობა იყო. მცონარეობას, ლაზღანდარობას, ფუქსავატობას ვერ იტანდა. იგი ნამდვილი პროფესიონალი იყო და დილეტანტიზმი ყველაფერში სძულდა; ყალბ, ბრჭყვიალა სიტყვებს ერიდებოდა, ინტრიგებისა და ავსიტყვაობისთვის არასოდეს მოუცლია, დროის ფასი იცოდა, დროს ეშურებოდა, თითქოს გრძნობდა, რომ ცოტა დარჩენოდა... საქმეში პრინციპული და შემართული იყო, ოჯახში კი — არაჩვეულებრივი მეუღლე და მზრუნველი მამა, შვილების აღმზრდელიც და მეგობარიც.



განსაკუთრებული სიმტკიცით შეხვდა იგი უკურნებელ სენს, გასაოცარი ვაჟკაცობა გამოიჩინა, ღირსეულად ეჭირა თავი და ეს არაერთგზის აღუნიშნავთ გაკვირვებით მის მკურნალ ექიმებს საქართველოსა თუ გერმანიაში. მას ბოლომდე ახლდა თან ის სიმშვიდე, რომელიც მხოლოდ სულით ძლიერ ადამიანებს ახასიათებთ უკიდურესი სიმძიმილის ჟამს და რომელიც ასე გადმოგვეცემოდა ხოლმე მასთან შეხვედრისას მის ახლობლებსა და მეგობრებს.

ჭანტურიების ოჯახმა ორი ბრწყინვალე მეცნიერი შესძინა საქართველოს — ზაური და მისი უმცროსი ძმა თემური, ორი საამაყო მეგობარი გვაჩუქა ჩვენ. ძნელი იყო ჩვენთვის უმოკლეს დროში ამ ორი დიდი ტრავმის გადატანა. იქნებ ამიტომაც ვეპოტინები აზრს იმ განათებული სამყაროს შესახებ, იქნებ...

კიდევ ერთი თვისება მაგონდება ზაურ ჭანტურიასი — მისი საოცარი იუმორის გრძნობა, თბილი, ყოველგვარ სარკაზმს მოკლებული იუმორის. ვწერ ამ სტრიქონებს და თვალწინ მიდგას მისი დახვეწილი სახე; წარმოვიდგენ, თითქოს გაეცინაო ჩემს სიტყვებზე; მახსენდება მისთვის დამახასიათებელი, ცრემლებამდე მისული გულღია სიცილი. მე და ჩემს მეუღლეს — მის კოლეგასა და მეგობარს, ლერი გოგოლაძეს — ბევრი ტკბილი მოგონება გვაკავშირებდა ზაურის ოჯახთან, ბევრჯერ შევხუმრებივართ ერთმანეთს. ჩვენი მეგობრობის თანამდევი იუმორი იყო, სიყვარული იყო...

ახლაც სიყვარულით გიგონებ, ჩემო ზაურ! ცხოვრების ორომტრიალში უცებ მოგვეპარა შენი სამოცი წლისთავი; თითქოს სულ აქ იყავი, ჩვენ გვერდით. გმადლობთ იმ კაცობისათვის, შენ რომ დაგვიტოვე; გმადლობთ შენი თბილი ოჯახისათვის; გმადლობთ შენი ხანმოკლე, მაგრამ ლამაზი ცხოვრებისათვის.

ციცი გაბესკირია
სიტყვა, წარმოთქმული თბილისის ივ.ჯავახიშვილის სახ.
სახელმწიფო უნივერსიტეტში ზაურ ჭანტურიას
60 წლისთავისადმი მიძღვნილ საიუბილეო საღამოზე.

ამოზნექილი სიმრავლეები და ეკონომიკური ამოცანების მათემატიკური მოდელები

(ადამიანური რესურსების ოპტიმალური განაწილება)

თინათინ დავითაშვილი

ასოცირებული პროფესორი
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ჰამლეტ მელაძე

პროფესორი, ნ. მუსხელიშვილის სახელობის
გამოთვლითი მათემატიკის ინსტიტუტი

მათემატიკის თანამედროვე მეთოდები, მათ შორის ისინიც, რომლებიც არსებითად იყენებს ამოზნექილი სიმრავლეების თვისებებს, მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ეკონომიკის ბევრი ამოცანის მათემატიკური მოდელების აგების პროცესში. ეს გამოწვეულია იმით, რომ ევკლიდეს სივრცის მნიშვნელოვანი სტრუქტურული თვისებები, რომელთა საშუალებითაც აგებენ ეკონომიკის მათემატიკურ მოდელებს, ხშირად მჭიდროდ არის დაკავშირებული ამოზნექილი სიმრავლეების ტოპოლოგიურ თვისებებთან.

სტატიის მიზანია ვაჩვენოთ, რომ ეკონომიკის უმარტივესი მათემატიკური მოდელების შესწავლაც კი მოითხოვს მათემატიკის ფუნდამენტური ცნებების გამოყენებას. ამ მიზნით ჩვენ განვიხილავთ ერთ ეკონომიკურ ამოცანას, კერძოდ, ადამიანური რესურსების ოპტიმალურად განაწილების ამოცანას და მის მაგალითზე შევეცდებით დაგანახოთ, თუ როგორ შეიძლება გამოვიყენოთ ამოზნექილი სიმრავლეების თვისებები ამ ამოცანის ამოსახსნელად.

$1.^0$ მენეჯერი ხელმძღვანელობს ბრიგადას, რომელშიც 10 მუშაა გაერთიანებული. ამ ბრიგადამ ტრანსპორტზე უნდა დატვირთოს აგური, რომელიც ორ საწყობშია მოთავსებული. პირველ საწყობში 4000 აგურია, ხოლო მეორეში – 8000 აგური. საწყობების ტექნიკური აღჭურვილობა ისეთია, რომ პირველი საწყობიდან აგურების დატვირთვა უნდა განახორციელოს არანაკლებ 6-მა მუშამ, ხოლო მეორე საწყობში შეიძლება იმუშაოს 3-დან 6-მდე მუშამ. მენეჯერმა უნდა გაანაწილოს მუშები ისე, რომ სამუშაო შესრულდეს მინიმალურ დროში. სიმარტივისთვის ვიგულისხმოთ, რომ ყოველ მუშას 1 საათში შეუძლია დატვირთოს 1000 აგური.

ისმება კითხვა — როგორ უნდა მოიქცეს მენეჯერი? მაგალითად, მან შეიძლება აირჩიოს აგურების დატვირთვის შემდეგი სტრატეგია: ჯერ ათივე მუშა გააგზავნოს პირველ საწყობში, საიდანაც, აგურების დატვირთვის შემდეგ, მუშების მაქსიმალურ რაოდენობას — 6 გააგზავნის მეორე საწყობში. გამოვთვალოთ, ამ გეგმის მიხედვით რა დრო დასჭირდება აგურების დატვირთვას.

10 მუშას 1 საათში (60 წუთში) შეუძლია დატვირთოს 10000 აგური. 4000 აგურის დატვირთვას ისინი შეძლებენ 60-ის $\frac{4000}{10000}$ ნაწ. = 60-ის $\frac{2}{5}$ ნაწ. = 24 წუთში = $\frac{2}{5}$ საათში. ანალოგიურად, 6 მუშა 1 საათში (60 წუთში) დატვირთავს 6000 აგურს. 8000 აგურის დატვირთვას ისინი შეძლებენ 60-ის $\frac{8000}{6000}$ ნაწ. = 60-ის $\frac{4}{3}$ ნაწ. = 80 წუთში = $1\frac{1}{3}$ საათში, ე.ი. ორივე საწყობიდან აგურების დატვირთვას დასჭირდება:

$$\frac{2}{5}+1\frac{1}{3}=1\frac{11}{15} \text{ საათი.}$$

ბუნებრივად ისმება კითხვა: არის თუ არა აგურების დატვირთვის ზემოთ განხილული გეგმა საუკეთესო? ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად მენეჯერს დასჭირდა მათემატიკოსის დახმარება.

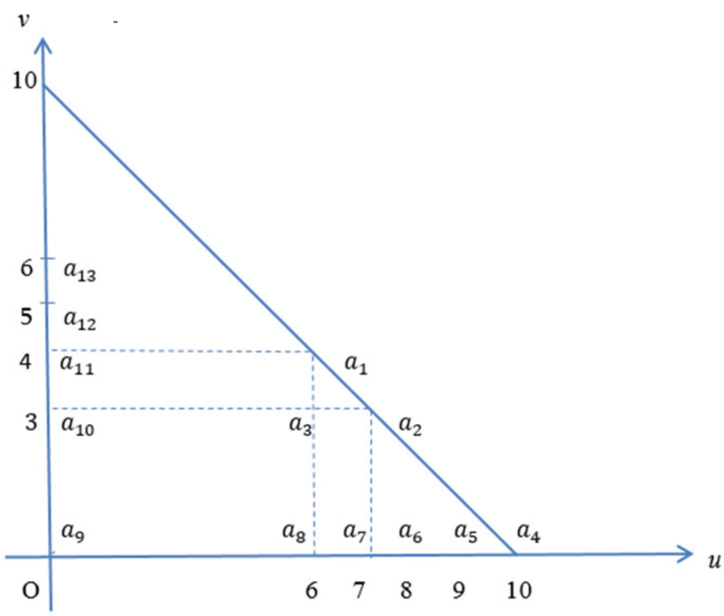
2.^{0} სანამ დასმულ ამოცანას ამოვხსნიდეთ, ჯერ უნდა შევადგინოთ მისი მათემატიკური მოდელი. თუ აღვნიშნავთ u და v სიმბოლოებით მუშების რაოდენობას, რომლებიც შესაბამისად მუშაობენ პირველ და მეორე საწყობებში, მაშინ დროის ყოველ მომენტში u და v რიცხვები აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) $u \in N, v \in N$, სადაც N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა;
2) $6 \le u \le 10$ ან $u = 0$;
3) $3 \le v \le 6$ ან $v = 0$;
4) $u + v = 10$.

ამ უტოლობათა სისტემას აქვს 13 ამონახსნი, რაც შეესაბამება აგურების დატვირთვის 13 სხვადასხვა რეჟიმს. ამასთან დაკავშირებით შევნიშნოთ, რომ დასმული ამოცანის ამოსახსნელად დროის სხვადასხვა მომენტში შეიძლება გამოვიყენოთ სხვადასხვა რეჟიმი:

$a_1 = \langle 6;4 \rangle$ (პირველ საწყობში მუშაობს 6 მუშა, მეორეში კი — 4),
$a_2 = \langle 7;3 \rangle$, $a_3 = \langle 6;3 \rangle$, $a_4 = \langle 10;0 \rangle$, $a_5 = \langle 9;0 \rangle$, $a_6 = \langle 8;0 \rangle$, $a_7 = \langle 7;0 \rangle$,
$a_8 = \langle 6;0 \rangle$, $a_9 = \langle 0;0 \rangle$, $a_{10} = \langle 0;3 \rangle$, $a_{11} = \langle 0;4 \rangle$, $a_{12} = \langle 0;5 \rangle$, $a_{13} = \langle 0;6 \rangle$.

გამოვსახოთ ეს ამონახსნები (რეჟიმები) წერტილების საშუალებით საკოორდინატო სიბრტყეზე:



იმ წრფის განტოლებას, რომელიც გადის (10,0) და (0,10) წერტილებზე, აქვს $v = -u + 10$ სახე. ცხადია, a_1 და a_2 წერტილები მდებარეობს ამ წრფეზე.

შევნიშნოთ, რომ სხვადასხვა რეჟიმის გამოყენების რიგს მნიშვნელობა არ აქვს. მაგალითად, თუ მენეჯერი ჯერ გააგზავნის 6 მუშას მეორე საწყობში, ხოლო შემდეგ მთელ ბრიგადას პირველ საწყობში, სამუშაოს შესრულებას კვლავ დასჭირდება $1\frac{11}{15}$ საათი. ამიტომ ჩავთვალოთ, რომ აგურების დატვირთვა მიმდინარეობს შემდეგნაირად: ჯერ t_1 საათის განმავლობაში გამოიყენება a_1 რეჟიმი, შემდეგ t_2 საათის განმავლობაში — a_2 რეჟიმი და ა. შ., t_{13} საათის განმავლობაში — a_{13} რეჟიმი. ამასთან, მაგალითად, t_1 შეიძლება იყოს 0-ის ტოლი, თუ a_1 რეჟიმი აგურების დატვირთვის პროცესში არ იქნება გამოყენებული. ასე, მაგალითად, 1^0-ში განხილული გეგმის შემთხვევაში 0-ისგან განსხვავდება მხოლოდ $t_4 = \frac{2}{5}$ და $t_{13} = \frac{4}{3}$.

თუ მხედველობაში არ მივიღებთ ერთი საწყობიდან მეორეში მუშების გადაყვანის დროს, მაშინ აგურების დატვირთვისათვის საჭირო მთლიანი დრო შემდეგი სიდიდის ტოლი იქნება:

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_{12} + t_{13}\ . \qquad (1)$$

რადგან თითოეული მუშა საათში ტვირთავს 1000 აგურს, ამიტომ t დროის განმავლობაში პირველი საწყობიდან დატვირთული აგურების რაოდენობა (x ათასი) და მეორე საწყობიდან დატვირთული აგურების რაოდენობა (y ათასი) გამოისახება შემდეგი ტოლობების საშუალებით:

$$x = 6t_1 + 7t_2 + 6t_3 + 10t_4 + 9t_5 + 8t_6 + 7t_7 + 6t_8 + 0 \cdot t_9 + 0 \cdot t_{10} + 0 \cdot t_{11} + 0 \cdot t_{12} + 0 \cdot t_{13}\ , \qquad (2)$$

$$y = 4t_1 + 3t_2 + 3t_3 + 0 \cdot t_4 + 0 \cdot t_5 + 0 \cdot t_6 + 0 \cdot t_7 + 0 \cdot t_8 + 0 \cdot t_9 + 3t_{10} + 4t_{11} + 5t_{12} + 6t_{13}. \qquad (3)$$

დავაფიქსიროთ t -ს რაიმე მნიშვნელობა. ჩავსვათ (2), (3) ტოლობებში t_1, t_2, $\cdots$, t_{12} t_{13} რიცხვების სხვადასხვა მნიშვნელობა, რომლებიც აკმაყოფილებს (1) ტოლობას, მაშინ მივიღებთ (x, y) სიბრტყის სხვადასხვა წერტილს. ამ წერტილების სიმრავლე აღვნიშნოთ A_t სიმბოლოთი. ვუწოდოთ მას t დროის განმავლობაში მიღწევადობის სიმრავლე. ეს სახელწოდება გამართლებულია, რადგან A_t სიმრავლე შედგება სიბრტყის წერტილებისგან, რომელთა კოორდინატებიც აგურების იმ რაოდენობის ტოლია, რომელიც შეუძლია დატვირთოს ბრიგადამ პირველი და მეორე საწყობებიდან t დროის განმავლობაში.

ამის შემდეგ მენეჯერის ამოცანა შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ: შევადგინოთ აგურების დატვირთვის სქემა ისე, რომ წერტილი კოორდინატებით (4, 8) (ეს წერტილი შეესაბამება საწყობებში აგურების რაოდენობას) ეკუთვნოდეს A_t სიმრავლეს და t-ს მნიშვნელობა იყოს მინიმალური.

$3.^0$ განვიხილოთ, თუ როგორ ხსნის ამ ამოცანას მათემატიკოსი. პირველ რიგში ის ამარტივებს ამოცანას: ის შემოიფარგლება A_1 $(t = 1)$ სიმრავლის აგებით, რადგან ნებისმიერი A_t სიმრავლე A_1 სიმრავლის ჰომოთეტურია ჰომოთეტიის t კოეფიციენტითა და ჰომოთეტიის ცენტრით კოორდინატთა სათავეში.

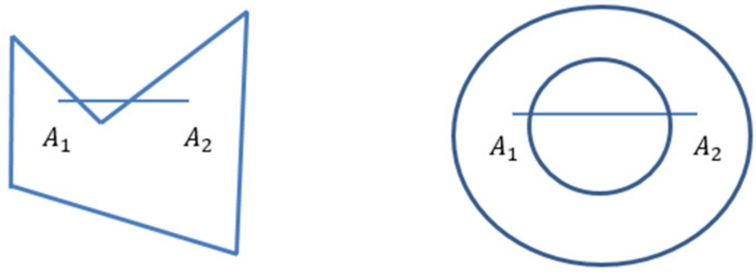
შემდგომ დაგვჭირდება ე.წ. ამოზნექილი სიმრავლის ზოგიერთი თვისება. ჯერ შემოვიღოთ ამოზნექილი გარსის ცნება.

სასკოლო გეომეტრიის სახელმძღვანელოში განსაზღვრულია ამოზნექილი მრავალკუთხედის ცნება. თუ გავიხსენებთ ამ განსაზღვრებას, ის დაგვეხმარება განვსაზღვროთ ამოზნექილი სიმრავლე სიბრტყეზე.

განსაზღვრება 1. სიბრტყეზე წერტილების M სიმრავლეს ეწოდება ამოზნექილი, თუ ამ სიმრავლეში შემავალ ნებისმიერ ორ წერტილთან ერთად ამავე სიმრავლეს ეკუთვნის ამ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი.

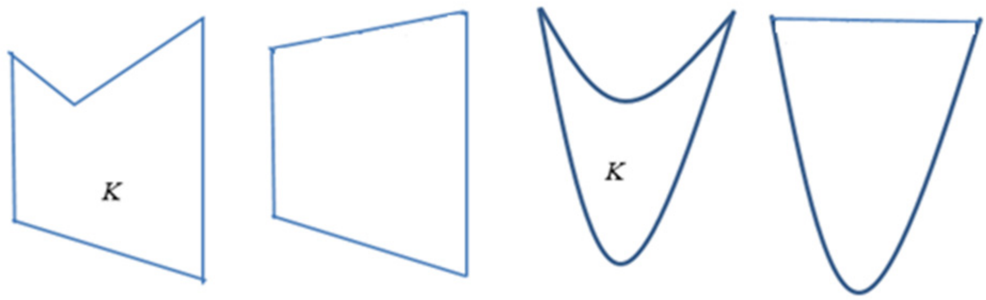
ამოზნექილი სიმრავლეების მაგალითები მოყვანილია შემდეგ ნახაზზე:

მომდევნო ნახაზზე მოყვანილი სიმრავლეები კი ამოზნექილი არაა.



განსაზღვრება 2. K სიმრავლის ამოზნექილი გარსი — ეს არის უმცირესი ამოზნექილი სიმრავლე, რომელიც შეიცავს K-ს.

შემდეგ ნახაზზე გამოსახულია K სიმრავლეების ამოზნექილი გარსი.



K სიმრავლის ამოზნექილ გარსს აღნიშნავენ Conv$K$ სიმბოლოთი (ლათ. Convexus — ამოზნექილი).

შემდგომ ჩვენ დაგვჭირდება ამოზნექილი სიმრავლის ზოგიერთი თვისება.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ მიღწევადობის A_1 სიმრავლე $\{a_1, a_2, \cdots, a_{13}\}$ სიმრავლის ამოზნექილი გარსია. ამ მიზნით შემოვიღოთ ამოზნექილი გარსის ცნების სხვა განსაზღვრება.

საკოორდინატო სიბრტყის წერტილებზე შემოვიღოთ ორი ოპერაცია: (x_1, y_1) და (x_2, y_2) წერტილების ჯამი ვუწოდოთ $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ წერტილს. (x, y) წერტილისა და t რიცხვის ნამრავლი ვუწოდოთ (tx, ty) წერტილს. თუ ყოველ a წერტილს შევუსაბამებთ ვექტორს, რომლის სათავეა O კოორდინატთა სათავე, ხოლო ბოლო წერტილია a, მაშინ ჩვენ მიერ წერტილთა სიმრავლეზე შემოღებული ოპერაციები ემთხვევა ვექტორებზე განსაზღვრულ ჩვეულებრივ ოპერაციებს.

ადვილად შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ, თუ M სიმრავლე ამოზნექილია, მაშინ tM სიმრავლეც (ე.ი. $t\beta$ წერტილების სიმრავლე, სადაც $\beta \in M$) ამოზნექილია.

განსაზღვრება 3. β წერტილს ეწოდება $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ წერტილების ამოზნექილი კომბინაცია, თუ არსებობს ისეთი არაუარყოფითი $t_1, t_2, \cdots, t_n$ რიცხვები, რომ $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$ და სამართლიანია ტოლობა:

$$\beta = t_1\beta_1 + t_2\beta_2 + \cdots + t_n\beta_n.$$

თეორემა 1. M სიმრავლის ამოზნექილი გარსი შედგება M-ის წერტილების ყველა შესაძლო ამოზნექილი კომბინაციისგან.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ M სიმრავლის წერტილების ყველა შესაძლო ამოზნექილი კომბინაციების სიმრავლე Q სიმბოლოთი. თუ γ და δ ნებისმიერი წერტილებია, მაშინ $t\gamma+(1-t)\delta$ სახის წერტილების სიმრავლე, სადაც $0\le t\le 1$, წარმოადგენს მონაკვეთს, რომლის ბოლოებია γ და δ. აქედან ადვილად მტკიცდება, რომ Q ამოზნექილი სიმრავლეა. მართლაც, თუ Q არის M სიმრავლის წერტილების ამოზნექილი კომბინაციების სიმრავლე, მაშინ ეს ნიშნავს, რომ $t\gamma+(1-t)\delta$ აგრეთვე Q სიმრავლის ნაწილია. აქედან გამომდინარეობს, რომ მონაკვეთი, რომელიც აერთებს γ და δ წერტილებს, ეკუთვნის Q სიმრავლეს, რაც ამტკიცებს, რომ Q სიმრავლე ამოზნექილია. გარდა ამისა, ცხადია, რომ $M\subset Q$, შესაბამისად, $\mathrm{Conv}M\subset Q$.

ახლა მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით n-ის მიმართ დავამტკიცებთ, რომ M სიმრავლის წერტილების ნებისმიერი ამოზნექილი კომბინაცია $t_1\beta_1+t_2\beta_2+\cdots+t_n\beta_n$ $(t_1+t_2+\cdots+t_n=1)$ ეკუთვნის $\mathrm{Conv}M$-ს. ეს კი ნიშნავს, რომ $Q\subset\mathrm{Conv}M$, ე. ი. $Q=\mathrm{Conv}M$.

თუ $n=1$, მივიღებთ, რომ $\beta\in M$, მაშინ $\beta\in\mathrm{Conv}M$, ამოზნექილი გარსის განსაზღვრების თანახმად. ამრიგად, $n=1$-ისთვის დებულება სამართლიანია. ახლა დავუშვათ, რომ M სიმრავლის n წერტილის ყველა შესაძლო ამოზნექილი გარსი ეკუთვნის $\mathrm{Conv}M$-ს. დავამტკიცოთ, რომ ამოზნექილი კომბინაცია:

$$\delta=t_1\beta_1+t_2\beta_2+t_n\beta_n+t_{n+1}\beta_{n+1},$$

სადაც β_1, β_2, $\cdots$, β_n, β_{n+1} M სიმრავლის წერტილებია, ხოლო $t_1+t_2+\cdots+t_n+t_{n+1}=1$, აგრეთვე ეკუთვნის $\mathrm{Conv}M$-ს.

δ-ს გამოსახულება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}\delta&=(1-t_{n+1})\left[\frac{t_1\beta_1}{1-t_{n+1}}+\frac{t_2\beta_2}{1-t_{n+1}}+\cdots+\frac{t_n\beta_n}{1-t_{n+1}}+\frac{t_{n+1}\beta_{n+1}}{1-t_{n+1}}\right]\\&=(1-t_{n+1})\left[\frac{t_1}{1-t_{n+1}}\beta_1+\frac{t_2}{1-t_{n+1}}\beta_2+\cdots+\frac{t_n}{1-t_{n+1}}\beta_n\right]+t_{n+1}\beta_{n-1}.\end{aligned}\tag{4}$$

რადგან $t_1+t_2+\cdots+t_n+t_{n+1}=1$, ამიტომ $1+t_2+\cdots+t_n=1-t_{n+1}$ და აქედან მივიღებთ:

$$\frac{t_1}{1+t_{n+1}}+\frac{t_2}{1-t_{n+1}}+\cdots+\frac{t_n}{1-t_{n+1}}=1.$$

ამიტომ, მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის დაშვების თანახმად:

$$\eta=\left[\frac{t_1}{1-t_{n+1}}\beta_1+\frac{t_2}{1-t_{n+1}}\beta_2+\cdots+\frac{t_n}{1-t_{n+1}}\right]\in\mathrm{Conv}M$$

(4) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ δ მდებარეობს მონაკვეთზე, რომლის ბოლოებია η და β_{n+1}. რადგან $\beta_{n+1}\in M\subset\mathrm{Conv}M$, $\eta\in\mathrm{Conv}M$, ხოლო $\mathrm{Conv}M$ ამოზნექილი სიმრავლეა, ამიტომ ეს მონაკვეთიც ეკუთვნის $\mathrm{Conv}M$-ს. საბოლოოდ მივიღეთ, რომ $\delta\in\mathrm{Conv}M$-ს.

თეორემა დამტკიცებულია.

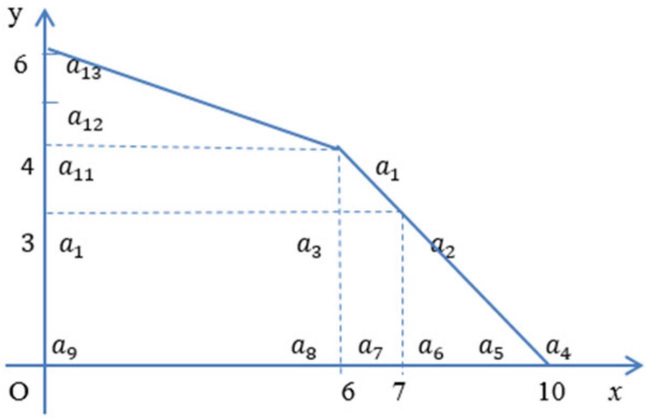
ამრიგად, $\mathrm{Conv}M$-ის ყველა წერტილი M სიმრავლის გარკვეული წერტილების სასრული ერთობლიობის ამოზნექილი კომბინაციაა. თუ M სიმრავლე სასრულია, მაშინ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $\mathrm{Conv}M$-ის ყოველი წერტილი არის M-ის ყველა წერტილის ამოზნექილი კომბინაცია.

შენიშვნა: აღმოჩნდა, რომ სიბრტყეზე ნებისმიერი M სიმრავლისთვის $\mathrm{Conv}M$-ის ყოველი β წერტილი შეიძლება მივიღოთ სამი — β_1, $\beta_2,\beta_3\in M$ წერტილის ამოზნექილი კომბინაციის საშუალებით (ცხადია, რომ სხვადასხვა β-თვის β_1, β_2,β_3 წერტილები სხვადასხვაა). ეს თეორემა, უფრო ზუსტად, მისი n-განზომილებიანი ანალოგი, წარმოადგენს კარათეოდორის ცნობილ თეორემას.

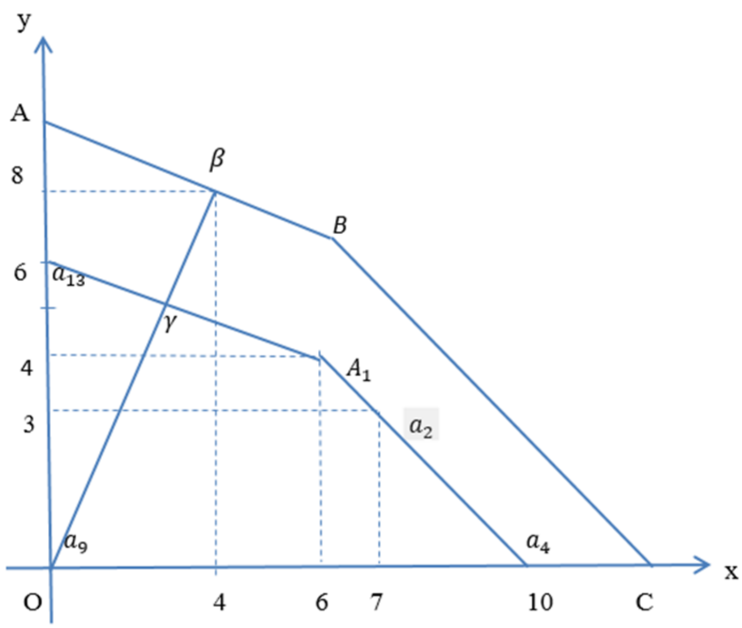
განსაზღვრების თანახმად, ჩვენ მიერ განხილულ ამოცანაში აგურების დატვირთვის შესახებ მიღწევადობის A_1 სიმრავლე შედგება ყველა შესაძლო წერტილისგან $t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_{13}a_{13}$ $(t_1+t_2+\cdots+t_{13}=1)$. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, A_1 შედგება a_1, a_2, $\cdots$, a_{13} წერტილების ყველა შესაძლო ამოზნექილი კომბინაციისგან. დამტკიცებული თეორემის თანახმად:

$$A_1=\mathrm{Conv}\{a_1,a_2,\cdots,a_{13}\}.$$

შემდეგი ნახაზიდან ჩანს, რომ A_1 შედგება $a_1a_4a_9a_{13}$ ამოზნექილი ოთხკუთხედის წერტილებისგან (a_2 წერტილი მდებარეობს a_1a_4 წრფეზე).



ვიპოვოთ t-ს უმცირესი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $A_t=tA_1$ სიმრავლე შეიცავს $\beta(4,8)$ წერტილს. ამ მიზნით ავაგოთ A_t სიმრავლე. გავითვალისწინოთ, რომ A_t სიმრავლე A_1 სიმრავლის ჰომოთეტურია ჰომოთეტიის t კოეფიციენტითა და ჰომოთეტიის ცენტრით კოორდინატთა სათავეში.



ამოზნექილი *ABCO* ოთხკუთხედი არის A_t სიმრავლე.

გამოვთვალოთ $a_9\beta$ და $a_{13}a_1$ წრფეების გადაკვეთის γ წერტილის კოორდინატები. დავწეროთ ამ წრფეების განტოლებები. ადვილად შეიძლება ამ განტოლებების ჩაწერა:

$a_{13}a_1$ წრფის განტოლებაა: $y=-\frac{1}{3}x+6$,

$a_9\beta$ წრფის განტოლებაა: $y=2x$.

ამრიგად, γ წერტილის კოორდინატები შემდეგ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამონახსნია:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{3}x + 6, \\ y = 2x. \end{cases}$$

თუ ამოვხსნით ამ განტოლებათა სისტემას, მივიღებთ $x = 2\frac{4}{7}$, $y = 5\frac{1}{7}$. ამრიგად, γ წერტილის კოორდინატებია: $\left\{2\frac{4}{7}, 5\frac{1}{7}\right\}$.

t-ს საძიებელი მინიმალური მნიშვნელობა ტოლი იქნება შემდეგი სიდიდის:

$$t = \frac{|a_9\beta|}{|a_9\gamma|} = \frac{\sqrt{4^2 + 8^2}}{\sqrt{\left(2\frac{4}{7}\right)^2 + \left(5\frac{1}{7}\right)^2}} = \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{\frac{1620}{81}}} = \frac{14}{9} = 1\frac{5}{9}.$$

ე.ი. უმცირესი დრო, რომელიც საჭიროა ორივე საწყობიდან აგურების დატვირთვისათვის, შეადგენს $1\frac{5}{9}$ საათს.

ახლა შევადგინოთ აგურების დატვირთვის განრიგი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს დატვირთვა დავამთავროთ $1\frac{5}{9}$ საათის განმავლობაში. რადგან γ მდებარეობს $a_{13}a_1$ მონაკვეთზე, ამიტომ ყველა $t_i = 0$, გარდა t_1-ისა და t_{13}-ისა (γ წერტილი შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც t_1 და t_{13} წერტილების ამოზნექილი კომბინაცია): $t_1a_1 + t_{13}a_{13} = \gamma$.

ამრიგად, t_1 და t_{13} შეიძლება გამოვთვალოთ „ვექტორული" განტოლების საშუალებით, რომელიც შეიძლება გადავწეროთ კოორდინატული სახით:

$$\begin{cases} 6t_1 + 0 \cdot t_{13} = 2\dfrac{4}{7}, \\ 4t_1 + 6t_3 = 5\dfrac{1}{7}. \end{cases}$$

განტოლებათა ამ სისტემიდან შეიძლება ვიპოვოთ t_1-ისა და t_2-ის მნიშვნელობები:

$$t_1 = \frac{3}{7}, \qquad t_3 = \frac{4}{7}.$$

ამრიგად, ოპტიმალური გეგმის პირობებში, a_1 რეჟიმი უნდა ვამუშავოთ $t \cdot t_1 = \frac{2}{3}$ საათის განმავლობაში, ხოლო a_{13} რეჟიმი კი — $t \cdot t_{13} = \frac{8}{9}$ საათის განმავლობაში. ამ პირობებში მთელი სამუშაო შესრულდება:

$$\frac{8}{9}\text{სთ} + \frac{2}{3}\text{სთ} = \frac{14}{9}\text{სთ} = 1\frac{5}{9} \text{ საათში.}$$

მენეჯერის მიერ 1^0-ში შედგენილი დატვირთვის გეგმის შესრულება მოითხოვდა $1\frac{11}{15}$ საათს, რაც ჩვენ მიერ მიღებულ დროს $1\frac{4}{35}$-ჯერ აღემატება.

დასკვნა. როგორც ვხედავთ, მენეჯერის არაგეომეტრიული ამოცანის (ამოცანა აგურების დატვირთვის შესახებ) განხილვამ მიგვიყვანა სიბრტყეში ამოზნექილი გეომეტრიული ფიგურების შესწავლამდე.

შევნიშნოთ, რომ ჩვენ მიერ განხილული მენეჯერის ამოცანა შეიძლება ამოიხსნას წრფივი დაპროგრამების მეთოდების საშუალებითაც. თუმცა ამ შემთხვევაშიც, მართალია, არაცხადად, მაგრამ საქმე გვექნება ამოზნექილ სიმრავლეებთან.

ლიტერატურა:

1. H.Nikaido, Convex Structures and Economic Theory, Academic Press, New York and London, 1968 (Х.Никайдо, Выпуклые структуры и математическая экономика, Изд. Мир, Москва, 1972);
2. В.Левитина, Как математик помог бригадиру // „Квант", 1977 – №11, стр. 40-43.

ინფექციის გავრცელების მათემატიკური მოდელი

ზაზა თევდორაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი. თსუ-ის ეკონომიკის უმაღლესი სკოლის პროფესორი. შეფასებისა და გამოცდების ცენტრის მათემატიკის ჯგუფის ხელმძღვანელი.

ინფექციის წარმოშობის და გავრცელების მოდელების შესწავლის აუცილებლობა გაჩნდა მრავალი წლის წინ. მე-17 საუკუნეში ჯონ გრანტი იყო პირველი ეპიდემიოლოგი, რომელმაც დაიწყო ეპიდემიით გარდაცვლილთა რაოდენობრივი სისტემატიზაცია. დანიელ ბერნული იყო პირველი მათემატიკოსი, რომელმაც 1760 წელს შექმნა ნატურალური ყვავილის ვირუსის (Smallpox virus) მათემატიკური მოდელი. 1927 წელს ნობელის პრემიის ლაურეატმა — სერ რონალდ როსმა, ვილიამ ჰამერმა და სხვ. შექმნეს ინფექციის გავრცელების SIR მოდელი, რომელმაც შემდგომ დიდი გავლენა მოახდინა მათემატიკური ეპიდემიოლოგიური მიმართულების განვითარებაზე.

ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ მოდიფიცირებულ SIR მოდელს. კერძოდ, დიფერენციალური განტოლებების კოეფიციენტები იქნებიან არა მუდმივები, არამედ საფეხურა ფუნქციები.

სერ რონალდ როსი (1857-1932) ბრიტანელი მეცნიერი; ნობელის პრემიის ლაურეატი ფიზიოლოგიაში და მედიცინაში —1902 წელი.

1. მოდელის აგება

მოდელში ერთადერთი დამოუკიდებელი ცვლადი არის t — დრო.

ქვეყანაში მოსახლეობის რაოდენობას გავუკეთოთ ნორმირება და ვიგულისხმოთ, რომ 1-ის ტოლია. სიმარტივისათვის ასევე ვიგულისხმოთ, რომ დროის იმ შუალედში, რომელიც განიხილება მოდელში, ადამიანები არ იბადებიან, არ კვდებიან ინფექციის გარეშე და მიგრაციას არ აქვს ადგილი. დროის ნებისმიერ მომენტში ცოცხალი და გარდაცვლილი ადამიანების ჯამური რაოდენობა მუდმივია (1-ის ტოლია).

შემოვიტანოთ დროზე დამოკიდებული შემდეგი ცვლადები:

$S(t)$ — აღნიშნავს დროის t მომენტში ჯანმრთელი მოსახლეობის რაოდენობას, რომელთაც ამ ინფექციის მიმართ არ აქვთ იმუნიტეტი გამომუშავებული და ექვემდებარებიან ინფიცირებას.

$I(t)$ — აღნიშნავს დროის t მომენტში ინფიცირებული მოსახლეობის რაოდენობას. ისინი არიან ვირუსის გადამტანები S კლასის ადამიანებში.

$R(t)$ — აღნიშნავს დროის t მომენტში ინფიცირებისაგან თავისუფალი ადამიანების რაოდენობას, რომლებიც არ არიან ვირუსის გამავრცელებლები და არ ექვემდებარებიან ინფიცირებას. ამ კლასში შედიან: გამოჯანმრთელებული, ვირუსისადმი იმუნიტეტშეძენილი ადამიანები; ინფიცირებული, მაგრამ იზოლირებული ადამიანები, რომლებიც ვერ გაავრცელებენ ინფექციას და ბოლოს ინფექციისგან გარდაცვლილი ადამიანები.

ცხადია, რომ:

$$S(t)+I(t)+R(t)=1\,. \tag{1}$$

მოდელის გამარტივების მიზნით, ვიგულისხმოთ, რომ ინფიცირებული ადამიანები ერთგვაროვნად არიან განაწილებულები მოსახლეობაში და ერთი ინფიცირებული დროის t მომენტში საშუალოდ აინფიცირებს $a(t)$ ადამიანს $S(t)$ კლასიდან, სადაც a არაუარყოფითი მარჯვნიდან უწყვეტი საფეხურა ფუნქციაა.

$b(t)$-თი აღვნიშნოთ დროის t მომენტში საშუალოდ ერთი ადამიანის I კლასიდან R კლასში გადასვლის სიჩქარე, სადაც b ასევე არის მარჯვნიდან უწყვეტი არაუარყოფითი საფეხურა ფუნქცია. შევნიშნოთ, რომ b ფუნქციაში ლოკალიზებულია როგორც გამოჯანმრთელების და ინფიცირებულის იზოლირების, ისე გარდაცვალების ფაქტორები.

განვიხილოთ დროითი ღერძის $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n<\ldots$ დანაწილება, რომლის შესაბამისადაც ზემოთ აღწერილი საფეხურა ფუნქციები ნახტომისებურად იცვლიან მნიშვნელობებს, კერძოდ: $a=\sum_{i=0}^{\infty} a_i\cdot \Im_{[t_i,\,t_{i+1})}$, $a_i\in\mathbb{R}$ და $b=\sum_{i=0}^{\infty} b_i\cdot \Im_{[t_i,\,t_{i+1})}$, $b_i\in\mathbb{R}$, სადაც $\Im_{[t_i,\,t_{i+1})}$ წარმოადგენს $[t_i,t_{i+1})$ ინტერვალის მახასიათებელ ფუნქციას $\Im_{[t_i,\,t_{i+1})}(t)=\begin{cases}1, & \text{თუ } t\in[t_i,t_{i+1})\\ 0, & \text{თუ } t\notin[t_i,t_{i+1})\end{cases}$.

აღნიშნული დაშვებები საშუალებას გვაძლევს შევადგინოთ ვირუსის გავრცელების მათემატიკური მოდელი შემდეგი სამი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის და საწყისი პირობების სახით:

$$\frac{dS(t)}{dt}=-a(t)\cdot S(t)\cdot I(t)\,. \tag{2}$$

(აქ მინუსი ნიშანი გამოხატავს იმ ფაქტს, რომ S ფუნქცია დროის მიხედვით კლებადი ფუნქციაა).

$$\frac{dI(t)}{dt}=a(t)\cdot I(t)\cdot S(t)-b(t)\cdot I(t)\,, \tag{3}$$

$$\frac{dR(t)}{dt}=b(t)\cdot I(t)\,. \tag{4}$$

$$S(t_0)=S_0,\, I(t_0)=I_0,\, R(t_0)=R_0\,. \tag{5}$$

აღნიშნულ სისტემაში მდგომარეობის ცვლადებია S, I და R, ხოლო a და b პარამეტრებია, რომელთა მნიშვნელობები დაკვირვებით დგინდება.

(2), (3) და (4) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნები (5) საწყისი პირობებით წარმოადგენს უწყვეტ, უბან-უბან გლუვ ფუნქციებს. ამონახსნებს ვაგებთ თანმიმდევრობით $[t_i,t_{i+1})$ ინტერვალებში, $i=0,1,2,\ldots$. $[t_i,t_{i+1})$ ინტერვალში აგებული ამონახსნები აღვნიშნოთ, შესაბამისად, S^i, I^i და R^i სიმბოლოებით (ეს ფუნქციები წარმოადგენენ S, I და R ფუნქციების შეზღუდვებს $[t_i,t_{i+1})$ ინტერვალზე).

$[t_{i+1}, t_{i+2})$ ინტერვალში ამონახსნებს ვეძებთ საწყისი პირობებით:

$$S^{i+1}(t_{i+1}) = \lim_{t \to t_{i+1}-} S^i(t),\ I^{i+1}(t_{i+1}) = \lim_{t \to t_{i+1}-} I^i(t),\ R^{i+1}(t_{i+1}) = \lim_{t \to t_{i+1}-} R^i(t)\ . \qquad (6)$$

შედეგად მივიღებთ უბან-უბან გლუვ, უწყვეტ S, I და R ამონახსნებს, რომელთაც, საზოგადოდ, შესაძლოა ჰქონდეთ კუთხის წერტილები $t_1, t_2, \ldots, t_n \ldots$ წერტილებში.

(2), (3) და (4) დიფერენციალური განტოლებების სისტემა (5) საწყისი პირობებით წარმოადგენს ვირუსის გავრცელების მოდელს, რომლის ანალიზი საშუალებას გვაძლევს ვუპასუხოთ შემდეგ უმნიშვნელოვანეს კითხვებს:

1) დავუშვათ, საწყის ეტაპზე მოსახლეობის უდიდესი ნაწილი ეკუთვნის S კლასს და მხოლოდ მცირე ჯგუფია ინფიცირებული, ანუ ეკუთვნის I კლასს.
   ამ სასტარტო პირობების დროს როგორ განვითარდება ინფექცია? გადაიქცევა ის დიდ ეპიდემიად, თუ სწრაფად ჩაქრება?
2) თუ ისე განვითარდა ინფიცირების დინამიკა, რომ ინფექცია ეპიდემიად ჩამოყალიბდა, რა ბედი ეწევა S კლასს? S კლასი ხომ არ გარდაიქმნება ცარიელ სიმრავლედ?
3) რამდენად ხანგრძლივი დროის განმავლობაში გასტანს ეპიდემია?

2. მოდელის თვისობრივი ანალიზი

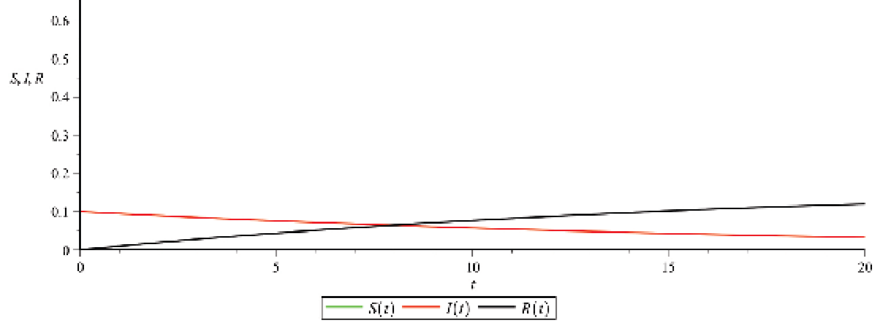
ქვემოთ მოცემული გამოთვლები და გრაფიკები შესრულებულია მათემატიკური პროგრამა Maple-ის საშუალებით.

(2), (3) და (4) განტოლებათა სისტემის ზუსტი ამონახსნების პოვნა რთულია, თუმცა თვისობრივი ანალიზის ჩასატარებლად არც გვჭირდება მათი ცოდნა, მიახლოებით ამონახსნებს კი ავაგებთ Maple-ის საშუალებით.

თუ დავაკვირდებით (3) განტოლებას, ნათელია, რომ, თუ $a_0 S_0 < b_0$, მაშინ $I(t)$ კლებადია, ანუ ინფექცია არ ვითარდება და ქრება. მაგრამ, თუ $a_0 S_0 > b_0$, მაშინ $I(t)$ ზრდადია $t = 0$-ის მიდამოში, ანუ ინფექცია იკრებს ძალას.

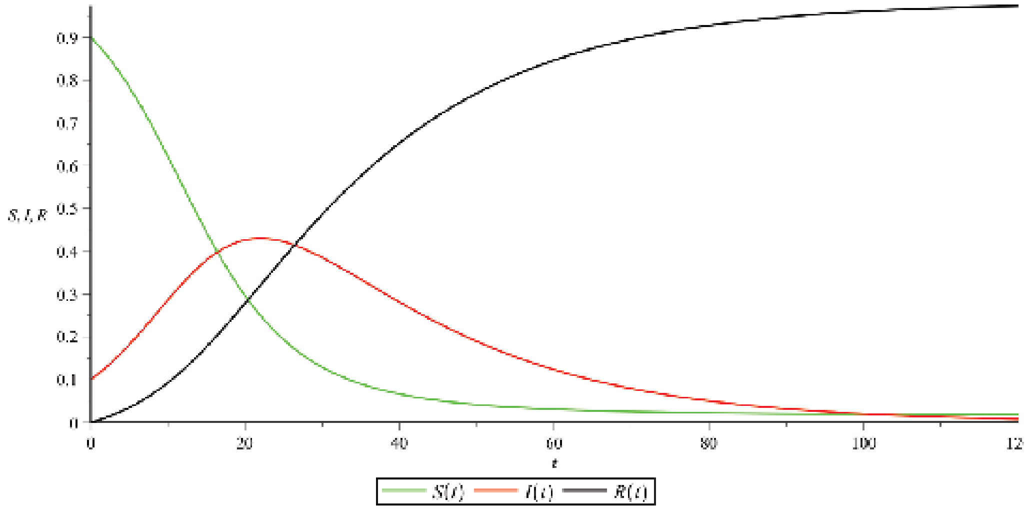
ეს სურათები გრაფიკულად შემდეგნაირად გამოისახება. ქვემოთ მწვანე წირი არის $S(t)$ ფუნქციის გრაფიკი, წითელი წირი წარმოადგენს $I(t)$ ფუნქციის გრაფიკს, ხოლო შავი წირი — $R(t)$ ფუნქციის გრაფიკს. წირები აგებულია პირველ დროით ინტერვალში $[t_0, t_1)$.

ა) როდესაც $S_0 = 0.9$, $I_0 = 0.1$, $b_0 = 0.1, a_0 = 0.05$, ცხადია შესრულებულია პირობა $a_0 S_0 < b_0$ და ინტეგრალურ წირებს აქვთ სურათ 1-ზე გამოსახული სახე. როგორც სურათიდან ჩანს, ამ დროს ინფექცია არ ვითარდება და ქრება.



სურათი 1

ბ) როდესაც $S_0 = 0.9$, $I_0 = 0.1$, $b_0 = 0.05, a_0 = 0.2$, ცხადია შესრულებულია პირობა $a_0 S_0 > b_0$ და ინტეგრალურ წირებს აქვთ სურათ 2-ზე გამოსახული სახე.



სურათი 2

ამ დროს, როგორც ვხედავთ, ინფექცია ჯერ ძალას იკრებს ექსპოტენციალურად, გარკვეული დროის შემდეგ აღწევს მაქსიმუმს და შემდეგ ასევე სწრაფად ხდება კლებადი. როგორც სურათიდან ჩანს, ამ დროს თითქმის ყველა ადამიანს შეეხო ინფექცია.

ჩვენი მოდელის ერთ-ერთ პირველ ინტეგრალს წარმოადგენს ფუნქცია:

$$f(S,I,R) = S + I + R, \tag{7}$$

რადგან სისტემაში შემავალი განტოლებებიდან ნათელია, რომ $\frac{d}{dt} f(S(t), I(t), R(t)) = 0$. ეს პირველი ინტეგრალი სისტემას დაიყვანს ორ — S და I ცვლადებზე.

(2), (3) განტოლებებიდან ვღებულობთ განტოლებას:

$$\frac{dI}{dS} = \frac{b(t)}{a(t)S} - 1.$$

ამ განტოლებიდან ვღებულობთ $[t_i, t_{i+1})$ ინტერვალზე რედუცირებული სისტემის ინტეგრალურ წირს: $I^i = \frac{b_i}{a_i} \ln\left(S^i\right) - S^i + C_i$, სადაც $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots$.

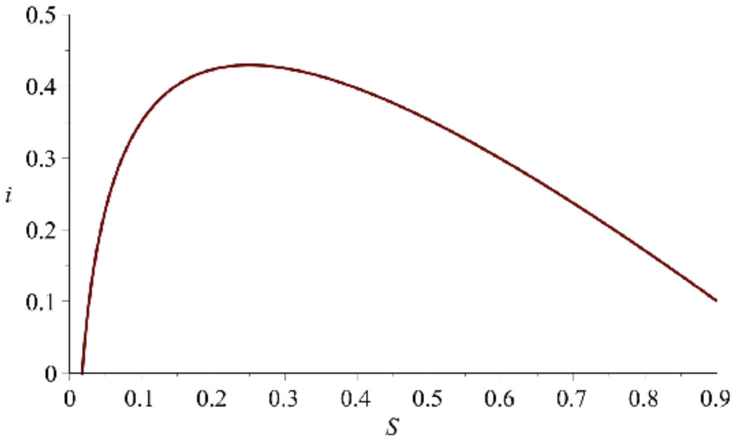
საწყის $t = 0$ მომენტში ჩვენთვის ცნობილია სიდიდეები: $I(0) = I_0$ და $S(0) = S_0$, რომელიც საშუალებას გვაძლევს დავწეროთ ამონახსნი ზემოთ აღნიშნული მეთოდის საშუალებით:

$$I^i = \frac{b_i}{a_i} \ln\left(\frac{S^i}{S(t_i)}\right) - \left(S^i - S(t_i)\right) + I(t_i),\ i = 0, 1, 2, \dots . \tag{8}$$

მიუხედავად იმისა, რომ (8) განტოლებები ტრანსცენდენტულია და ჩვენ მათ ზუსტად ვერ ამოვხსნით (ამონახსნის ჩაწერა შესაძლებელია ე.წ. ლამბერტის W ფუნქციების საშუალებით), ისინი გვაძლევენ საკმარის ინფორმაციას დინამიკის შესახებ თვისობრივი დასკვნების გასაკეთებლად.

მოდით, ახლა განვიხილოთ ინტეგრალური წირი (S, I) საკოორდინატო სიბრტყეზე.

როდესაც b და a ფუნქციები მუდმივებია, კერძოდ განვიხილოთ პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობები: $b_0 = 0.05,\ a_0 = 0.2$, $I_0 = 0.1$ და $S_0 = 0.9$. იტეგრალურ წირს აქვს შემდეგი სახე:



სურათი 3

ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე, ჩვენ ამ წირს განვიხილავთ პირველ საკოორდინატო მეოთხედში.

(2) განტოლებიდან გამომდინარე, $S(t)$ დროის მიმართ კლებადი ფუნქციაა, ამიტომ ინტეგრალურ წირზე მოძრაობა წარმოებს მარჯვნიდან მარცხნივ. წონასწორობის წერტილების წრფეა $I = 0$ წრფე.

ფაზური სურათი საშუალებას გვაძლევს გავაკეთოთ ორი მნიშვნელოვანი დასკვნა: როგორი საწყისი პოზიციაც არ უნდა გააჩნდეს სისტემას (მაგალითად, სისტემას ვაკვირდებით t_i მომენტიდან):

1) ინფექცია, საბოლოო ჯამში, მიისწრაფვის ჩაქრობისაკენ $I(t) \to 0$, როდესაც $t \to \infty$ და

2) S სიმრავლე ცარიელი ვერასოდეს გახდება, ე.ი. $S(t)$ მიისწრაფვის დადებითი წონასწორობის წერტილისაკენ, როდესაც $t \to \infty$.

თუ გვინდა გავიგოთ, ზუსტად რომელი წერტილისაკენ მიისწრაფვის $S(t)$, უნდა ამოვხსნათ განტოლება:

$$\frac{b_0}{a_0}\ln\left(\frac{S}{S_0}\right) - (S - S_0) + I_0 = 0. \qquad (9)$$

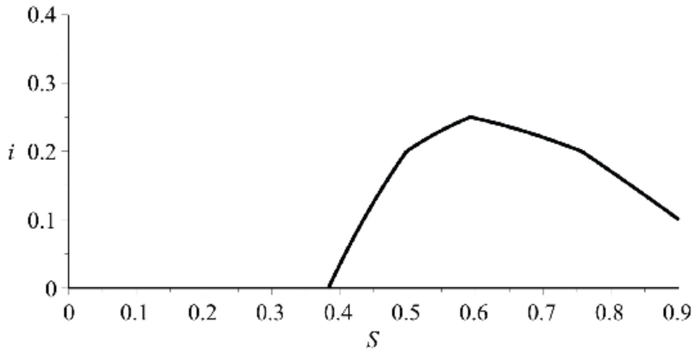
მაგალითი 1. თუ $b_0 = 0.05,\ a_0 = 0.2$, $I_0 = 0.1$ და $S_0 = 0.9$, მაშინ $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0.0178$. ე.ი. ამ პირობებში, საბოლოო ჯამში, მოსახლეობის დაახლოებით 1.78 % დარჩება S კლასში.

ჩვენ მიერ განხილული მოდელი საშუალებას იძლევა „ვმართოთ“ ინფექცია და უფრო სწრაფად მივიდეთ ინფიცირების დაბალ დონემდე.

მაგალითი 2. განვიხილოთ წინა მაგალითში მოცემული საწყისი მნიშვნელობების დროს პარამეტრების მართვის პროცესი და შედეგი შევადაროთ წინა შემთხვევას.

ვთქვათ: $a_0 = 0.2,\ a_1 = 0.12,\ a_2 = 0.07,\ a_3 = 0.02$, $b_0 = 0.05,\ b_1 = 0.08,\ b_2 = 0.12,\ b_3 = 0.2$, $I_0 = 0.1$ და $S_0 = 0.9$.

მაშინ უბან-უბან გლუვ ინტეგრალურ წირს აქვს სურათ 4-ზე გამოსახული სახე და წონასწორობის წერტილში $S = 0.383$. ე.ი. ამჯერად უკვე, მიუხედავად იმავე სასტარტო პირობებისა, მოსახლეობის დაახლოებით 38.3% დარჩა საბოლოოდ S კლასში (არ შეეხო ვირუსი).



სურათი 4

დასკვნა: *ინფექციის ოპტიმალური მართვისათვის საჭიროა ისეთი წესების შემოღება, რომლებიც წარმოშობს a_i კოეფიციენტების კლებად მიმდევრობას და, იმავდროულად, b_i კოეფიციენტების ზრდად (არაკლებადი) მიმდევრობას. მაგალითად, თუ მოსახლეობა დაიცავს ჰიგიენის წესებს, მოახდენს თვითიზოლირებას, ინფიცირებულის იზოლირებას, ე.წ. სოციალურ დისტანცირებას და ა.შ., მივაღწევთ მსგავს შედეგს.*

ეპიდემიის ხანგრძლივობა

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც უკვე ვეღარ ვაუმჯობესებთ a და b პარამეტრებს, ანუ ვეღარ ვამცირებთ a პარამეტრს და ვეღარ ვზრდით b პარამეტრს. რამდენ ხანს გასტანს ინფექცია ამ პირობებში?

(2) და (8) განტოლებებიდან ვღებულობთ განტოლებას:

$$\frac{dS}{dt} = -aS\left(\frac{b}{a}\ln\left(\frac{S}{S_0}\right) - \left(S - S_0\right) + I_0\right), \tag{10}$$

საიდანაც ვღებულობთ:

$$t - t(0) = \int_{S_0}^{S(t)} \frac{ds}{s \cdot \left(-b\ln\left(\frac{s}{S_0}\right) + a\left(s - S_0\right) - aI_0\right)} \,. \tag{11}$$

ფაზური სურათიდან ვიცით, რომ ინფექცია სასრულ დროში აბსოლუტურად არ ჩაქრება. ასევე უნდა შევთანხმდეთ, რას ვეძახით ინფექციის ჩაქრობას. ინფექცია ჩავთვალოთ ჩამქრალად, თუ ის არ აღემატება წინასწარ დასახელებულ მცირე I_1 რიცხვს.

მოვძებნოთ შესაბამისი დროის T პერიოდი, რომელიც საჭიროა ინფექციის ჩასაქრობად.

(8) განტოლებიდან გვაქვს:

$$\frac{b}{a}\ln\left(\frac{S}{S_0}\right) - \left(S - S_0\right) + I_0 = I_1\,, \tag{12}$$

რომელსაც ამოვხსნით მიახლოებით S-ის მიმართ, ანუ ვიპოვით $S_1 = S(T)$-ს.

ინფექციის ჩასაქრობად საჭირო დროის T პერიოდს გამოვთვლით (11) ფორმულის დახმარებით:

$$T = \int_{S_0}^{S_1} \frac{ds}{s \cdot \left(-b\ln\left(\frac{s}{S_0}\right) + a\left(s - S_0\right) - aI_0\right)} \,. \tag{13}$$

თუ განვიხილავთ მაგალით 1-ში მოცემულ პირობებს: $b_0 = 0.05,\ a_0 = 0.2$, $I_0 = 0.1$, $S_0 = 0.9$ და $I_1 = 0.01$, მაშინ ზემოთ აღწერილი სქემით ჩატარებული გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ $T \approx 115$ დროის ერთეულს.

თუ დინამიკა იცვლება მაგალით 2-ში აღწერილი სქემის მიხედვით, ე.ი., თუ $a_0 = 0.2,\ a_1 = 0.12,\ a_2 = 0.07,\ a_3 = 0.02$, $b_0 = 0.05,\ b_1 = 0.08,\ b_2 = 0.12,\ b_3 = 0.2$, $I_0 = 0.1$, $S_0 = 0.9$ და $I_0 = 0.01$, მაშინ ინფექციის ჩასაქრობად საჭირო T დრო ტოლია 82 დროის ერთეულის.

ავტორის ელექტრონული მისამართი: *z.tevdoradze@iset.ge*

ალგებრის ძირითადი თეორემა და წრფივი ალგებრა

ბაჩუკი მესაბლიშვილი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასოცირებული პროფესორი; თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მათემატიკის დეპარტამენტი

ალგებრის ძირითადი თეორემა ამტკიცებს, რომ ნებისმიერ n-ური ხარისხის ($n \geq 1$) კომპლექსურკოეფიციენტებიან მრავალწევრს აქვს ერთი მაინც, საზოგადოდ, კომპლექსური ფესვი. ეს თეორემა წარმოადგენს ერთ-ერთ უდიდეს მიღწევას მათემატიკაში და აქვს მრავლი მნიშვნელოვანი გამოყენება მათემატიკის სრულიად განსხვავებულ დარგებში. მისი პირველი ფართოდ აღიარებული დამტკიცება ეკუთვნის ცნობილ გერმანელ მათემატიკოს კარლ ფრიდრიხ გაუსს (Johann Carl Friedrich Gauss). გაუსის ეს დამტკიცება მოცემულია მის 1799 წელს გამოქვეყნებულ დისერტაციაში. გაუსის დამტკიცება შეიცავდა ხარვეზებს, რომლებიც აღმოიფხვრა 1814 წელს ჟან-რობერტ არგანის (Jean-Robert Argand) მიერ გამოქვეყნებულ ალგებრის ძირითადი თეორემის მკაცრ მათემატიკურ დამტკიცებაში. ამას შემდეგ მოჰყვა კიდევ მრავალი სხვა, მათ შორის გაუსის სამი ახალი დამტკიცება.

ალგებრის ძირითადი თეორემის არსებული დამტკიცებები პირობითად შეიძლება დაიყოს სამ კატეგორიად (იხ., მაგ., [1]). პირველ კატეგორიას მიაკუთვნებენ ე.წ. *ტოპოლოგიურ დამტკიცებებს;* ასეთი დამტკიცებები ეყრდნობა ტოპოლოგიურ ცნებებს (ისეთს, როგორიცაა მაგალითად, $\mathbb{R}^2$-ში წირის 0-ს გარშემო შემოვლებების რაოდენობა). გაუსის დამტკიცება შეიძლება ჩაითვალოს ამ კატეგორიის დამტკიცებად. შემდეგი კატეგორია შედგება *ანალიზური დამტკიცებებისაგან,* რომლებიც ეფუძნება ლიუვილის (Joseph Liouville) ცნობილ თეორემას, რომელიც ამტკიცებს, რომ კომპლექსურ სიბრტყეზე განსაზღვრული ნებისმიერი მთელი შემოსაზღვრული ფუნქცია მუდმივია.

დაბოლოს, მესამე კატეგორიას ეკუთვნის *ალგებრული დამტკიცებები,* რომლებიც ძირითადად იყენებს ორ ფაქტს: ა) კენტი ხარისხის ნამდვილკოეფიციენტებიან პოლინომს ყოველთვის აქვს ერთი მაინც ნამდვილი ფესვი და ბ) ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვიდან შესაძლებელია კვადრატული ფესვის ამოღება.

რადგან ალგებრის ძირითად თეორემას აქვს მნიშვნელოვანი გამოყენება წრფივ ალგებრაში, სასურველი იქნებოდა გვქონოდა მისი დამტკიცება წრფივი ალგებრის ტერმინებში. ამ სტატიაში მოვიყვანთ სწორედ ერთ ასეთ დამტკიცებას, რომელიც ეკუთვნის ჰ. დერკსენს (H. Derksen) [2].

გავიხსენოთ, რომ n-*ური ხარისხის კომპლექსური მრავალწევრი* (ან *პოლინომი*) არის შემდეგი სახის კომპლექსური ფუნქცია:

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n, \qquad (1)$$

სადაც $a_1, a_2, \ldots, a_n$ კომპლექსური რიცხვებია, ხოლო n კი — ნატურალური რიცხვი, რომელსაც $P(z)$ პოლინომის *ხარისხი* ეწოდება. გავიხსენოთ აგრეთვე, რომ $P(z)$ *მრავალწევრის ფესვი* ეწოდება ისეთ კომპლექსურ z_0 რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება $P(z_0) = 0$ ტოლობა.

თუ F რაიმე ფიქსირებული ველია, ხოლო $n \geq 1$ კი — ნატურალური რიცხვი, მაშინ $\mathcal{M}_n(\mathrm{F})$ სიმბოლოთი აღინიშნება F ველზე განსაზღვრული ყველა n-ური რიგის კვადრატულ მატრიცათა რგოლი.

$P(z)$ მრავალწევრის კოეფიციენტებისაგან შევადგინოთ შემდეგი n-ური რიგის მატრიცა:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots 0 & -a_{n-2} \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

n-ის მიმართ ინდუქციით მტკიცდება, რომ:

$$P(z) = \det(I_n z - \mathrm{A}).$$

აქედან მიიღება, რომ ალგებრის ძირითადი თეორემა ეკვივალენტურია შემდეგი თეორემის.

თეორემა 1. *ყოველი $n \geq 1$ ნატურალური რიცხვისათვის, ნებისმიერ $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ მატრიცას გააჩნია საკუთრივი ვექტორი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, კომპლექსური წრფივი სივრცის ყოველ წრფივ გარდაქმნას საკუთრივი ვექტორი გააჩნია.*

ამ თეორემის დასამტკიცებლად დაგვჭირდება ორი ლემა.

ლემა1. *კენტი ხარისხის ნებისმიერ ნამდვილკოეფიციენტებიან მრავალწევრს აქვს ერთი მაინც ნამდვილი ფესვი.*

დამტკიცება. ვთქვათ, $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ ნებისმიერი ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრია, რომლის ხარისხი (ე.ი. n) კენტია. მტკიცდება, რომ $P(a) > 0$ და $P(-a) < 0$, სადაც $a = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$, საიდანაც საშუალო მნიშვნელობის თეორემის გამოყენებით მიიღება, რომ არსებობს ისეთი $x_0 \in [-a, a]$, სადაც $P(x_0) = 0$.

ლემა 2. *ვთქვათ,* F *რაიმე ფიქსირებული ველი, ხოლო $m \geq 1$ კი ნატურალური რიცხვია. დავუშვათ, რომ ნებისმიერი სასრულგანზომილებიანი F-წრფივი სივრცისათვის, რომლის განზომილება არ იყოფა m-ზე, მასზე განსაზღვრულ ნებისმიერ წრფივ ენდოგარდაქმნას გააჩნია საკუთრივი ვექტორი. მაშინ ასეთი წრფივი სივრცის ნებისმიერ ორ კომუტირებად[1] წრფივ ენდოგარდაქმნას გააჩნია საერთო საკუთრივი ვექტორი.*

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემული ვექტორული წრფივი სივრცის განზომილება F ველის მიმართ არის d. ლემის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი d-ს მიმართ. $d = 1$ შემთხვევა ტრივიალურია, რადგან ერთგანზომილებიანი F-წრფივი სივრცის ნებისმიერი წრფივი ენდოგარდაქმნა მოიცემა ამ სივრცის რაიმე ფიქსირებული ვექტორის სკალარებზე გამრავლებით (ცხადია, ორი ასეთი წრფივი ასახვა ყოველთვის კომუტირებს) და ამიტომ ნებისმიერი არანულოვანი ვექტორი არის ამ ვექტორით განსაზღვრული წრფივი გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორი.

დავუშვათ ახლა, რომ $d > 1$, d არ იყოფა m-ზე და რომ ლემა სამართლიანია d-ზე ნაკლები განზომილების ყველა იმ F-წრფივი სივრცისათვის, რომელთა განზომილება არ იყოფა m-ზე. ვთქვათ, A_1 და A_2 არის d-განზომილებიანი F-წრფივი V სივრცის ორი კომუტირებადი წრფივი ენდოგარდაქმნა. რადგან d არ იყოფა m-ზე, ლემის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ A_1-ს გააჩნია საკუთრივი მნიშვნელობა. აღვნიშნოთ ის λ-თი. განვიხილოთ V-ს შემდეგი ქვესივრცეები:

$$U = \mathrm{im}(A_1 - \lambda I_V) \text{ და } W = \ker(A_1 - \lambda I_V).$$

შევნიშნოთ, რომ U და W, ორივე არის *სტაბილური* A_1-ის მიმართ (რაც ნიშნავს, რომ, თუ $u \in U$, მაშინ $A_1(u) \in U$ და თუ $w \in W$, მაშინ $A_1(w) \in W$) და რომ $\dim_{\mathrm{F}}(W) \geq 1$, რადგან λ არის A_1-ს საკუთრივი მნიშვნელობა. გარდა ამისა, რადგან დაშვებით A_1 და A_2 კომუტირებს, U და W, ორივე სტაბილურია A_2-ის მიმართაც. მართლაც, მაგალითად, თუ $u \in U$, მაშინ $u = A_1(v) - \lambda v$ რაიმე $v \in V$ ვექტორისათვის და ამიტომ გვექნება:

$$A_2(u) = A_2\big(A_1(v)\big) - A_2(\lambda v) =$$

$$= A_1\big(A_2(v)\big) - \lambda A_2(v) = (A_1 - \lambda I_V)\big(A_2(v)\big),$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $A_2(u) \in U$. ახლა, რადგან

$$\dim_{\mathrm{F}}(U) + \dim_{\mathrm{F}}(W) = d$$

[1] ორ – L_1 და L_2 წრფივ ენდოგარდაქმნას ეწოდება *კომუტირებადი*, თუ $L_1 L_2 = L_2 L_1$.

არ იყოფა m-ზე, ან $\dim_F(U)$ არ იყოფა m-ზე, ან $\dim_F(W)$. თუ U და W ქვესივრცეებიდან ის, რომლის განზომილება არ იყოფა m-ზე, არის V-ს საკუთრივი ქვესივრცე, მაშინ, ინდუქციის დაშვების თანახმად, A_1 და A_2-ს გააჩნია საერთო საკუთრივი ვექტორი ამ ქვესივრცეში (და, მაშასადამე, V-შიც); ხოლო, თუ U და W ქვესივრცეებიდან ერთ-ერთი ემთხვევა V-ს, მაშინ მეორე იქნება ნულოვანი ქვესივრცე (რადგან მათი განზომილებების ჯამი F-ზე d-ს ტოლია). რადგან $\dim_F(W) \geq 1$, ამიტომ $W = V$, რაც ნიშნავს, რომ V-ს ნებისმიერი ვექტორი არის A_1-ის საკუთრივი ვექტორი, რომელთაგან ერთ-ერთი იქნება A_2-ის საკუთრივი ვექტორი, რადგან V-ს განზომილება არ იყოფა m-ზე.

შედეგი 1. *კენტი განზომილების ნამდვილი წრფივი სივრცის ნებისმიერ ორ კომუტირებად წრფივ ენდოგარდაქმნას გააჩნია საერთო საკუთრივი ვექტორი.*

დამტკიცება. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ კენტი განზომილების ნამდვილი წრფივი სივრცის ნებისმიერ წრფივ ენდოგარდაქმნას გააჩნია საკუთრივი ვექტორი, რადგან ამ გარდაქმნის მახასიათებელი მრავალწევრი კენტი ხარისხისაა და, მაშასადამე, ლემა 1-ის ძალით, მას აქვს ერთი მაინც ნამდვილი ფესვი, რომელიც წარმოადგენს მოცემული წრფივი გარდაქმნის ნამდვილ საკუთრივ რიცხვს. ცხადია, ეს საკუთრივი რიცხვი იძლევა ნამდვილ საკუთრივ ვექტორს. ახლა თუ გამოვიყენებთ ლემა 2-ს $F = \mathbb{R}$ და $m = 2$ შემთხვევისათვის, მივიღებთ დასამტკიცებელს.

შენიშვნა. ლემა 2 და შედეგი 1-დან ის კი არ გამომდინარეობს, რომ ორ კომუტირებად წრფივ ენდოგარდაქმნას აქვს საერთო საკუთრივი რიცხვი, არამედ მხოლოდ ის, რომ ასეთ გარდაქმნებს აქვთ საერთო საკუთრივი ვექტორი. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ასეთი მაგალითი. ვთქვათ, $\mathbb{R}^3$-ზე წრფივი გარდაქმნები მოცემულია შემდეგი მატრიცებით:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ და } A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $A_1A_2 = A_2A_1$. ამიტომ არსებობს A_1 და A_2-ის (შესაბამისი წრფივი გარდაქმნების) საერთო საკუთრივი ვექტორი. ერთი ასეთი ვექტორია:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

რომლის შესაბამისი საკუთრივი რიცხვი A_1-თვის არის 1, ხოლო A_2-სათვის კი -3.

ახლა უკვე შეგვიძლია დავამტკიცოთ თეორემა 1.

თეორემა 1-ის დამტკიცება. ვთქვათ, $n = 2^k m$, სადაც $k \geq 0$, ხოლო m კი კენტია. თეორემის დასამტკიცებლად უნდა ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერ $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_\mathrm{n}(\mathbb{C})$ მატრიცას გააჩნია საკუთრივი ვექტორი. ამ ფაქტის დასამტკიცებლად ვიყენებთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდს k-ს მიმართ. დავაფიქსიროთ $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_\mathrm{n}(\mathbb{C})$ მატრიცა. ვიწყებთ $k = 0$ შემთხვევით. თუ $k = 0$, მაშინ $n = m$ და ამიტომ n კენტი ნატურალური რიცხვია. ახლა განვიხილოთ სიმრავლე:

$$\mathcal{H}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \colon M^* = M\},$$

სადაც $M^* = (\bar{M})^T$ არის M მატრიცის კომპლექსურად შეუღლებული მატრიცის ტრანსპონირებული (ე.ი. $m^*_{ij} = \bar{m}_{ji}$) . როგორც ცნობილია, მატრიცებს $\mathcal{H}_n$ სიმრავლიდან *ერმიტული* მატრიცები ეწოდება. ასევე ცნობილია, რომ $\mathcal{H}_n$ არის სასრულგანზომილებიანი წრფივი სივრცე $\mathbb{R}$-ის მიმართ და რომ $\dim_\mathbb{R}(\mathcal{H}_n) = n^2$. კერძოდ, $\dim_\mathbb{R}(\mathcal{H}_n)$ კენტია.

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ მატრიცა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$C = \frac{C + C^*}{2} + i\,\frac{C - C^*}{2i}$$

და რომ ორივე, $\frac{C+C^*}{2}$ და $\frac{C-C^*}{2i}$, მატრიცა ერმიტულია. განვიხილოთ ის კერძო შემთხვევა, სადაც $C = AB$ რაიმე $B \in \mathcal{H}_\mathrm{n}(\mathbb{C})$ მატრიცისათვის, მაშინ:

$$AB = \frac{AB + (AB)^*}{2} + i\,\frac{AB - (AB)^*}{2i}.$$

ეს ტოლობა, იმის გათვალისწინებით, რომ $(AB)^* = B^*A^*$ და რომ B ერმიტულია (ე.ი. რომ $B^* = B$), მიიღებს ასეთ სახეს:

$$AB = \frac{AB + BA^*}{2} + i\,\frac{AB - BA^*}{2i}.$$

განვსაზღვროთ $\mathbb{R}$-წრფივ $\mathcal{H}_n$ სივრცეზე ორი წრფივი, L_1 და L_2, ენდოგარდაქმნა შემდეგნაირად:

$$L_1(B) = \frac{AB+BA^*}{2}, L_2(B) = \frac{AB-BA^*}{2i}.$$

უშუალო შემოწმება გვიჩვენებს, რომ $L_1L_2 = L_2L_1$. აქედან, რადგან $\mathcal{H}_n$ სივრცის გან-

ზომილება $\mathbb{R}$-ზე კენტია, ლემა 2-ის ძალით მიიღება, რომ L_1 და L_2 წრფივ გარდაქმნებს აქვს საერთო საკუთრივი ვექტორი $\mathcal{H}_n$-ში, ანუ არსებობს არანულოვანი მატრიცა $B_0 \in \mathcal{H}_n$ და ნამდვილი რიცხვები $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ისეთი, რომ:

$$L_1(B_0) = \lambda_1 B_0 \text{ და } L_2(B_0) = \lambda_2 B_0.$$

მაშინ:

$$AB_0 = L_1(B_0) + iL_2(B_0) = (\lambda_1 + i\,\lambda_2)B_0.$$

ეს კი ნიშნავს, რომ B_0-ის ნებისმიერი არანულოვანი სვეტი ვექტორი (რომელიც აუცილებლად არსებობს, რადგან B_0 არანულოვანი მატრიცაა) არის A-ს საკუთრივი ვექტორი $\mathbb{C}^n$-ში. მაშასადამე, როდესაც n კენტია, ნებისმიერ $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_\mathrm{n}(\mathbb{C})$ მატრიცას გააჩნია საკუთრივი ვექტორი. ეს ამტკიცებს თეორემა 1-ს $k = 0$ შემთხვევისათვის. შევნიშნოთ, რომ ეს აგრეთვე ამტკიცებს ალგებრის ძირითად თეორემას კენტი n-ებისათვის.

ახლა განვიხილოთ $k \geq 1$ შემთხვევა და დავუშვათ, რომ თეორემა 1 სამართლიანია ყველა $2^d m'$ სახის რიცხვებისათვის, სადაც $d < k$ და m' კენტი ნატურალური რიცხვია. ამ დაშვებაზე დაყრდნობით უნდა ვაჩვენოთ, რომ, თუ $n = 2^k m$, სადაც m კენტი ნატურალური რიცხვია, მაშინ ყოველ $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ მატრიცას გააჩნია საკუთრივი ვექტორი. ამისათვის განვიხილოთ n-ური რიგის სიმეტრიული მატრიცების კომპლექსური წრფივი სივრცე:

$$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_\mathrm{n}(\mathbb{C}) : \mathrm{M} = \mathrm{M}^\mathrm{T}\}.$$

შევნიშნოთ, რომ $\dim_\mathbb{C}\big(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})\big) = \frac{n(n+1)}{2}$. ამიტომ 2-ის უმაღლესი ხარისხი, რომელიც ყოფს $\dim_\mathbb{C}\big(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})\big)$-ს, არის 2^{k-1}. რადგან $\frac{n(n+1)}{2}$ არ იყოფა 2^k-ზე, ჩვენი დაშვებიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერ $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{\frac{n(n+1)}{2}}(\mathbb{C})$ მატრიცას გააჩნია საკუთრივი ვექტორი. თუ ახლა გამოვიყენებთ ლემა 2-ს, მივიღებთ, რომ $Sym_n(\mathbb{C})$-ის ნებისმიერ ორ კომუტირებად წრფივ გარდაქმნას გააჩნია საერთო საკუთრივი ვექტორი.

განვსაზღვროთ ახლა ორი ასახვა $L_1, L_2 : Sym_n(\mathbb{C}) \rightarrow Sym_n(\mathbb{C})$ შემდეგნაირად:

$$L_1(B) = AB + B\mathrm{A}^\mathrm{T}\,,\ L_2(B) = AB\mathrm{A}^\mathrm{T}.$$

ადვილი სანახავია, რომ L_1 და L_2, ორივე, $Sym_n(\mathbb{C})$-ის $\mathbb{C}$-წრფივი ენდოგარდაქმნაა და რომ $L_1L_2 = L_2L_1$. ლემა 2-ის გამო მაშინ L_1 და L_2-ს გააჩნია საერთო საკუთრივი ვექტორი; ე.ი. არსებობს ისეთი არანულოვანი მატრიცა $B_0 \in Sym_n(\mathbb{C})$ და ისეთი კომპლექსური რიცხვები $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$AB_0 + B_0\mathrm{A}^\mathrm{T} = z_1 B_0 \text{ და } AB_0\mathrm{A}^\mathrm{T} = z_2 B_0.$$

თუ პირველ ტოლობას მარცხნიდან გავამრავლებთ A-ზე და გავითვალისწინებთ მეორე ტოლობას, მივიღებთ:

$$A^2 B_0 + z_2 B_0 = z_1 AB_0.$$

მაშასადამე, გვაქვს ტოლობა:

$$(A^2 - z_1 A + z_2 I_n)B_0 = O_n.$$

რადგან ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვიდან შესაძლებელია კვადრატული ფესვის ამოღება, ამიტომ ნებისმიერი კომპლექსური კვადრატული სამწევრი $\mathbb{C}$-ზე იშლება ორი წრფივი ორწევრის ნამრავლად. კერძოდ, $p(z) = z^2 - z_1 z + z_2$ მრავალწევრი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$(z - \alpha)(z - \beta)$$

სახით, მაშინ $(A - \alpha I_n)(A - \beta I_n)$ ნულოვანი მატრიცაა. მაშასადამე:

$$(A - \alpha I_n)\big((A - \beta I_n)B_0\big) = O_n.$$

ახლა, თუ $(A - \beta I_n)B_0 = O_n$, მაშინ B_0-ის ნებისმიერი არანულოვანი სვეტი ვექტორი იქნება A-ს საკუთრივი ვექტორი (ხოლო β კი — მისი შესაბამისი საკუთრივი რიცხვი); ხოლო, თუ $(A - \beta I_n)B_0 \neq O_n$, მაშინ $(A - \beta I_n)B_0$ მატრიცის ნებისმიერი არანულოვანი სვეტი ვექტორი იქნება A-ს საკუთრივი ვექტორი (α კი მისი შესაბამისი საკუთრივი რიცხვი). ეს ასრულებს თეორემა 1-ის (და, მაშასადამე, ალგებრის ძირითადი თეორემის) დამტკიცებას.

ლიტერატურა:

1. Fine, B. and Rosenberger, G. The fundamental theorem of algebra. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer- Verlag, New York (1997).
2. **Derksen, H**. The fundamental theorem of algebra and linear algebra. *Amer. Math. Monthly* **110** (2003), no. 7, 620-623.

ავტორის ელექტრონული მისამართი: *bachuki.mesablishvili@tsu.ge*

წერილები ალბათობაზე
(პასკალის წერილები ფერმასთან – გაგრძელება)

ომარ ფურთუხია

პროფესორი
მათემატიკის დეპარტამენტის ხელმძღვანელი,
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ავტორი *ალფრედ რენი*

თარგმნა *ომარ ფურთუხიამ*

მესამე წერილი

პარიზი
1654 წლის 8 ნოემბერი
გარიჟრაჟისას
ბატონ პიერ ფერმას
ორლეანი

ძვირფასო ბატონო ფერმა!

გასულ ღამეს მე ვიტანჯებოდი კოშმარებისგან და გამომეღვიძა ოფლში გახვითქულს, ძლიერი გულისცემით. ყურადღების გადასატანად, გადავწყვიტე მეპასუხა თქვენს მესამე კითხვაზე, სახელდობრ, მეჩვენებინა, თუ რა პირობებშია სამართლიანი ალბათობათა გამრავლების თეორემა. თქვენ, კერძოდ, აღნიშნეთ, რომ, თუ ბანქოს დასტიდან ორჯერ ზედიზედ ვიღებთ თითო კარტს, მაშინ ალბათობათა გამრავლების თეორემა აღმოჩნდება სამართლიანი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუკი, მანამ, სანამ მეორედ ამოვიღებთ კარტს, ჩვენ დავაბრუნებთ დასტაში თავდაპირველად ამოღებულ კარტს და მთლიან დასტას კარგად ავურევთ. თუკი კარტს უკან არ ჩავაბრუნებთ, მაშინ ალბათობათა გამრავლების თეორემა აღარ იქნება სამართლიანი.

განვიხილოთ, მაგალითად, ბანქოს 16-კარტიანი დასტა, რომელიც შეიცავს ყველა ფერის (ყვავი, ჯვარი, გული, აგური) ოთხ-ოთხ ცალ კარტს – ტუზს, მეფეს, ქალს და ვალეტს. მაშინ ალბათობა იმისა, რომ თავდაპირველად ჩვენ ამოვიღებთ მეფეს, შეადგენს 1/4-ს. თუ მეორედ ამოღებამდე ჩვენ დავაბრუნებთ დასტაში პირველად ამოღებულ კარტს, მაშინ ამ შემთხვევაშიც მეფის ამოღების ალბათობა იქნება 1/4. თუკი პირველი კარტის ამოღების შემდეგ მას უკან არ ვაბრუნებთ, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ მეფეს ამოვიღებთ როგორც პირველი, ისე მეორე ამოღებისას, უკვე ტოლი იქნება არა $1/4 \cdot 1/4 = 1/16$-ის, არამედ მხოლოდ 1/20-ის, ვინაიდან ორი მეფის ამოღება ამ შემთხვევაში ჩვენ შეგვიძლია მხოლოდ $4 \cdot 3 = 12$ სხვადასხვანაირად (მაშინ, როდესაც ყველა შესაძლო შემთხვევათა რაოდენობა შეადგენს $16 \cdot 15 = 240$-ს). ერთი შეხედვით, ეს მაგალითი ეწინააღმდეგება ალბათობათა გამრავლების თეორემას, რომლის შესახე-

ბაც მე გწერდით 28 ოქტომბრის წერილში, მაგრამ ეს წინააღმდეგობა მოჩვენებითია. საკმარისია ჩვენ დეტალურად შევისწავლოთ მოყვანილი მაგალითი და დავინახავთ, რომ გამრავლების თეორემა აქაც სამართლიანია.

მართლაც, თუ პირველი ამოღების შემდეგ ჩვენ არ ვაბრუნებთ ამოღებულ კარტს დასტაში და ამასთანავე ამოღებული აღმოჩნდა მეფე, მაშინ მეორე ამოღებისთვის დასტაში რჩება უკვე 15 კარტი და მათ შორის მხოლოდ სამია მეფე. შესაბამისად, მეორედ მეფის ამოღების ალბათობა იქნება 3/15-ის (ანუ 1/5-ის) ტოლი. მაშინ, გამრავლების თეორემის თანახმად, საძიებელი ალბათობა შეადგენს 1/4 · 1/5 = 1/20-ს, როგორც ეს მოსალოდნელი იყო. თუკი დავუშვებთ, რომ პირველ შემთხვევაში დასტიდან ამოღებული კარტი არ არის მეფე (და კარტი უკან არ დაბრუნებულა), მაშინ მეორე შემთხვევაში მეფის ამოღების ალბათობა იქნება 4/15. ამიტომ, გამრავლების თეორემის თანახმად, ალბათობა იმისა, რომ პირველი ამოღებისას არა, მაგრამ მეორე ამოღებისას ჩვენ ამოვიღებთ მეფეს, ტოლია 3/4 · 4/15 = 1/5-ის. მაშინ, როდესაც ალბათობა იმისა, რომ მეორე ამოღებისას ჩვენ ამოვიღებთ მეფეს, დამოუკიდებლად პირველი ამოღების შედეგისა, შეადგენს 1/20 + 1/5 = 1/4-ს, ე. ი. ის იმდენად დიდია, როგორიც იქნებოდა, თუკი პირველი ამოღების შემდეგ კარტს დავაბრუნებდით დასტაში. მაგრამ ეს სამართლიანია მანამ, სანამ ჩვენთვის ცნობილი არ გახდება პირველი ამოღების შედეგი. თუკი ის ჩვენთვის ცნობილი გახდება, მაშინ სიტუაცია შეიცვლება და თუ პირველი ამოღებული კარტი აღმოჩნდა მეფე, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ მეორე ამოღებისას ამოღებული იქნება ისევ მეფე, შეადგენს მხოლოდ 1/5 (ანუ ნაკლები 1/4-ზე). და პირიქით, როდესაც პირველი ამოღებული კარტი არაა მეფე, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ მეორე ამოღებისას ამოვიღებთ მეფეს, იქნება უკვე 4/15 (ანუ მეტი 1/4-ზე). ბუნებრივად იბადება კითხვა: იცვლება თუ არა ალბათობა იმის მიხედვით, რომ ჩვენ ვგებულობთ ამოღებული კარტის შესახებ? კარტს ხომ არ შეუძლია იცოდეს, რომ შევამჩნიე, რა ამოვიდა! სხვა სიტყვებით, როგორ შეიძლება ჩემმა ცოდნამ გავლენა იქონიოს მეორე ამოღების შედეგის ალბათობაზე, რამეთუ ის დამოკიდებულია არა ჩემზე, არამედ მხოლოდ დასტის შემადგენლობაზე? ეს სინამდვილეში ასეა, მაგრამ, თუკი მე შევამჩნიე რომელი კარტი ამოვიდა პირველი ამოღებისას, მაშინ სრული უტყუარობით მეცოდინება, თუ 16 კარტიდან რომელი კარტი არ არის დარჩენილ 15 კარტში! ამასათანავე, ამ კარტის არქონა გავლენას ახდენს აღნიშნულ ალბათობაზე, ვინაიდან ამაზეა დამოკიდებული, თუ რამდენი მეფეა (ოთხი თუ მხოლოდ სამი) დარჩენილ კარტებში. საკუთრივ ჩვენ გვაცბუნებს ის გარემოება, რომ მე შევამჩნიე ამოღებული კარტი; სინამდვილეში, ლაპარაკია არ იმაზე, დავინახე თუ არა მე, რა კარტია ეს, არამედ მხოლოდ იმაზე, არის თუ არა დარჩენილ 15 კარტში ყველა (ოთხივე) მეფე. შესაბამისად, მნიშვნელოვანია არა ის, რომ ჩვენთვის ცნობილი ხდება ამოღებული კარტი, არამედ ის, აღმოჩნდა თუ არა პირველი ამოღებული კარტი მეფე. რამდენადაც გვაინტერესებს მხოლოდ მეორე კარტი, რომელსაც ჩვენ ვიღებთ დასტიდან, იმის ალბათობის გამოთვლისას, რომ ის აღმოჩნდება მეფე, ჩვენ უნდა გავითვალისწინოთ პირველი ამოღების ორივე შესაძლებლობა (ანუ ამოღებული იყო მეფე, თუ მეფე არ იყო ამოღებული) და შევადგინოთ პირობითი ალბათობების (1/5-ის და 4/15-ის) *შეწონილი საშუალო მნიშვნელობა* პირველი ამოღების ორივე შესაძლო შედეგის ალბათობებთან (ანუ 1/4-ისა და 3/4-ის ტოლი წონებით). ამრიგად, სინამდვილეში მივიღებთ 1/4 · 1/5 + 3/4 · 4/15 = 1/4-ს.

მოყვანილი მაგალითი გვიჩვენებს, თუ რამდენად დიდი დაკვირვებულობაა საჭირო ამ, ერთი შეხედვით, მარტივი საკითხების განხილვისას; თითქმის ყოველ ნაბიჯზე გველოდება საშიშროება, მაგრამ ამის შესახებ მე მსურდა თქვენთვის სხვა დროს მომეწერა. რაც შეეხება გამრავლების თეორემას, მისი ზოგადი და კონკრეტული ფორმულირება დაიყვანება შემდეგზე: ალბათობა იმისა, რომ მოხდება A და B ხდომილებები, ტოლია A ხდომილების ალბათობის ნამრავლის B ხდომილების ალბათობაზე, ამასთან, უკანასკნელი ალბათობა გამოითვლება იმ პირობით, რომ A ხდომილება მოხდა. ამ უკანასკნელ მნიშვნელობას მე ვუწოდებ B ხდომილების *პირობით ალბათობას* A პირობაში.

ჩემი აზრით, მე შემოვიღე ახალი ცნება — პირობითი ალბათობა, მაგრამ, პრინციპში, ის არ განსხვავდება *ალბათობის* ცნებისგან. სინამდვილეში, ნებისმიერი ხდომილების ალბათობა

დამოკიდებულია გარკვეულ პირობებზე, რა დროსაც განიხილება მისი მოხდენა ან არმოხდენა. როცა ვამტკიცებთ, რომ სათამაშო კამათლის გაგორებისას ექვსიანის მოსვლის ალბათობა ტოლია 1/6-ის, ჩვენ წინასწარ ვგულისხმობთ, რომ სათამაშო კამათელი წესიერია. როდესაც ჩვენ ვამბობთ, რომ ჩვენთვის გამოწვდილი ბანქოს დასტიდან მეფის ამოღების ალბათობა ტოლია 1/4-ის, ჩვენ გამოვდივართ იქიდან, რომ დასტაში 16 კარტია, რომელთა შორის ოთხი მეფეა და თვითონ კარტები კარგადაა არეული. თუ პირობები იცვლება, მაშინ იცვლება ალბათობაც. თუ პირობები სრულიად განსაზღვრულია და არ იცვლება, მაშინ მათ, უბრალოდ, არ ახსენებენ. შემოღებული პირობითი ალბათობის ცნება არსებითად წარმოადგენს პლეონაზმს, მსგავსად გამოთქმისა „მოკვდავი ადამიანი", ვინაიდან ყველასთვის ცნობილია, რომ ადამიანი მოკვდავია. მაგრამ იმისათვის, რომ გამოირიცხოს გაუგებრობა, მაინც მიზანშეწონილია ვისაუბროთ პირობით ალბათობებზე იმ შემთხვევებში, როცა პირობები იცვლება და არ არის მოცემული მუდმივად.

შეიძლება ისე მოხდეს, რომ B ხდომილების ალბათობა პირობაში, რომ A ხდომილება უკვე მოხდა, ტოლი იყოს B ხდომილების ალბათობის, დამატებითი პირობის გარეშე. ასეთ შემთხვევაში სრულიად საფუძვლიანია A და B ხდომილებებს ვუწოდოთ *დამოუკიდებელი* ხდომილებები; ამასთანავე, A ხდომილების ალბათობა არ არის დამოკიდებული იმაზე, მოხდა თუ არა B ხდომილება. იმ შემთხვევაში, როცა A და B ხდომილებები დამოუკიდებელია, ალბათობათა გამრავლების თეორემის ფორმულირება შესაძლებელია პირობითი ალბათობის ცნებისთვის მიმართვის გარეშე. ამასთან, ჩვენ შეგვიძლია პირდაპირ ვამტკიცოთ: ალბათობა იმისა, რომ მოხდება ორივე, A და B, ხდომილება, ტოლია თითოეული ამ ხდომილების ცალ-ცალკე ალბათობების ნამრავლის. ეს მოხდება, მაგალითად, თუ A და B ხდომილებები ეხება (სხვადასხვა სათამაშო კამათელზე) ქულების მოსვლას. ამასთანავე, A და B ხდომილებები დამოუკიდებელია, ვინაიდან სათამაშო კამათლებს არ შეუძლია გავლენა იქონიოს ერთმანეთზე. თუკი სათამაშო კამათლები გარკვეულწილად დაკავშირებულია ერთმანეთთან, მაგალითად, ძაფის საშუალებით, მაშინ ხდომილებები უკვე არ იქნებიან დამოუკიდებლები.

ორი ხდომილება შესაძლებელია იყოს დამოუკიდებელი არა მხოლოდ მაშინ, როცა შეუძლებელია იმის წარმოდგენა, თუ რანაირად შეიძლება ერთ-ერთის ხელშემწყობმა შემთხვევამ გავლენა იქონიოს მეორეზე. მაგალითისათვის აღვნიშნოთ A სიმბოლოთი ხდომილება, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ ბანქოს დასტიდან შემთხვევით ამოღებული კარტი იქნება ყვავი, ხოლო B — რომ ამოღებული კარტი იქნება მეფე. ამ შემთხვევაში ორივე ხდომილება ეხება ერთსა და იმავე მოვლენას და ამის მიუხედავად ისინი დამოუკიდებელია ერთმანეთისგან. მართლაც, 16 კარტს შორის არის ოთხი მეფე, ხოლო ყვავის ოთხ კარტს შორის არის ერთი მეფე. შემდგომ, დარჩენილ 12 კარტს შორის არის სამი მეფე; ამრიგად, B ხდომილების ალბათობა ტოლია 1/4-ის როგორც იმ შემთხვევაში, როცა A ხდომილება მოხდა, ისე იმ შემთხვევაში, როცა ის არ მომხდარა; აგრეთვე მაშინ, როცა A ხდომილება საერთოდ არ მიიღება მხედველობაში.

8 ნოემბერი, საღამო

გადავიკითხე რა ჩემ მიერ გამთენიისას დაწერილი, მივედი იმ დასკვნამდე, რომ ჩემი პასუხი ბადებს ახალ კითხვებს. მართლაც, რას ნიშნავს საკუთრივ მტკიცებულება, რომ ბანქოს დასტა „საგულდაგულოდ არეულია"? თუკი ჩვენ შევეკითხებოდით ამის შესახებ გამოცდილ მოთამაშეს, მაგალითად, შევალიე დე მერეს, მაშინ ის, ცხადია, გვიპასუხებდა, რომ ეს ნიშნავს შემდეგს: ერთ-ერთი მოთამაშე საკმარისად დიდხანს ურევს ბანქოს დასტას ისე, რომ არ ცდილობს მოატყუოს მეორე. სხვა სიტყვებით, ის, ცდილობს რა მიბაძოს გამოცდილ მოთამაშეებს, შემთხვევითობას ანდობს კარტების განლაგებას დასტაში და არ ცდილობს მოახდინოს მასზე გავლენა. მე კი უფრო შორს წავიდოდი და ვიკითხავდი: შესაძლებელია თუ არა მხოლოდ კარტების განლაგების რიგით (თუ არ ვიცით რანაირად მოხდა მათი არევა) დავადგინოთ, არის

თუ არა კარგად არეული კარტები? ერთი შეხედვით, ეს შეკითხვა სრულიად უწყინრად გამოიყურება და უაღრესად მაინტერესებს, რას უპასუხებდა მას შევალიე დე მერე. თუკი ის სინამდვილეში უპასუხებდა ისე, როგორც ეს მე წარმომიდგენია, მაშინ სურვილი მექნებოდა მეკითხა მისთვის, როგორია, მისი აზრით, ალბათობა იმისა, რომ ბანქოს დასტის საგულდაგულოდ არევის შემდეგ გულის ქალი აღმოჩნდება ზემოთ. სავარაუდოდ, ის უპასუხებს, რომ კარგი არევის შემდეგ თითოეულს 16 კარტიდან ექნება ერთი და იგივე ალბათობა იმისა, რომ აღმოჩნდეს ზემოთ, ე. ი. ეს ალბათობა შეადგენს 1/16-ს. კარგი, მე გავაგრძელებდი, — თუ გულის ქალი აღმოჩნდება ზემოთ, მაშინ როგორია ალბათობა იმისა, რომ მისი მომდევნო კარტი აღმოჩნდება ყვავის ტუზი (ან ნებისმიერი სხვა დარჩენილი კარტებიდან)? ცხადია, რომ 1/15, — ასე უპასუხებდა ამაზე შევალიე.

ყველა ეს მოსაზრება საშუალებას გვაძლევს დავასკვნათ, რომ, საგულდაგულო არევის შემთხვევაში, კარტების განლაგების თითოეული შესაძლებლობის ალბათობა უნდა იყოს ერთნაირი. მაგრამ, ასეთ შემთხვევაში, მხოლოდ კარტების განლაგების განხილვით რანაირად შეიძლება გადავწყვიტოთ, თუ რამდენად კარგად არის არეული ბანქოს დასტა — რამეთუ ერთი განლაგება ისევე ალბათურია, როგორც ნებისმიერი სხვა განლაგება? ხოლო, თუ კარტების განლაგების განხილვით არ შეიძლება გადავწყვიტოთ, რომ ბანქოს დასტა კარგად არის არეული, მაშინ აქვს კი თვითონ ამ გამოთქმას რაიმე გარკვეული აზრი? ამაზე დე მერე უპასუხებდა, რომ, რა თქმა უნდა, მხოლოდ ერთი არევის შედეგი ჯერ კიდევ არ იძლევა საშუალებას დავადგინოთ, გვატყუებს თუ არა ჩვენ ბანქოს დასტის ამრევი; მაგრამ თუკი ის ძალიან ხშირად, მეტჯერ, ვიდრე ეს მოსალოდნელია, არიგებს თავისთვის კარგ კარტებს, მაშინ ეჭვი არ არის, რომ საქმე გვაქვს თაღლითთან. ამის შემდეგ მე ვკითხავდი შევალიეს: თუ მოთამაშე საგულდაგულოდ ურევს კარტებს, მაშინ, როგორ ფიქრობს ის, განლაგების ნებისმიერი შესაძლებლობა მოხდება დაახლოებით ერთნაირად ხშირად? თუკი მისი პასუხი იქნებოდა დადებითი, მაშინ ის ისევ აღმოჩნდებოდა მახეში. რამეთუ კარტების განლაგების ყველა შესაძლებლობის რიცხვი ტოლია ყველა მთელი რიცხვის ნამრავლის 1-დან 16-მდე, ხოლო ეს რიცხვი (20922789000000[1]) იმდენად დიდია, რომ, თუკი კარტის მოთამაშე კომპანია[2] ამით დაკავებული იქნებოდა დღე და ღამე, შესვენების გარეშე და ყოველწუთიერად აურევდა დასტას, მაშინ საჭირო იქნებოდა დაახლოებით 39 მილიონი წელი იმისათვის, რომ გამოჩენილიყო ნებისმიერი შესაძლო განლაგება![3] ამრიგად, თუ ამ გზას გავყვებით, პრაქტიკულად შეუძლებელია არევის ხარისხის შემოწმება. ახლახან მე მოვიფიქრე კარტის არევის მარტივი მოწყობილობა: კარტები ცურდებიან დახრილ სიბრტყეზე და ხვდებიან ყუთში, რომელსაც საათის მექანიზმი ეწევა ზემოთ და ყრის მეორე დახრილ სიბრტყეზე. პროცესი მეორდება მიმდევრობით ბევრჯერ. შესაძლებელია ამ მოწყობილობით წუთში გვეწარმოებინა 10 არევა, მაგრამ მასაც უნდა ემუშავა დაახლოებით 4 მილიონი წელი, ვიდრე შესაძლებელი იქნებოდა კარტების ყველა შესაძლო განლაგების გამოჩენა. როდესაც მე გამოვთვალე 52-კარტიანი დასტისათვის კარტების შესაძლო განლაგებათა რიცხვი, ლამის თავბრუდახვევა დამეწყო.

მაგრამ ჯერჯერობით არ შევეხოთ ამ საჩოთირო საკითხს ბანქოს დასტის საგულდაგულო არევის შესახებ და ვიგულისხმოთ, რომ ამისთვის არსებობს საიმედო მანქანა (ან გამოცდილი და პატიოსანი მოთამაშე), რომელიც ერთსა და იმავე ალბათობით გვაძლევს კარტების ნებისმიერ შესაძლო განლაგებას. მანქანა (მოთამაშე) ურევს ბანქოს დასტას, რომელიც შედგება 16 კარტისგან, და შედეგად ხორციელდება გარკვეული განლაგება — ერთი ოცი ათას მილიარდზე მეტი შესაძლებლობიდან. თქვენ მხოლოდ წარმოიდგინეთ, თუ რას ნიშნავს ეს: ჩვენ შეიძლება გავხდეთ მოწმე ისეთი ხდომილების, რომლის ალბათობა ნაკლებია, ვიდრე 0.00000000000005, ანუ ტოლია ერთი გაყოფილი ოცი ათას მილიარდზე! აქამდე მეჩვენებოდა, რომ ხდომილება,

---

[1] $1 \cdot 2 \cdots 16 = 20922789000000$ — მთარგმნელის შენიშვნა.

[2] კომპანია — კარტის მოთამაშე ადამიანთა ჯგუფი — მთარგმნელის შენიშვნა.

[3] როგორც მკითხველი ადვილად დარწმუნდება, პასკალის გამოთვლები ძალიან მარტივია: $1 \cdot 2 \cdots 16 / 365 \cdot 24 \cdot 60 \approx 39\,000\,000$.

რომელსაც გააჩნია ძალიან მცირე ალბათობა, ვთქვათ, მხოლოდ ერთი მემილიარდედი, პრაქტიკულად შეუძლებელია. თუმცა, როგორც ამას გვიჩვენებს კარტის არევის მაგალითი, ასეთი ტიპის დასკვნების გამოტანა არ უნდა ვიჩქაროთ. ამრიგად, ჩვენ უნდა დავსვათ შემდეგი კითხვა: მაინც რა აზრით არის მართალი იმის თქმა, რომ მცირე ალბათობის მქონე ხდომილება უნდა მივიღოთ თითქმის გამონაკლისად, მაშინ როცა ერთთან ახლოს მყოფი ალბათობის მქონე ხდომილება უნდა მივიჩნიოთ პრაქტიკულად უტყუარად? ჩემი აზრით, ეს კითხვა არც ისე რთულია, როგორც ის გვეჩვენება ერთი შეხედვით. აკი თუ მე წინასწარ ვუთითებ განლაგებას, რანაირადაც უნდა დალაგდეს კარტები, ხოლო *შემდგომ* ვურევ ბანქოს დასტას, მაშინ ზუსტად ამ განლაგების მოხდენა პრაქტიკულად შეუძლებელია, თუმცა ის არანაკლებ ალბათურია, ვიდრე ნებისმიერი სხვა განლაგება, მათ შორის ისიც, რომელიც სინამდვილეში განხორციელდა.

თავის დროზე, როცა მე ის-ის იყო დავიწყე ფიქრი ალბათობაზე, ყველაფერი მარტივად და ცხადად მეჩვენებოდა; მხოლოდ ახლა მესმის ჩემი შეცდომის სრული სიღრმე. ყოველ ჯერზე, როცა მეჩვენება, რომ მივაგენი ჭეშმარიტებას, ის მე ხელიდან მეცლება. თითქმის ყოველ ნაბიჯზე ჩვენ აქ ჩასაფრებული გვაქვს საფრთხეები. შესაძლოა, ეს ყველაფერი აისახა კიდეც ჩემს სიზმარზე, რომელმაც ასე გამაწამა გასულ ღამეს. მესიზმრა, თითქოს ვიმყოფებოდი გამოქვაბულში და უკუნ სიბნელეში ვცდილობდი მომეძებნა გასასვლელი; ვცდილობდი მევლო იმ მიმართულებით, საიდანაც, როგორც მე მეჩვენებოდა, აღწევდა სინათლე. მაგრამ გზა გადამიღობა უზარმაზარმა კლდემ. მრავალი მცდელობის შემდეგ, მე საბოლოოდ მოვახერხე მისი შემოვლა და დავინახე ხვრელი, რომელიც, როგორც ჩანს, წარმოადგენდა გამოქვაბულიდან გასასვლელს, ვინაიდან იქ შეინიშნებოდა სინათლე. მე გავიმართე და ის-ის იყო უნდა წავსულიყავი ხვრელისკენ, მაგრამ, როგორც კი ნაბიჯი გადავდგი, მაშინვე ვიღაც უხილავმა მხარში ჩამავლო ხელი და მიბიძგა უკან. ეტყობა მხრით გავედე ჩამოწოლილი ლოდის ნაწილს — გავიფიქრე მე (რამეთუ ვიცოდი, რომ ჩემ გარდა გამოქვაბულში არავინ იყო). წამოვდექი რა, ისევ გავემართე გასასვლელისკენ. ამ ჯერზე უფრო ფრთხილად ვიყავი და, ვებღაუჭებოდი რა კედელს, ყურადღებით ვიყურებოდი წინ. იმან, რაც ხილული გახდა ჩემი მზერისთვის, მაიძულა უკან დამეხია: პირდაპირ ჩემ წინ ნაპრალი გადაიშალა. რომ არა ის ბიძგი, მე უცილობლად გადავიჩეხებოდი მასში. პირველ ეტაპზე ვერც კი გავაცნობიერე ბოლომდე, თუ როგორი საფრთხე ავირიდე. ცნობისმოყვარეობის დასაკმაყოფილებლად, მე გადავაგდე ნაპრალში ქვა და დავიწყე თანაბარი თვლა, რომ შემძლებოდა ქვის ფსკერზე დაცემის ხმის გაგონებით დამედგინა მისი სიღრმე. როცა მე დავითვალე 5-მდე და ჯერ კიდევ არ გამეგონა ქვის დაცემის ხმა, პირველად გავაცნობიერე ჩემი მდგომარეობა; სულ მთლად აცახცახებულმა, მე დავითვალე 10-მდე, შემდეგ 20-მდე, მაგრამ ისევ არ გამიგონია ფსკერზე ქვის დაცემის ხმა. საშინელებით მოცული, მე ამაოდ ვაგრძელებდი თვლას მანამ, სანამ სიზმარი არ გამიწყდა.

ვფიქრობ, ყოველივე ნათქვამიდან გამომდინარე მიხვდებით, თუ გაღვიძების შემდეგ რატომ არ მქონდა მცდელობა ისევ დამეძინა და, ვისწრაფოდი რა თავი დამეღწია სიზმრის დამთრგუნველი შთაბეჭდილებებისგან, გამთენიისას შევუდექი ამ წერილის წერას.

ახლა მე უკვე შემიძლია დამშვიდებულად ვიფიქრო უცნაურ სიზმარზე, მაგრამ ისევ ვერ წარმომიდგენია, თუ როგორ ავხსნა ის. შესაძლებელია მისი პირველმიზეზი ყოფილიყო ჩემი შეუპოვარი ბრძოლა ალბათობის ცნებასთან, რომელიც მუდმივად მისხლტებოდა ხელიდან. ტყუილად ხომ არ წერდა ოდესღაც ამის შესახებ ლუკრეციუსი:

> თუკი ვინმე დაკავებულია რაიმე საქმით გულმოდგინედ,
> ან ჩვენ დიდი ხნით რაღაცას მივეღტვოდით
> და ჩვენს გონებას მუდმივად იტაცებდა ეს საქმე,
> მაშინ ძილშიც კი გვეჩვენება, რომ ვაკეთებთ იმავეს.

თუმცა შესაძლებელია ჩემი სიზმარი სულაც სხვა რამეს ნიშნავდეს. რაში მდგომარეობს საფრთხე, რომელიც დამიდარაჯდა და ვისმა უხილავმა ხელმა გადამარჩინა მე დაღუპვას? და საერთოდაც, საიდან იღებს სათავეს ჩვენი სიზმრები და უნდა მივანიჭო თუ არა მათ რაიმე მნიშვნელობა? საღი აზრი მკარნახობს, რომ ძილის დროს დასვენებული ტვინი გაუცნობიერებ-

ლად ურევს ერთმანეთში სრულიად განსხვავებულ წარმოდგენებს, როგორც მოთამაშე, ურევს რა კარტებს, განალაგებს მათ შემთხვევითი თანმიმდევრობით. არაა გასაკვირი, რომ სიზმარში ეს წარმოდგენები გვევლინებიან ნებისმიერი თანმიმდევრობით და მათ გამოვლინებაში არც უნდა ვეძებოთ რაიმე განსაკუთრებული მიზეზი ან უხილავი ნიშნები, ზუსტად ისევე, როგორც ბანქოს დასტის არევის შემდეგ კარტის შემთხვევით თანმიმდევრობაში. შემთხვევითობის ცნება ათასწლეულების განმავლობაში გარემოცული იყო ცრურწმენული წარმოდგენებით და, ეტყობა, სწორედ ეს აკავებდა ადამიანებს მცდელობისგან, რომ შემთხვევითი მოვლენები ექციათ სამეცნიერო გამოკვლევების საგნად. რაც შემეხება მე, დარწმუნებული ვარ, რომ მოვახერხე განვთავისუფლებულიყავი საშინელ ცრურწმენათა შემზღუდავი ჯაჭვისგან, მაგრამ ჩემი სიზმრის ახსნისას არანაირი ლოგიკური არგუმენტები არ მაძლევენ საშუალებას განვთავისუფლდე იმ დამთრგუნველი გრძნობისგან, რომ ის მაინც რაღაცას უნდა ნიშნავდეს.

მომიტევეთ, რომ ყველაფერ სხვასთან ერთად, თავს გაბეზრებთ ჩემი სიზმრების აღწერითაც. მე თვითონაც ეს ძალიან მეუხერხულება, მაგრამ, იმავდროულად, განვიცდი უდიდეს შვებას იმის გამო, რომ მე მოვახერხე გამეზიარებინა თქვენთვის ჩემი ნააზრევი ამ კოშმარული სიზმრის მიზეზების შესახებ. ვიმედოვნებ, რომ თქვენ, ვინც ასე კარგად გებულობთ ჩემს აზრებს, ჩაწვდებით მათ არსს და გაიგებთ ჩემს დაძაბულ სულიერ მდგომარეობას. და თუკი ვინმე სხვას, ვისთანაც მე არ მაკავშირებს ასეთი მჭიდრო სულიერი სიახლოვე, ასეთი აღსარება, შესაძლებელია, შეაშინებდა კიდეც, თქვენთვის ასეთი გულახდილობა იქნება ჩვენი მეგობრობის დამატებითი საწინდარი და თქვენ კიდევ ერთხელ აღიქვამთ ამ წერილიდან, რომ თქვენს ყველაზე გულწრფელ მეგობრად, ყველაზე გულმხურვალე თაყვანისმცემლად რჩება

ბლეზ პასკალი

მეოთხე წერილი

პარიზი
1654 წლის 19 ნოემბერი
ბატონ პიერ ფერმას
ტულუზა

ძვირფასო ბატონო ფერმა!

წერილში, რომელიც მე თქვენ გამომიგზავნეთ 12 ნოემბერს ორლეანიდან, თქვენთვის ჩვეული თავდაჭერილობით განაცხადეთ, თითქოს თქვენთვის უცნობი იყო თქვენ მიერ წინა წერილში დასმულ კითხვებზე პასუხები. ნუ ჩამითვლით საწყენად, მაგრამ მე უწინდებურად დარწმუნებული ვარ, რომ ჩემი პასუხები არ ყოფილა თქვენთვის მოულოდნელი და რადგანაც მჯერა, რომ თქვენ წინასწარ უპასუხეთ თქვენ მიერ შემოთავაზებულ ყველა კითხვას, ამიტომ განსაკუთრებით მოხარული ვარ იმ გარემოების, რომ, როგორც თქვენი წერილიდან ვასკვნით, თქვენ ძირითადად ეთანხმებით ჩემს პასუხებს.

რაც შეეხება ბოლო წერილში თქვენ მიერ დასმულ ახალ კითხვებს, ვიხრები აზრისკენ, რომ ეს კითხვები სულაც არ არის რიტორიკული. ამასთანავე, ისინი იმდენად არიან დაკავშირებული ძირითად ფილოსოფიურ პრობლემებთან, რომ ღრმად ვარ დარწმუნებული, მათ ყველა ეპოქაში დაუბრუნდებიან მოაზროვნეები. რამდენადაც კაცობრიობა მუდმივად აგროვებს ცოდნას, ამ კითხვებზე პასუხები სულ უფრო და უფრო სრული გახდება, მაგრამ ვერცერთი მათგანი ვერ მოახერხებს მოგვცეს ამომწურავი პასუხი. თქვენი უეჭველი დამსახურება ისაა, რომ თქვენ პირველმა მოახერხეთ ამ კითხვების შეუდარებლად ცხადად ფორმულირება. თუკი, ვთქვათ, სამასი წლის შემდეგ მე მოვახერხებდი მკვდრეთით აღდგომას და დავინახავდი, რომ მათემატიკოსები, ბუნებისმეტყველები და ფილოსოფოსები ჯერ კიდევ კამათობენ ამის თაობაზე, მე ეს სრულებით არ გამიკვირდებოდა; არც ის გამიკვირდებოდა, რომ არსებულიყო

მრავალი სავსებით ბუნდოვანი მოსაზრება. რამდენადაც ამ შემთხვევაში საუბარია განუსაზღვრელობის პრინციპზე, ჩვენ უფლება გვაქვს მოველოდეთ, რომ ზედაპირული ადამიანები მას მიიჩნევენ ისეთ სფეროდ, სადაც სულაც არ არის აუცილებელი მიისწრაფოდე აზროვნების სრულ სიზუსტემდე. მე სავსებით არ გამიკვირდებოდა არც იმ ადამიანების, რომელთაც ეზიზღებათ მათემატიკური აზროვნების მეთოდები: ისინი თვლიან, რომ, ვინაიდან შემთხვევითი მოვლენის შედეგების განჭვრეტა მაინც შეუძლებელია (ხოლო, თუ შესაძლებელია, მხოლოდ ძალიან ზოგადად), მათი მათემატიკური გააზრებისას შესაძლებელია დავუშვათ გარკვეული დაუხვეწელობა და ვისარგებლოთ გაუაზრებელი და არასაკმარისად არგუმენტირებული ცნებებით. სინამდვილეში კი საქმე სწორედ რომ პირიქითაა. ყველა დიასახლისმა კარგად იცის, რომ ახალი პურის დასაჭრელად უფრო ბასრი დანაა საჭირო, ვიდრე გამხმარის. არსებითად ჩვენ ვსაუბრობთ იმავეზე. ნებისმიერ სამეცნიერო გამოკვლევაში, იმისათვის, რომ მივუახლოვდეთ ჭეშმარიტებას, აუცილებელია ვიმოქმედოთ დახვეწილი ლოგიკური მოსაზრებებით და კრისტალურად სუფთა არგუმენტებით, ფრთხილად წავიწიოთ წინ და შევამოწმოთ ნებისმიერი ჩვენი ნაბიჯი. ეს კი განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია სწორედ შემთხვევითი მოვლენების შესწავლისას.

ახლახან ნათქვამის საფუძველზე, არა მგონია გაგიკვირდეთ, როცა შენიშნავთ, რომ არ მყოფნის იმის გამბედაობა, რომ გაგცეთ საბოლოო და სრულიად ამომწურავი პასუხები თქვენს კითხვებზე. უფრო მეტიც, მე ვჩქარობ გაგიზიაროთ თქვენ ის აზრები, რომლებსაც ჩემში აღძრავენ თქვენი კითხვები; მარტო ესეც საკმარისია თქვენს დასარწმუნებლად იმაში, თუ რაოდენ საინტერესოა ჩემთვის ის, რაზედაც თქვენ მე მწერდით, ამასთანავე, ამას ვაკეთებ უფრო მეტი ხალისით, რამეთუ თქვენი შეკითხვები არ აღმოჩენილა ჩემთვის სრული მოულოდნელობა. მართალია, მე ვერ მოვახერხე ისე მკაფიოდ და ლაკონიურად მათი ფორმულირება, როგორც თქვენ, მაინც უნდა გამოგიტყდეთ, რომ ეს პრობლემები უკვე საკმაოდ დიდი ხანია მაღელვებენ.

რამდენიმე ხნის წინ ქალბატონ დ'ეგიიონის სალონში მე ვესაუბრებოდი ამ პრობლემებზე ჩემს ძველ მეგობარს, დამიენ მიტონს; ის აგრეთვე ესწრებოდა იმ პროცესს, როცა შევალიე დე მერე მე მისვამდა კითხვებს სათამაშო კამათელზე. ამ პერიოდიდან ბატონი მიტონი, ბუნებრივია, ინტერესდება ამ საკითხებით და ხშირად მეკითხება იმის შესახებ, თუ რას მივაღწიე მე ალბათობათა მათემატიკის შესწავლაში. თქვენ, ცხადია, იცით, რომ ბატონი მიტონი ძალიან განათლებული ადამიანია; დაინტერესებულია არა მარტო ლიტერატურით (ამასთან, წარმოადგენს მცოდნე, საქმიან და გამოჩენილ მოღვაწეს), არამედ მეცნიერებითაც და მისი გონების სიმახვილე სამართებლის პირივით ბასრია. მაგრამ, ამასთანავე მას გააჩნია თვისება, რომელიც არცთუ იშვიათად მაიძულებს მას ვეკამათო: ყველაფერზე მას სრულიად განსაზღვრული მოსაზრება გააჩნია, იმაზეც კი, რაც პირველად ესმის. მისი ეს თავდაჯერებულობა მე მაღიზიანებს და ჩემი შესაძლებლობის ფარგლებში ვცდილობ მას დავუმტკიცო, რომ მისი მოსაზრება წინდაუხედავია. იმისთვის, რომ თქვენ შეძლოთ შეიქმნათ წარმოდგენა ამ ადამიანზე, ნება მიბოძეთ მოვიყვანო შემდეგი მაგალითი. თუკი კამათის დროს მე ვახერხებ კუთხეში მივაყენო ბატონი მიტონი, მაშინ ის ამთავრებს კამათს ერთობ თავისებურად: ასეთ შემთხვევებში ის ჩვეულებრივ ამბობს, რომ აღიარებს მისი საკუთარი და, თუნდაც, საპირისპირო მოსაზრების სავსებით სერიოზულად დასაბუთების შესაძლებლობას და ამიტომ არ სურს ჩემი დარწმუნება თავისი მოსაზრების ჭეშმარიტებაში; გარდა ამისა, მზადაა აღიაროს, რომ მე მაქვს უფლება გამოვთქვა საკუთარი მოსაზრება, მაგრამ სწორედ ამიტომ მთხოვს, რომ არ მოვახვიო თავს ჩემი აზრი. მისი საყვარელი გამოთქმაა: „ერთნი უპირატესობას ქერა ქალებს ანიჭებენ, სხვანი კი — შავგვრემნებს“. ჩვეულებრივ, ის ამატებს, რომ ამ საკითხში ის თავისუფალია ცრურწმენებისგან. ამაზე დისკუსია უმეტესწილად მთავრდება და საუბარი გადადის ლამაზი ქალების თემაზე (ამ სფეროში მე არ გამაჩნია საფუძველი ეჭვი შევიტანო ბატონი მიტონის ცოდნის საფუძვლიანობასა და დასაბუთებულობაში).

ყოველივე თქმულის შემდეგ, მე ვფიქრობ, თქვენ უკვე შეგიძლიათ განსაჯოთ, როგორია ბატონი მიტონი ყველა თავისი სათნოებითა და ნაკლოვანებებით. ისტორია გვასწავლის, რომ

ადამიანებს, რომლებსაც — როგორც მას თვითონ — სჯერათ იმისი, რომ ყველას აქვს უფლება ჰქონდეს საკუთარი აზრი და არავინ უნდა გაბედოს შეეცადოს შეზღუდოს სხვების ეს თავისუფლება, სინამდვილეში კაცობრიობისთვის ბევრად ნაკლები უბედურება მოუტანიათ, ვიდრე მათ, ვინც ცდილობდა ჭეშმარიტება — რეალური ან წარმოსახვითი — ცეცხლითა და მახვილით, ინკვიზიციითა და კოცონზე დაწვით მოეხვია თავზე სხვებისთვის. ისტორიული მოვლენების ჭრილში მე არ მიკვირს, რომ ბევრი ადამიანი ფიქრობს ისე, როგორც მიტონი. რაც შეეხება მეცნიერებას, მისთვის აზროვნების თავისუფლება მსგავსია მაცოცხლებელი ჰაერის, რომლის გარეშეც ის დაიღუპება. თუმცა არც აქ შემიძლია ყველაფერში დავეთანხმო მიტონს: მეცნიერებაში აზროვნების თავისუფლება ისე შორს არ უნდა გავრცელდეს, რომ მოხდეს ფაქტების უგულებელყოფა. თუკი ადამიანთა მოსაზრებები ეწინააღმდეგება ფაქტებს ან, უბრალოდ, უაზრობაა, ვინაიდან ისინი თავისთავად წინააღმდეგობრივია და ალოგიკურია, მაშინ ასეთი აზრების გამოთქმა, სულ მცირე, სისულელეა. მაგრამ სამეცნიერო კამათის დროს თუ უარს ვიტყვით მისწრაფებაზე დავარწმუნოთ სხვები ჩვენი აზრების სისწორეში, დავეყრდნობით რა მხოლოდ ფაქტებსა და ლოგიკას, მაშინ თვითონ მეცნიერების განვითარება შეჩერდება. ბუნებრივია, რომ მხედველობაში მაქვს მხოლოდ არგუმენტირებული დარწმუნება და არა საკუთარი აზრების ძალადობრივი თავსმოხვევა სხვებისთვის ან, სულაც, ორიგინალური მოსაზრების ჩახშობა.

ახლა ჩემი სურვილია გადავიდე ალბათობის შესახებ ბატონ მიტონთან ჩვენი საუბრის გადმოცემაზე, რომლის შინაარსიც მე იმავე საღამოს ჩავიწერე. რა თქმა უნდა, ეს სიტყვასიტყვით ჩანაწერი არ არის, რამეთუ წერილობით მე მოვახერხე საკუთარი მოსაზრებები ჩამომეყალიბებინა უფრო მკაფიოდ, ვიდრე ის ჟღერდა ცხარე კამათის დროს, ცხელ გულზე ნათქვამი. გასაგებია, რომ მე ვერ გავუძელი ცდუნებას ჩამეწერა ნათქვამი ასეთი, გარკვეულწილად გადახარშული სახით, მაგრამ სამართლიანობა მოითხოვდა, რომ ბატონი მიტონის ნათქვამიც დაქვემდებარებოდა დახვეწას, რაც მე გავაკეთე კიდეც. მართალია ჩვენი საუბრის ჩანაწერი არაა იმდენად ზუსტი, როგორც სასამართლოს ოქმი, მაგრამ ვიმედოვნებ, რომ ამ სახით მე მოვახერხე უკეთ გადმომეცა ჩვენი კამათის არსი, ვიდრე ის იქნებოდა ჩვენი საუბრის სიტყვასიტყვით ჩაწერის შემთხვევაში.

საუბრის დასაწყისში, ბატონი მიტონის შეკითხვაზე, თუ რას მივაღწიე შემთხვევითობის მათემატიკური კანონზომიერებების კვლევისას, მე მოკლედ გადმოვეცი ჩემ მიერ თქვენთან გამოგზავნილი წერილების შინაარსი. მე განვმარტე ალბათობა, როგორც დარწმუნებულობის ხარისხი და ამასთან ხაზი გავუსვი, რომ, ფაქტობრივად, ნებისმიერი ალბათობა არის პირობითი და მისი მნიშვნელობა იცვლება პირობების შეცვლასთან ერთად. მე მივუთითე, რომ ხდომილების ფარდობითი სიხშირე ირხევა მისი ალბათობის, როგორც რხევის ცენტრის, ირგვლივ შემთხვევითობის ახირების გამო. რასაკვირველია, ვაგრძელებდი მე, ეს სამართლიანია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ხდომილების მოხდენაზე ან არმოხდენაზე დაკვირვება ხდება ერთსა და იმავე გარემოებებში, ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად ჩატარებულ ცდათა მიმდევრობაში, სადაც არ არსებობს არანაირი ურთიერთგავლენა. ამასთან, მე მოვიშველიე შემდეგი მაგალითი. ხსენებული წესი სამართლიანია, თუ ყუთიდან, რომელშიც მოთავსებულია თეთრი და შავი ბურთები მოცემული პროპორციით, ჩვენ მიმდევრობით ვიღებთ ბურთს და ყოველი ამოღების შემდეგ ამოღებულ ბურთს უკან ვაბრუნებთ. შემდგომ კარგად შევანჯღრევთ ყუთს და ამით აღვადგენთ მდგომარეობას, რომელშიც ყუთი იმყოფებოდა წინა ამოღების დროს. სწორედ ამ მაგალითს შეეხებოდა მიტონის პირველი შენიშვნა.

მ ი ტ ო ნ ი

ბატონო პასკალ, ჩემთვის გასაგება აღფრთოვანება, რომელსაც თქვენ განიცდით იმასთან დაკავშირებით, რომ თქვენ პირველმა მოახერხეთ ამ საინტერესო კანონის ჩამოყალიბება. თუმცა, როგორც მე მეჩვენება, მისი გამოყენების არეალი საკმაოდ ვიწროა: თუ არ ჩავთვლით ლატარიას და აზარტულ თამაშებს (რომლებიც, სხვათა შორის, მეც მაინტერესებს, მაგრამ არა იმ დონეზე, როგორც ჩვენს საერთო მეგობარს, შევალიე დე მერეს), მე ძნელად წარმომიდგე-

ნია სიტუაცია, რომელშიც შესრულდება ამ თეორემის პირობები. თქვენ, ბატონო პასკალ, ცხადია, იცით, რომ მე ხშირად ვიმყოფები დოღზე არა ფულის მოგების მიზნით (საბედნიეროდ, მე ამის საჭიროება არ მაქვს), არამედ კარგი საზოგადოების ხათრით. მაგრამ, როგორც კი ვხვდები დოღზე, მე ინტერესით ვადევნებ თვალს შეჯიბრებას და საკუთარი გამოცდილებიდან ვიცი, რომ შეუძლებელია განვჭვრიტოთ, თუ რომელი ცხენი მოიგებს რბოლას, თუკი ვიხელმძღვანელებთ იმავე წესებით, რომლებითაც სათამაშო კამათლის გაგორებისას, თუმცა აქაც საქმე გვაქვს შემთხვევითობასთან. დოღში თქვენი კანონი არ გამოდგება: ვინაიდან, თუ მასში არაერთხელ მიიღებენ მონაწილეობას ერთი და იგივე ცხენები და მხედრები (რაც არასოდეს ხდება), მაშინ ცხენებს ექნებათ სხვადასხვა შანსი, რამეთუ აქ სწორედ ძალიან ბევრია დამოკიდებული როგორც ცხენების, ისე მხედრების მდგომარეობაზე. ხშირად ხდება, რომ რომელიღაცა ცხენი წაიბორძიკებს და ეცემა, ან კიდევ ფეხი გადაუბრუნდება, ან მხედარი მიიღებს ტრავმას და მაშინაც კი, თუ შემდეგი შეჯიბრისთვის ისინი ფორმაში დგებიან, მიუხედავად ამისა, მომხდარი უკვალოდ არ ჩაივლის.

პ ა ს კ ა ლ ი

კანონის სამართლიანობა არ ირღვევა იმის გამო, რომ ზოგიერთ შემთხვევაში მისი დაშვებები არ სრულდება და ამიტომ მისი გამოყენება არ შეიძლება. ის საეჭვოა მხოლოდ იმ შემთხვევებში, როცა მისი დასკვნები გარკვეულ მაგალითში აღმოჩნდა მცდარი, თუმცა მისი გამოყენების პირობები შესრულებული იყო. მაგრამ თქვენ მართალი ხართ, როცა ამტკიცებთ, რომ არსებობენ შემთხვევითი ხდომილებები, რომელთა მოხდენას შესაძლებელია დავაკვირდეთ მხოლოდ ერთხელ, რადგანაც მათი დაკვირვება ანალოგიურ პირობებში მეტჯერ შეუძლებელია. ასეთ შემთხვევით ხდომილებებს მე ვუწოდებ *ერთჯერად შემთხვევით ხდომილებებს.*

მ ი ტ ო ნ ი

მაშასადამე, ასეთი ერთჯერადი შემთხვევითი ხდომილებების დროს ალბათობის განსაზღვრა შეუძლებელია ემპირიული გზით, ანუ ფარდობით სიხშირეზე დაკვირვებით.

პ ა ს კ ა ლ ი

თქვენ მართალი ხართ. აკი ამ დროს ჩვენ შეგვიძლია ჩავატაროთ მხოლოდ ერთი დაკვირვება, შესაბამისად, ფარდობითი სიხშირის მნიშვნელობა შეიძლება იყოს მხოლოდ 0 ან 1.

მ ი ტ ო ნ ი

რას უნდა ნიშნავდეს მაშინ ასეთი ერთჯერადი შემთხვევითი ხდომილებებისთვის მტკიცებულება, რომ მათი ალბათობა ტოლია გარკვეული რიცხვის, მაგალითად 1/2-ის?

პ ა ს კ ა ლ ი

ამ მტკიცებულების აზრი იგივეა, რაც იმ ხდომილებების შემთხვევაში, რომელთა დაკვირვება შესაძლებელია ნებისმიერ რიცხვჯერ. გაიხსენეთ, მაგალითად, ფართოდ გავრცელებული ჩვეულება, როცა ორი ბავშვი ექაჩება, თითოეული თავის ბოლოს, წიწილის მკერდის ძვალს, რომელსაც გააჩნია ჩანგლის ფორმა, მანამ, სანამ ის არ გატყდება. ამასთან, თითოეული ჩაიფიქრებს სურვილს; ითვლება, რომ ის, რომელსაც არ გაუტყდება ძვლის ბოლო, აისრულებს თავის სურვილს. მაგრამ, ვინაიდან აღნიშნული ძვალი სიმეტრიულია, ამიტომ გონივრულია ვამტკიცოთ, რომ ორივე ბავშვს შეუძლია მოიგოს ალბათობით 1/2, მიუხედავად იმისა, რომ აღნიშნული ძვლის გატეხა მხოლოდ ერთხელ შეიძლება.

მ ი ტ ო ნ ი

ამ მაგალითში ჩვენ ფაქტობრივად შეგვიძლია ვილაპარაკოთ თქვენი კანონის სამართლიანობაზე, რადგანაც, თუ არაერთხელ დავაკვირდებით, როგორ ტყდებიან ასეთი ძვლები, მაშინ

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ დაახლოებით ნახევარ შემთხვევაში მოიგებს როგორც ის ბავშვი, რომელსაც უჭირავს ძვლის მარცხენა, ისე ის ბავშვი, რომელსაც უჭირავს მარჯვენა ბოლო. ასე არ არის საქმე დოღის შემთხვევაში. ამ დროს დილემა გადაუჭრელია. სხვათა შორის, მე გეთანხმებით თქვენ ერთ რამეში: დოღის შემთხვევაშიც შეგვიძლია ვამტკიცოთ, რომ ერთ-ერთი ცხენი გაიმარჯვებს გარკვეული ალბათობით, ვთქვათ, ალბათობით 1/2. ფაქტობრივად, ამის შესახებ დოღის მაყურებლებს გააჩნიათ საკმარისად გარკვეული მოსაზრება და სწორედ ამიტომ აკეთებენ ფსონებს დოღის შედეგის შესახებ. თუმცა მე შემინიშნავს, რომ, ჩვეულებრივ, ადამიანების მოსაზრებები ძალიან განსხვავებულია, რაც დამოკიდებულია იმ ინფორმაციაზე, რაც მათ გააჩნიათ ცხენების შესახებ. მოყვანილი მაგალითის საფუძველზე მე ვასკვნი, რომ ადამიანები განსხვავებულად აფასებენ ერთსა და იმავე ხდომილების ალბათობებს და არ გამაჩნია საფუძველი, რომელიც დამეხმარება განვსაჯო, თუ რომელი მათგანია მართალი. ის, ვისი ცხენიც პირველი მიდის მიზნამდე, ამით ჯერ კიდევ ვერ ამტკიცებს თავის სისწორეს ან იმათ სისწორეს, ვინც ფსონი დადო ამ ცხენზე; მართალია მხოლოდ ის, რომ მათ გაუმართლათ. რასაკვირველია, როცა საუბარია აზარტულ თამაშებზე, ყველა სპეციალისტი იხრება ერთი მოსაზრებისკენ, მაგრამ ასე ხომ მხოლოდ გამონაკლის შემთხვევებში ხდება. თქვენ, ბატონო პასკალ, განმარტეთ ხდომილების ალბათობა, როგორც მისი მოხდენის დარწმუნებულობის ხარისხი. მე მეჩვენება მიზანშეწონილად, რომ ეს განმარტება შეიცვალოს შემდეგნაირად: მოცემული შემთხვევითი ხდომილების ალბათობას ცალკეული ადამიანისთვის გააჩნია თავისი მნიშვნელობა, ვინაიდან ის გამოხატავს ამ ხდომილების მოხდენაში მისი დარწმუნებულობის ხარისხს.

მე მიმაჩნია, რომ შემთხვევითი ხდომილების ალბათობაზე უნდა ვისაუბროთ ისევე, როგორც ლექსების, სურათების ან ქალების სილამაზეზე; გემოვნებაზე არ დავობენ. გემოვნებები განსხვავებულია და ამიტომ ადამიანები შემთხვევითი ხდომილებების შანსებს განსხვავებულად აფასებენ.

პ ა ს კ ა ლ ი

ამაში მე თქვენ ვერ დაგეთანხმებით; მიმაჩნია, რომ შემთხვევითი ხდომილების ალბათობა არ არის დამოკიდებული ჩვენს მოსაზრებაზე მის შესახებ, ის წარმოადგენს გარკვეულ რიცხვს, რომლის მნიშვნელობა სხვადასხვა ადამიანის მიერ სხვადასხვანაირად ფასდება. თუკი ვინმე დოღზე მე მირჩევს, რომ ფსონი დავდო გარკვეულ ცხენზე და ეს ცხენი სინამდვილეში მოიგებს, ეს ჯერ კიდევ არ ნიშნავს, რომ ჩემმა მრჩეველმა სწორად შეაფასა დოღის მოსალოდნელი შედეგი. მაგრამ, თუ მისი რჩევები უმეტეს შემთხვევებში, ვთქვათ 9/10-ში, წარმატებულია, ხოლო მეორის რჩევები წარმატებულია მხოლოდ შემთხვევების 1/10 ნაწილში, მაშინ ხომ არ გეჩვენებათ თქვენ, რომ ყური უნდა დაუგდოთ პირველ მრჩეველს, ხოლო მეორის რჩევები შეიძლება უგულებელყოთ?

მ ი ტ ო ნ ი

რა თქმა უნდა.

პ ა ს კ ა ლ ი

შეგვიძლია თუ არა ამ შემთხვევაში ჩვენ ვილაპარაკოთ, რომ პირველის რჩევები უფრო საიმედოა, ვიდრე მეორის?

მ ი ტ ო ნ ი

ცხადია.

პ ა ს კ ა ლ ი

და, აი, მე თქვენ გამოგიჭირეთ. აკი ეს სწორედ იმას ნიშნავს, რომ პირველ მრჩეველს შეუძლია უკეთესად შეაფასოს დოღის შედეგის რეალური ალბათობა; ასე რომ, ამ შემთხვევაშიც

აზრი აქვს ვილაპარაკოთ მოცემული ხდომილებების ალბათობების ჭეშმარიტ მნიშვნელობებზე, თუმცა ისინი ზუსტად არავინ იცის და სხვადასხვა პირს შეუძლია ისინი სხვადასხვანაირად შეაფასოს.

მ ი ტ ო ნ ი

მე ვაღიარებ, რომ თქვენ ძალიან მოხერხებულად გამაცურეთ, თუმცა, ფაქტობრივად, თქვენ მხედველობაში გაქვთ სრულიად განსხვავებული ხდომილების ალბათობა, კერძოდ, ალბათობა იმისა, რომ დოღის სპეციალისტი იძლევა სწორ რჩევას. მაგრამ ამ შემთხვევაში ლაპარაკია უკვე არა ერთჯერად შემთხვევით ხდომილებაზე, არამედ ხდომილებაზე, რომლის გამეორება შესაძლებელია ბევრჯერ და, ამდენად, მისი ალბათობა შევაფასოთ ფარდობით სიხშირეზე დაკვირვების საფუძველზე. მაგრამ, მოდით, დოღი გვერდზე გადავდოთ, აკი მნიშვნელოვანია არა მაგალითი, არამედ პრინციპული საკითხი. მე მსურს გავარკვიო, თუ რას ეფუძნებით თქვენ, როცა საუბრობთ ალბათობაზე საზოგადოდ, დამოუკიდებლად პირისგან, რომელსაც უყალიბდება მოსაზრება მისი მნიშვნელობის შესახებ. მე დარწმუნებული ვარ, რომ ნებისმიერი ალბათობა სუბიექტურია; თუ თქვენ თვლით, რომ ეს ასე არ არის, რომ გონივრულია ვისაუბროთ ობიექტურ ალბათობაზე, მაშინ კეთილი ინებეთ და დამიმტკიცეთ თქვენი სისწორე.

პ ა ს კ ა ლ ი

მე ხალისით ვაღიარებ, რომ ვერ შევძლებ ამის დამტკიცებას, ეს აქსიომაა და, როგორც ცნობილია, აქსიომების დამტკიცება არც შეიძლება და არცაა საჭირო. მე შემიძლია მხოლოდ ის დავამტკიცო, რომ ეს აქსიომა ისევე გონივრულია, როგორც ის აქსიომები, რომელთა სისწორეში არც თქვენ და არც არავის აზრადაც არ მოუვა ეჭვი შეიტანოს და რომ ამ აქსიომის შედეგები თანხვედრაშია ჩვენს პასუხთან. ალბათ, თქვენ გაგიკვირდებათ, თუ ვიტყვი, რომ ალბათობის ობიექტურობის აქსიომა ბუნებრივია და ის თავისთავად ცხადი გაგრძელებაა ერთი, ყველას მიერ აღიარებული აქსიომის.

მ ი ტ ო ნ ი

რომელი აქსიომა გაქვთ თქვენ მხედველობაში?

პ ა ს კ ა ლ ი

მიზეზობრიობის აქსიომა, რომლის თანახმად, ბუნებაში მოვლენების მიმდინარეობა ზუსტად განსაზღვრულია იმ ფაქტორების ერთობლიობით, რომლებიც გავლენას ახდენენ მათზე, და ერთნაირ მიზეზებს ყოველთვის მივყავართ ერთნაირ შედეგებამდე. ამის დამტკიცება არ შეიძლება და სწორედ ამიტომ ის ფუძემდებლურია. განა შესაძლებელია არაფრისგან რაიმეს დამტკიცება? მე ვიმედოვნებ, რომ თქვენ ეჭვი არ გეპარებათ მიზეზობრიობის პრინციპში?

მ ი ტ ო ნ ი

ეჭვი არ მეპარება, თუმცა არასოდეს მომსვლია თავში, რომ ეს დაუმტკიცებელი აქსიომაა.

პ ა ს კ ა ლ ი

ის არა მარტო დაუმტკიცებელია, არამედ არც სჭირდება დამტკიცება; ის წარმოადგენს ჩვენი სამეცნიერო მსოფლმხედველობის საფუძველს და მეცნიერების მიერ დადგენილი ბუნების ნებისმიერი კანონი წარმოადგენს დამატებით არგუმენტს ამ აქსიომის სისწორისა და აუცილებლობისათვის. თუმცა მან, ვინც აღიარებს მიზეზობრიობის აქსიომას, უნდა აღიაროს მეორე აქსიომაც, რომლის თანახმად, შემთხვევით ხდომილებებს გააჩნიათ გარკვეული, ჩვენგან დამოუკიდებელი და, ამდენად, ობიექტური ალბათობები, რამეთუ ეს სხვა არაფერია, თუ არა იმავე პრინციპის უფრო უნივერსალური და ზუსტი ფორმულირება.

მ ი ტ ო ნ ი

თქვენი მსჯელობა გასაოცარი და ჩემთვის გაუგებარია. ხომ არ შეგიძლიათ ის ამიხსნათ რაიმე მაგალითზე?

პ ა ს კ ა ლ ი

დიდი სიამოვნებით. მიზეზობრიობის განზოგადებული პრინციპი შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: თუ ჩვენთვის ცნობილია ყველა გარემოება, რომლებიც გავლენას ახდენენ მოცემულ მოვლენაზე, მაშინ ისინი ცალსახად განსაზღვრავენ მის მიმდინარეობას. მაგრამ, თუ ჩვენთვის არსებითი გარემოებების მხოლოდ ნაწილია ცნობილი, მაშინ ისინი საშუალებას აძლევენ მოვლენას შეიცვალოს ბევრი სხვადასხვანაირი გზით, თუმცა, ამის მიუხედავად, ცალსახად განსაზღვრავენ თითოეული გზის ალბათობას. როდესაც ამბობენ, რომ ხდომილების მოხდენა დამოკიდებულია შემთხვევითობაზე, გულისხმობენ შემდეგს: მხედველობაში მიღებული გარემოებები ცალსახად არ განსაზღვრავენ, თუ კონკრეტულად რა მოხდება, არამედ საშუალებას იძლევიან დავადგინოთ როგორც ის, რომ ხდომილება მოხდება, ისე ისიც, რომ ის არ მოხდება; ისინი განსაზღვრავენ თითოეული ამ შესაძლებლობის ალბათობებს. ის, რომ ზოგიერთ შემთხვევაში ეს ალბათობები ჩვენთვის ზუსტადაა ცნობილი, სხვა შემთხვევებში — დაახლოებით, ხოლო დანარჩენ შემთხვევებში — სრულიად უცნობია, არ შეეხება არც საქმის არსს და არც მიზეზობრიობის პრინციპს. ეს იმის ანალოგიურია, როგორც ზოგიერთ შემთხვევაში სრულად დეტერმინისტული მოვლენებისთვის ჩვენთვის ცნობილია ზუსტი კანონი, რომელსაც ექვემდებარება მათი განვითარება (მაგალითად, როგორ დაეცემა ნასროლი ქვა), მაშინ, როცა სხვა შემთხვევებში ასეთი ზუსტი კანონი ჩვენთვის უცნობია. რადგანაც თქვენ გსურდათ, რომ მე მომეყვანა თქვენთვის გასაგები მაგალითი, მოდით განვიხილოთ ქანქარის მოძრაობა, რომელსაც სწავლობდა გალილეი. თუ ცნობილია ქანქარის სიგრძე და ცნობილია როდის და რომელი მდებარეობიდან იქნა ქანქარა მოყვანილი მოძრაობაში, მაშინ (იგულისხმება, რომ ხახუნი და ჰაერის წინააღმდეგობა უგულებელყოფადია) დროის ნებისმიერი მომენტისათვის ჩვენ შეგვიძლია ზუსტად გამოვთვალოთ ქანქარის მდებარეობა. მაგრამ, თუ ჩვენთვის ცნობილია ქანქარის სიგრძე და საწყისი მდებარეობა, თუმცა უცნობია დროის რომელ მომენტში დაიწყო მან მოძრაობა, მაშინ ჩვენ არ შეგვიძლია ზუსტად დავადგინოთ რომელ მდებარეობაში იქნება ის დროის გარკვეულ მომენტში, მაგრამ, ამის მიუხედავად, ალბათობით 1/2 შეგვიძლია ვამტკიცოთ, რომ ის იქნება ყველაზე დაბალი მდებარეობიდან მარჯვნივ ან მარცხნივ; როგორი α კუთხეც არ უნდა დასახელდეს, შესაძლებელია გამოითვალოს ალბათობა იმისა, რომ ქანქარის მიმართულება დაკვირვების მოცემული მომენტისათვის ვერტიკალური მდებარეობიდან გადაიხრება α-ზე ნაკლები კუთხით.

მ ი ტ ო ნ ი

ჩემთვის გასაგები ხდება თქვენი მსჯელობა, მაგრამ ეს სულაც არ ნიშნავს იმას, რომ მე მას ვღებულობ. თუ სწორად გაგიგეთ, მაშინ სრული დეტერმინისტულობა წარმოადგენს ალბათობის ობიექტურობის პრინციპის მხოლოდ ზღვრულ შემთხვევას, განა ასე არ არის?

პ ა ს კ ა ლ ი

თქვენ მე შესანიშნავად გამიგეთ. ეს, ფაქტობრივად, იდეალური ზღვრული შემთხვევაა, რომელიც სინამდვილეში აბსოლუტურად ზუსტად არასოდეს განხორციელდება, არამედ მხოლოდ დაახლოებით. აკი თქვენთვის არასოდეს იქნება ზუსტად ცნობილი ყველა გარემოება, რომელიც გავლენას ახდენს მოცემულ მოვლენაზე. მოყვანილ მაგალითში მე მივუთითე, რომ, თუ მხედველობაში არ მივიღებთ ჩამოკიდების წერტილში ხახუნს და ჰაერის წინააღმდეგობას, მაშინ შეგვიძლია ზუსტად გავთვალოთ ქანქარის მოძრაობა. სინამდვილეში ამ მიზეზების სრულად უგულებელყოფა შეუძლებელია. თუკი ჩვენ ქანქარას მოვათავსებდით თუნდაც დახურულ ჭურჭელში და ამოვქაჩავდით იქიდან ჰაერს — როგორც იმ ექსპერიმენტში, რომელიც მე

ჩავატარე ტორიჩელის კვალდაკვალ, — მაშინაც კი ჩვენ სრულად ვერ გამოვრიცხავდით ხახუნს და იმ შენობის ვიბრაციას, რომელშიც ტარდება ექსპერიმენტი, აგრეთვე მთელ რიგ სხვა, მეტად ან ნაკლებად, შემთხვევით ფაქტორებს. ასეთი სურათია ყველა სხვა შემთხვევაშიც, როცა ჩვენ ვთვლით, რომ საქმე გვაქვს ზუსტ კანონებთან. თუკი ჩვენ მოვახერხებთ კიდეც ოდესმე გავითვალისწინოთ ყველა მნიშვნელოვანი მიზეზი, რომელიც განსაზღვრავს მოვლენას, მაშინაც კი მოვლენის მიმდინარეობის განჭვრეტა შესაძლებელია მხოლოდ საკმაოდ ზოგად მიმართებაში; უმცირეს დეტალებში მისი განჭვრეტის არანაირი შესაძლებლობა არ არსებობს. იქნებ გახსოვთ ჩემი ექსპერიმენტები, რომლებიც დაკავშირებული იყო ჰაერის წნევის გაზომვასთან. მე მოვახერხე დამემტკიცებინა, რომ მაღალ მთაზე, მაგალითად, პიუ-დე-დომის მთის მწვერვალზე, ვერცხლის წყლის სვეტი უფრო დაბალია, ვიდრე მის ძირში, ვინაიდან მთის ძირში ჰაერის სვეტის წონა მეტია, ვიდრე მთის წვერზე, რამდენადაც ის უფრო მაღალია. თუმცა ჰაერის წონა არ რჩება მუდმივი თუნდაც სივრცის ერთსა და იმავე წერტილში — ის დამოკიდებულია ამინდზე და ტენიანობაზე, ხოლო ეს ფაქტორები მუდმივად იცვლებიან და, ამასთან, გამოუცნობი გზით. ამრიგად, შეუძლებელია ვამტკიცოთ, რომ ჰაერის წონას პარიზში გააჩნია სრულიად გარკვეული მნიშვნელობა; ჩვენ შეგვიძლია მხოლოდ ვისაუბროთ იმის შესახებ, რომ დიდი ალბათობით ის აღმოჩნდება ორ განსაზღვრულ მნიშვნელობას შორის. მაგრამ ეს ალბათობა განსაზღვრულია პარიზის გეოგრაფიული მდებარეობით, წელიწადის დროით და ამინდით და, რასაც არ უნდა ფიქრობდეთ თქვენ ალბათობაზე, ამის გამო ტორიჩელის ცდაში ვერცხლისწყლის სვეტი არც აიწევა და არც დაიწევა მილიმეტრის მეასედითაც კი. გავიხსენოთ აგრეთვე ვარსკვლავთცვენის მაგალითი. როგორც ცნობილია, ყველაზე ხშირად ვარსკვლავთცვენა შეინიშნება აგვისტოში, მაგრამ ისინი ცვივა მაშინაც, როცა ამას ვერავინ ხედავს. ჩამოვარდნილი ვარსკვლავები აგვისტოში მეტია არა იმის გამო, რომ ჩვენ ასე ვფიქრობთ, არამედ, პირიქით, ჩვენ ამაზე ასე მხოლოდ იმიტომ ვფიქრობთ, რომ ამ თვეში მათი რიცხვი რეალურად მეტია. მთვარეზე მიმდინარე შემთხვევით მოვლენებსაც გააჩნია გარკვეული ალბათობები, თუმცა არცერთ ჩვენგანს მათზე არ შეიძლება ჰქონდეს საკუთარი აზრი, რამეთუ ჩვენ ისიც კი არ ვიცით, თუ რა მოვლენებზეა საუბარი.

მ ი ტ ო ნ ი

არ გააგრძელოთ, ბატონო პასკალ, აქ მე თქვენ სავსებით გეთანხმებით. მე, ისევე როგორც თქვენ, მივიჩნევ, რომ ალბათობებს, რომლებიც შეეხება არაცოცხალი ბუნების მოვლენებს, გააჩნიათ ობიექტური მნიშვნელობა; ამაში მე ეჭვი არასოდეს მეპარებოდა. თუმცაღა, ნება მიბოძეთ, შეგახსენოთ, რომ ჩვენს კამათში თქვენ ისევ გადაიხარეთ ისეთ მხარეს, სადაც შესაძლებლობა გაქვთ დაეყრდნოთ მყარ საფუძველს, რამეთუ თქვენ მიერ მოყვანილი ყველა მაგალითი ეხება მოვლენებს, რომელთა დაკვირვება შესაძლებელია ერთსა და იმავე პირობებში (თუ პრაქტიკულად არა, მაშინ, პრინციპში, ნებისმიერ რიცხვჯერ მაინც) და, ამდენად, ალბათობათა რეალური მნიშვნელობების შესახებ დასკვნის გაკეთება შესაძლებელია მათი ფარდობითი სიხშირეებით. ჩემი შენიშვნები კი შეეხებოდა ერთჯერად შემთხვევით მოვლენებს, ისეთებს, როგორიცაა დოღის შედეგი ან გემების დაღუპვა. მე მომავალშიც დაჟინებით ვიდგები იმ აზრზე, რომ ასეთ შემთხვევებში ალბათური მსჯელობა შესაძლებელია იყოს მხოლოდ სუბიექტური.

პ ა ს კ ა ლ ი

ერთჯერად შემთხვევით მოვლენებს რომ ობიექტური ალბათობები გააჩნიათ, მე დარწმუნებული ვარ იმიტომ, რომ მათ აგრეთვე გააჩნიათ მიზეზები. გარდა ამისა, მე ვერ ვხედავ პრინციპულ განსხვავებას შემთხვევითი ხდომილებების ალბათობათა ობიექტურობის საკითხში იმის მიუხედავად, ისინი განეკუთვნებიან არაცოცხალ თუ ცოცხალ ბუნებას. მიზეზობრიობის კანონი სამართლიანია ცოცხალი ბუნებისთვისაც; ცოცხალი ბუნების შესაბამისი ხდომილებების ალბათობები ისევე განსაზღვრულია და ობიექტურია, განსხვავება მხოლოდ ისაა, რომ

აქ კავშირები უფრო მეტად რთულია და, შესაბამისად, უფრო უსაზღვროც. სწორედ ამიტომ ცოცხალ ბუნებაში ხდომილებების ზუსტად განჭვრეტა ჩვენთვის უფრო რთულია, ვიდრე არაცოცხალში; მაგრამ აქედან, ფაქტობრივად, მხოლოდ ის გამოდის, რომ ამ მიმართულებით ალბათობათა გამოკვლევა, როცა მათი ჩატარება შესაძლებელია, უფრო მნიშვნელოვანია.

თუ თქვენ გნებავთ, უფრო დაწვრილებით განვიხილოთ გემის დაღუპვის მაგალითი. ეჭვგარეშეა, რომ ვაჭრებს და კომერსანტებს გააჩნიათ გარკვეული მოსაზრებები იმასთან დაკავშირებით, თუ როგორია ალბათობა იმისა, რომ გემი უდანაკარგოდ მიაღწევს დანიშნულების ადგილს. მე გამიგია, რომ ინგლისში ვაჭრები ცდილობენ დაიზღვიონ თავი გემით გაგზავნილი ტვირთების დაკარგვისგან და ამ მიზნით წინასწარ უხდიან გარკვეულ თანხას იმ საზოგადოებას, რომელიც სპეციალურად ამითაა დაკავებული; საზოგადოება სანაცვლოდ ვაჭარს უნაზღაურებს ზარალს, თუკი ტვირთი დაიკარგება გემის დაღუპვის გამო ან პირატების თავდასხმის შედეგად. თუკი ტვირთი უსაფრთხოდ მიაღწევს დანიშნულების ადგილამდე, მაშინ პირველადი სადაზღვევო შენატანი რჩება საზოგადოებას. უეჭველია, პირველადი შენატანის დადგენისას ვაჭარი და საზოგადოება რაღაცნაირად აფასებენ ტვირთის დაკარგვის ალბათობას და, მართალია, ორივე მხარის მსჯელობა ატარებს წმინდა სუბიექტურ ხასიათს, ამის მიუხედავად, ჩემი აზრით, ამ შემთხვევაშიც შესაძლებელია ვილაპარაკოთ გემის უსაფრთხოდ ჩასვლის ობიექტურ ალბათობაზე; მხოლოდ საჭიროა პატიოსნად ვაღიაროთ, რომ ჩვენთვის ეს ალბათობა უცნობია. როგორიც არ უნდა იყოს ჩვენი პირადი აზრი გემის ნავსადგურში უსაფრთხოდ ჩასვლის შანსებზე, ის არანაირად არ აისახება გემის ბედზე. მასზე გავლენას ახდენს მხოლოდ ობიექტური ალბათობა, რომელიც სხვას არაფერს წარმოადგენს, თუ არა ობიექტური გარემოებების კვინტესენციას. თქვენ როგორ გგონიათ, თუ თქვენ იფიქრებდით, რომ გარკვეული გემი შეიძლება ჩაიძიროს და ეს სინამდვილეში მოხდებოდა, შეეძლო თუ არა სასამართლოს თქვენთვის დაეკისრებინა პასუხისმგებლობა იმის საფუძველზე, რომ თქვენ გამოიწვიეთ ეს კატასტროფა? განა თქვენ არ აიცილებდით ბრალდებას და არ განაცხადებდით, რომ თქვენს პირად მოსაზრებას არ შეეძლო რამენაირი გავლენა მოეხდინა გემის ბედზე? მოსამართლის ადგილზე, მე თქვენ მოგიხსნიდით ბრალდებას გემის დაღუპვის საქმეში, მაგრამ დავგმობდი თქვენს მოსაზრებას ალბათობის სუბიექტურობის შესახებ. სხვათა შორის, ის გარემოება, რომ სადაზღვევო საზოგადოება, თუნდაც მიახლოებით სწორად აფასებს ამ ალბათობებს, დამოკიდებულია იმაზე, თუ რამდენად ხელსაყრელია მისთვის ეს წამოწყება. თუ საზოგადოება შეცდომით აფასებს რეალურ ალბათობას (რომელიც შემთხვევიდან შემთხვევამდე შეიძლება შეიცვალოს), მაშინ გარკვეული დროის გასვლის შემდეგ ის გაკოტრდება: ან იმის გამო, რომ დანაკარგების ანაზღაურება გადააჭარბებს შემონატანების ჯამს, ან იმიტომ, რომ შემონატანები იმდენად მაღალი იქნება, რომ ვაჭრები მის გადახდაზე არ დათანხმდებიან.

მ ი ტ ო ნ ი

ბატონო პასკალ, თქვენ მე მაგონებთ კატას, რომელიც ყოველთვის ეცემა თათებით. ახლა თქვენ ისევ მოახერხეთ ერთჯერადი ხდომილებებიდან გადასულიყავით ხდომილებებზე, რომლებზეც შეიძლება მრავალჯერადი დაკვირვება და რომელთათვისაც ფარდობით სიხშირეებზე დაკვირვება იძლევა ალბათობის ობიექტურ შეფასებას.

პ ა ს კ ა ლ ი

მერწმუნეთ, ბატონო მიტონ, რომ ამის მიზეზია არა დისკუსიის წარმართვის ჩემი მოკრძალებული შესაძლებლობები, არამედ ის ფაქტი, რომ ჭეშმარიტება ჩემ მხარესაა.

მ ი ტ ო ნ ი

იმისთვის, რომ სიამოვნება მოგანიჭოთ, მე ვიხრები იმ მოსაზრების გაზიარებისკენ, რომ ერთჯერად შემთხვევით ხდომილებასაც შეიძლება მიენიჭოს ჩვენგან დამოუკიდებელი ობიექტური ალბათობა, თუმცა ჩვენ არ ვიცით მისი ზუსტი მნიშვნელობა და, უფრო მეტიც, არ შეიძ-

ლება ის ვიცოდეთ. მაგრამ, ჩემი აზრით, ისეთი საქმეებით დაკავება, რომელთა შემოწმება ცდების საშუალებით შეუძლებელია, ნაკლებად სავარაუდოა იყოს მეცნიერების საგანი; თუკი ასეთი რამეები მაინც არსებობენ, მაშინ იბადება კითხვა: რა უნდა იგულისხმებოდეს მათი არსებობის ქვეშ?

პ ა ს კ ა ლ ი

დიახ, იგივე, რაც ლუკრეციუსის ატომების არსებობის ქვეშ, რომელთა დანახვა ჩვენ აგრეთვე არ შეგვიძლია მიკროსკოპის ქვეშაც კი. ამის მიუხედავად, მათი საშუალებით ჩვენ ყველაფრის ახსნა შეგვიძლია, რასაც ვხედავთ ჩვენ გარშემო სამყაროში. ორივე შემთხვევაში საუბარია სამეცნიერო ჰიპოთეზაზე, რომელთა უშუალო შემოწმება ჩვენ არ შეგვიძლია და ამას ვაკეთებთ მხოლოდ მათგან გამომდინარე შედეგების შემოწმების საშუალებით.

მ ი ტ ო ნ ი

ბატონო პასკალ, თქვენ შეგეძლოთ ყოფილიყავით გამოჩენილი ადვოკატი; მე ვამჩნევ, თუ როგორი სიმარჯვით იყენებთ თქვენ “argumentum ad hominem”[4] მეთოდს. თქვენ ნამდვილად გახსოვთ, მე თავის დროზე გითხარით, რომ ძალიან მიყვარს წიგნის — „საგანთა ბუნებისათვის“ — კითხვა, არამხოლოდ იმიტომ, რომ, ლუკრეციუსის მსგავსად, დიდად ვაფასებ ქალღმერთ ვენერას. მართალია თქვენ ჯერ კიდევ სრულად ვერ დამარწმუნეთ, მაგრამ თქვენი შედარება ატომებთან მაიძულებს, რომ დავფიქრდე. მაშასადამე, თქვენი აზრით, ერთჯერადი ხდომილებების ალბათობები აგრეთვე მიეკუთვნებიან იმ საქმეებს, რომელთა შესახებაც ერთ დროს საუბრობდა პოეტი:[5]

> ისმინე ის, რასაც გეტყვი, და შენ თვითონ, ეჭვგარეშეა, აღიარებ,
> რომ არსებობენ სხეულები, რომელთა დანახვა ჩვენ არ შეგვიძლია.
> ქარი, ჯერ ერთი, ზღვათა ტალღებს სასტიკად ეხეთქება,
> ამსხვრევს გემების არმადას და ზეცის ღრუბლებს ფანტავს.
> . . . .
> გამოდის, ქარები სხეულებია, მხოლოდ ჩვენთვის შეუმჩნეველი.

ამრიგად, თქვენ თვლით, რომ უხილავი ქარი და უცნობი ალბათობა ერთობლივად ძირავენ უბედურ გალერებს?

პ ა ს კ ა ლ ი

შეიძლება ასეც ვთქვათ და ამას დაეთანხმებოდა თვით ლუკრეციუსი — აკი, მისი წარმოდგენებით, მთელი სამყარო იქმნება ატომების შემთხვევითი დაჯახებების შედეგად. თქვენ, თავისთავად ცხადია, გემახსოვრებათ მისი შემდეგი სტრიქონები:

> საგნების საწყისები, რა თქმა უნდა, სრულიად უნებურად,
> ყველა გონებამახვილურად განლაგდა მწყობრი თანმიმდევრობით
> და თავიანთ მოძრაობაზე არ შეთანხმებულან წინასწარ, რასაკვირველია,
> თუკი საგანთა საწყისები სიმრავლეში მრავალნაირია,
> უხსოვარი დროიდან მუდმივ ბიძგებს განიცდიდა,
> საკუთარი სიმძიმით აგრეთვე დატანჯულნი, დაქრიან მუდმივად,
> ყველანაირად ეხამებიან რა ერთმანეთს და ყველაფერს ცდიან,
> რაც კი მათ ხელეწიფებათ წარმოქმნან თავიანთი დაჯახებებით, —
> ხდება ხოლმე აქ, რომ ისინი ამ თავიანთ მუდმივ ხეტიალში,
> გაივლიან რა ყველა სახის შეხამებას და სხვადასხვა მოძრაობას,

[4] ლათინურად — ადამიანის გრძნობებისადმი მიმართვა.
[5] იგულისხმება ლუკრეციუსი — მთარგმნელის შენიშვნა.

შეიყრებიან ისე, საბოლოოდ, რომ მათი ურთიერთერთობლიობა
ხშირად თვითონ ქმნის დიადი საგნების საწყისებს:
ზღვის, მიწის და ზეცის, და ცოცხალი არსებების ტომის.

მ ი ტ ო ნ ი

როგორ არ უნდა მახსოვდეს! მე ასევე მშვენივრად მახსოვს ის ადგილი, სადაც ლუკრეციუსი ადარებდა პირველადი ელემენტების შემთხვევით მოძრაობებს მტვრის ნაწილაკების ცეკვას, რომელზე დაკვირვებაც შეიძლება, თუ გვერდიდან შევხედავთ სინათლის სხივს ოთახში. თქვენი აზრით, შესაძლებელია გამოვიყენოთ ალბათობის თეორია ასეთი მოვლენების შესწავლის დროსაც?

პ ა ს კ ა ლ ი

მე ამაში დარწმუნებული ვარ. ჩემთვის ცხადია, რომ ალბათობის თეორია საშუალებას მოგვცემს მათემატიკური მეთოდებით გამოვიკვლიოთ ბუნების ისეთი მოვლენები, რომელთა ახსნა წარმოუდგენელია დანარჩენი მათემატიკური მეთოდებით; მე მხედველობაში მაქვს ბუნების მოვლენები, რომლებიც დამოკიდებულია შემთხვევაზე.

მ ი ტ ო ნ ი

თქვენ ლაპარაკობთ შემთხვევითობაზე ისე, თითქოს სრული გარკვეულობით შეიძლებოდეს იმის მტკიცება, დამოკიდებულია თუ არა ხდომილება შემთხვევითობაზე. მე კი მეჩვენება, რომ ცალსახად ამის თქმაც კი არ შეიძლება. ის, რაც ერთისთვის წარმოადგენს შემთხვევითს, მეორისთვის სულაც არ არის შემთხვევითი. თუ თქვენ არ იცით, რომელ მომენტში გავუშვებ მე ქანქარას, მაშინ თქვენთვის დროის მოცემულ მომენტში ქანქარის მდებარეობა შემთხვევითია. მაგრამ, მე თუ გავუშვი ქანქარა, მაშინ ზუსტად ვიცი ეს როდის მოხდა და ჩემთვის ქანქარის მოძრაობა სრულად განსაზღვრულია და არ არის დამოკიდებული შემთხვევაზე. შესაბამისად, მოცემული ხდომილების შემთხვევითობაზე წარმოდგენა არის სუბიექტური.

პ ა ს კ ა ლ ი

მე სრულად ვეთანხმები აზრს, რომ ერთი და იგივე ხდომილება ზოგიერთ შემთხვევაში ითვლება შემთხვევითად, ხოლო დანარჩენ შემთხვევებში სრულად დეტერმინისტულად — იმის მიხედვით, თუ რა გარემოებებში ვიხილავთ ჩვენ მას. გაიხსენეთ, თუ რას გეუბნებოდით მე ჩვენი საუბრის დასაწყისში: ნებისმიერი ალბათობა სინამდვილეში პირობითია. და, საზოგადოდ, გარემოება, რომ მოცემული ხდომილება წარმოადგენს შემთხვევითს, დამოკიდებულია ობიექტურ პირობებზე და თუ ის შემთხვევითია, მაშინ სწორედ ეს პირობები განსაზღვრავენ მის ალბათობას.

მ ი ტ ო ნ ი

იყოს ასე, მე არ გავხდი სადავოდ ამ მდგომარეობას. თქვენ მე დამარწმუნეთ იმაში, რომ საკითხის თქვენეული გადმოცემა თანმიმდევრული და გააზრებულია და, ყოველგვარ ეჭვგარეშეა, რომ საქმის ვითარებას შესაძლებელია შევხედოთ ასეთი პოზიციიდანაც. მიუხედავად ამისა, მე ვრჩები საკუთარ აზრზე სუბიექტური ალბათობების შესახებ, ვინაიდან მე ისინი ვიცი, ხოლო თქვენს ობიექტურ ალბათობებთან, იმ შემთხვევაშიც კი, თუ მე მათ მივიღებ, არაფერი მესაქმება, რადგანაც მე ისინი არ ვიცი. თქვენი წყალობით მე ახლა ისეთ მდგომარეობაში ვიმყოფები, თითქოს თქვენ თავიდან ხანგრძლივად და დაჟინებით მიქებდით ვიღაცას, ხოლო შემდგომ, დამარწმუნეთ რა იმაში, რომ ხსენებული ბატონის ან ქალბატონის საზოგადოება იქნებოდა ჩემთვის სასიამოვნო, მაცნობეთ, რომ თქვენ არ გაგაჩნიათ არც ძალა და არც შესაძლებლობა გამაცნოთ მე იგი.

პ ა ს კ ა ლ ი

ნება მიბოძეთ მე რამდენადმე სახე ვუცვალო თქვენს შედარებას. ჩემი შეხედულებით, მდგომარეობა უფრო ზუსტად ისეთია, რომ მე გიქებდით ძველ ბერძენ ავტორს, რომლის გაცნობა თქვენთვის ჩემს ძალებს აღემატებოდა, მაგრამ რომლის ნაწარმოებებიც, თუნდაც არასრულად, მაგრამ უმეტესწილად შემონახულია. ასე რომ, ამ ნაწარმოებებიდან, თუ თქვენ მოახერხებთ დაძლიოთ ენობრივი სიძნელეები, თქვენ შეგიძლიათ გაიცნოთ ავტორიც; უფრო მეტიც, თქვენ შეგიძლიათ დარწმუნებით იმასაც მიხვდეთ, თუ რა შეიძლებოდა ყოფილიყო დაკარგულ ნაწარმოებებში. რა თქმა უნდა, ეს არ არის მარტივი ამოცანა, მაგრამ ის იმსახურებს ძალისხმევას.

მ ი ტ ო ნ ი

მე ამის შესახებ კიდევ ვიფიქრებ. ახლა კი, ბატონო პასკალ, მითხარით მხოლოდ შემდეგი: თქვენ მიერ აღმოჩენილი მათემატიკური კანონზომიერებები, მაგალითად, შეკრებისა და გამრავლების კანონები, შეეხება მხოლოდ ობიექტურ ალბათობებს, თუ მათი გავრცელება შეიძლება სუბიექტური ალბათობებისთვისაც?

პ ა ს კ ა ლ ი

სუბიექტური ალბათური მსჯელობები უმეტეს შემთხვევაში რაოდენობრივიც კი არ არის, არამედ თვისებრივია. მაგრამ, თუკი ვიღაცის სუბიექტური მსჯელობები ყოველთვის იქნებოდა რაოდენობრივი, მაშინ ხსენებული კანონებიც იქნებოდა სამართლიანი, ოღონდ მხოლოდ იმ პირობით, რომ მოცემული ადამიანის მსჯელობები იმყოფებიან სრულ შესაბამისობაში ერთმანეთთან და შეადგენენ თანმიმდევრულ სისტემას წინააღმდეგობების გარეშე. მე არ მჯერა, რომ ასეთი ადამიანი არსებობს. ამიტომ, თუ ამოვალთ რაიმე ხდომილების ალბათობის სუბიექტური შეფასებიდან, მაშინ უკეთესი იქნება ასე მოვიქცეთ: რთული ხდომილების ალბათობა შევაფასოთ არა საკუთარი შეგრძნებების საფუძველზე, არამედ გამოვთვალოთ მათემატიკური ფორმულების საშუალებით წინასწარ შეფასებული საწყისი ხდომილებების ალბათობების საფუძველზე. ამასთან, რა თქმა უნდა, თუკი საწყისი ხდომილებები ერთმანეთს არ ეწინააღმდეგება, თქვენ მიიღებთ სისტემას, რომელიც შინაგანად არაწინააღმდეგობრივია; მასში ზოგადი კანონები სრულდება ყოველგვარი გამონაკლისების გარეშე. აკი ამ შემთხვევაში თქვენ მიიღებთ იმ მნიშვნელობას, რომელიც იქნებოდა ჭეშმარიტი (ობიექტური) ალბათობა, თუკი საწყისი ალბათობები, რომლებიც მიღებული იყო სუბიექტური მსჯელობების საფუძველზე, დაემთხვეოდა რეალურ მნიშვნელობებს. ადრე თუ გვიან, თუ გავყვებით ამ გზას, შეიძლება მივიდეთ ხდომილებამდე, რომლის ალბათობა შეიძლება შემოწმდეს ემპირიულად. მაშინ, აუცილებლობის შემთხვევაში, მოხერხდება იმ საწყისი მნიშვნელობების შესწორება, რომლებიც მიღებული იყო სუბიექტური მსჯელობების საფუძველზე.

მ ი ტ ო ნ ი

შესაბამისად, თქვენც კი აღიარებთ, თუნდაც მხოლოდ საწყისი მნიშვნელობებისთვის, სუბიექტური ალბათობების აუცილებლობას?

პ ა ს კ ა ლ ი

მე მაქვს სხვანაირი მიდგომა: იმას, რასაც თქვენ უწოდებთ სუბიექტურ ალბათურ მსჯელობას, მე აღვიქვამ, როგორც ჰიპოთეზას.

მ ი ტ ო ნ ი

მე მეჩვენება, რომ აქ განსხვავება მხოლოდ სახელებშია.

პ ა ს კ ა ლ ი

არა სავსებით. პირველ ეტაპზე ჰიპოთეტურ ალბათობებს მე არ ვანიჭებ გარკვეულ რიცხვით მნიშვნელობებს, მაგრამ აღვნიშნავ მათ ასოებით, ვთქვათ x, y, z და ასე შემდეგ. და მხოლოდ შემდგომ, სხვა ხდომილებებზე დაკვირვებების საფუძველზე, რომელთა ალბათობები დამოკიდებულია ამ სიდიდეებზე, ვცდილობ გავაკეთო დასკვნები მათ მნიშვნელობებზე.

მ ი ტ ო ნ ი

ყოველივე იმის შემდეგ, რაც თქვენ თქვით, მე მეჩვენება, რომ ჩვენი მიდგომები არც ისე განსხვავებულია, როგორც ამის შესახებ შეგეძლო გეფიქრა საუბრის დასაწყისში; ყოველ შემთხვევაში იმაში, რაც შეეხება პრაქტიკულ დასკვნებს, განსხვავებები არაარსებითია. ამიტომ, მე ვფიქრობ, ჩვენ არ უნდა შევაწყინოთ თავი ჩვენი კამათით მთელ საზოგადოებას. ამასთანავე, რამდენიც არ უნდა ვიკამათოთ, თითოეული ჩვენგანი დარჩება საკუთარ აზრზე და ამიტომ, აუცილებლობის კვალობაზე, ჩვენს დასკვნებში ყოველთვის დარჩება გარკვეული განსხვავება. მე მეჩვენება, რომ კამათის პროცესში ჩვენი მიდგომები იმდენად დაუახლოვდა ერთმანეთს, რამდენადაც ეს საერთოდ შესაძლებელი იყო, ამიტომ საკითხის შემდგომი განხილვა, უბრალოდ, უმიზნო იქნებოდა. გარდა ამისა, ჩვენ გარშემო მყოფი მშვენიერი ქალბატონები იწყებენ ჩვენზე განაწყენებას — ისინი ფიქრობენ, რომ ჩვენ მათ უგულებელვყოფთ. თუ თქვენ წინააღმდეგი არ იქნებით, დღეისათვის დავასრულოთ ჩვენი დისკუსია.

პ ა ს კ ა ლ ი

როგორც გენებოთ, ბატონო მიტონ.

ამაზე ჩვენ შევწყვიტეთ ჩვენი საუბარი. რადგანაც მასში თავმოყრილია ყველაფერი, რაც მე შემიძლია გითხრათ თქვენს კითხვებთან დაკავშირებით, ამიტომ უკეთესად ჩავთვალე მომეყვანა ის მთლიანად, ყოველგვარი კომენტარების გარეშე. გთხოვთ, ჩვენი მეგობრობის სახელით, მომწერეთ სრულიად გულწრფელად, თუ რას ფიქრობთ თქვენ ამ საუბრის შესახებ, რომელიც ბატონ მიტონთან გამართა თქვენმა ყველაზე ერთგულმა თაყვანისმცემელმა

ბლეზ პასკალმა

P.S. ამ დღეებში, ვალაგებდი რა წიგნებს, ხელში მომხვდა მარკ ავრელიუსის „ფიქრები“ და შემთხვევით გადავშალე იმ გვერდზე, სადაც ის წერს ორ შესაძლებლობაზე: ან სამყარო წარმოადგენს უზარმაზარ ქაოსს, ან მასში მეფობს წესრიგი და კანონზომიერება; ამ ორი ურთიერთგამომრიცხავი შესაძლებლობიდან რომელი რეალიზდება, ეს მოაზროვნე ადამიანმა უნდა გადაწყვიტოს თვითონ — ის, როგორც კლდე ზღვაში, რომელზეც იმსხვრევა გამძვინვარებული ტალღები, უნდა დარჩეს იქ, სადაც ის გადაისროლა განგებამ ან შემთხვევამ. მართალია მე უკვე ბევრჯერ წამიკითხავს ეს სტრიქონები, მაგრამ ახლა პირველად დავფიქრდი იმაზე, თუ რატომ თვლიდა, საკუთრივ, მარკ ავრელიუსი, რომ სამყაროში მეფობს ან შემთხვევითობა, ან წესრიგი და კანონზომიერება? რატომ ფიქრობდა ის, რომ ეს ორი შესაძლებლობა გამორიცხავს ერთმანეთს? მე მეჩვენება, რომ სინამდვილეში ეს მტკიცებულებები არ ეწინააღმდეგება ერთმანეთს, უფრო მეტიც, ისინი მოქმედებენ ერთდროულად: სამყაროში მეფობს შემთხვევა და ერთდროულად მოქმედებენ წესრიგი და კანონზომიერება, რომლებიც ფორმირდებიან შემთხვევითობების სიმრავლიდან, შემთხვევითობების კანონების საფუძველზე. აი, რატომაც ვანიჭებ მე ასეთ მნიშვნელობას ალბათობის ცნების გარკვევას და ვინტერესდები მასთან განუყოფლად დაკავშირებული საკითხებით. რა თქმა უნდა, არ არსებობს თქვენთვის იმის ახსნის საჭიროება, რომ თავიდანვე, როგორც კი ჩვენ დავიწყეთ მიმოწერა ამ პრობლემებთან დაკავშირებით, როგორც თქვენ, ისე მე ვიცოდით, რომ საუბარია გაცილებით სერიოზულ საკითხებზე, ვიდრე კამათლით თამაშია.

ალფრედ რენის წერილი მკითხველს

ძვირფასო მკითხველო!

... წიგნში მოყვანილი წერილები პასკალს სინამდვილეში არ დაუწერია. შესაძლებელია, თქვენ მაინც ელოდებით, რომ ავხსნა, თუ რატომ ავირჩიე ეპისტოლარული ფორმა ალბათობის თეორიის საფუძვლების გადმოსაცემად, ამასთან, მივმართე პასკალის გამოგონილ წერილებს. მაგრამ ეს შეკითხვა არ მოითხოვს პასუხს. თუკი თქვენ ყურადღებით და ინტერესით წაიკითხეთ ეს წერილები, თქვენ არაფერს არ იკითხავთ; თუკი თქვენ წერილები არ მოგეწონათ, მაშინ არანაირი ახსნა საქმეს არ უშველის. ამიტომ მე მხოლოდ შევნიშნავ, რომ ამ წიგნის ლიტერატურული ჟანრის შერჩევისას ვხელმძღვანელობდი დაახლოებით იმ მოსაზრებებით, რაც გამაჩნდა „დიალოგების“[6] დაწერისას, ოღონდ ამ შემთხვევაში მე მსურდა ექსპერიმენტი გამეკეთებინა მისი მეორე ფორმით. გამოგონილი წერილები — ლიტერატურული ჟანრის ძალიან გავრცელებული ფორმაა, რომელიც სათავეს იღებს ძველი საბერძნეთიდან. ჯერ კიდევ პლატონის დროს ეს იყო ჩვეულებრივი მოვლენა, ფილოსოფიური საკითხები არცთუ ისე იშვიათად გადმოიცემოდა წერილების ფორმით. ეს პოეტური ხელოვნება დღესაც ცოცხალია. მაგალითის სახით მე მსურს მივუთითო ტრონტონ უაილდერის ოსტატური ნაწარმოები „მარტის იდეები“.

რაც შეეხება კორესპონდენტების, პასკალისა და ფერმას, შერჩევას, აქ მე მივდიე იმავე პრინციპებს, რასაც „დიალოგებში“: გადავიტანე მათი მიმოწერა ალბათობის თეორიის ცნებების წარმოშობის პერიოდში, რომ წარმომედგინა ისინი *in statu nascendi* (ანუ აღმოცენების მდგომარეობაში), შევინარჩუნე რა, ამასთანავე, მათი პირველქმნილი სინედლე.

„წერილებს ალბათობაზე“ და „დიალოგებს“ ანათესავებს ისიც, რომ ორივე ნაწარმოებში მე მივისწრაფოდი შემენარჩუნებინა ისტორიული სიმართლე, შეძლებისდაგვარად თავი ამერიდებინა ანაქრონიზმისგან და დამეცვა სტილი, რომელიც მიესადაგებოდა აღწერილ ეპოქას. მსურდა რა, რომ წერილები მიმეახლოებინა ორიგინალებთან, მე ტექსტში ჩავრთე ბევრი აზრი და აფორიზმი პასკალის შრომებიდან; ზოგიერთი სტრიქონი სულაც მთლიანად (ან მიზერული ცვლილებებით) შეესაბამება მეცნიერის რეალურ სიტყვებს. შენიშვნებში გაკეთებულია მითითებები შესაბამის ამონარიდებზე პასკალის შრომებიდან. გამოქვეყნებულ წერილებში პასკალი ხშირად ციტირებს სხვა ავტორებს; ყველა ეს ციტატა ნასესხებია შრომებიდან, რომელთა შესახებაც უტყუარად ცნობილია, რომ პასკალმა ისინი იცოდა. ცნობილია, რომ ზოგიერთი მათგანი (მაგალითად, მონტენის „ცდები“) მისი საყვარელი საკითხავი იყო.

ამრიგად, ძვირფასო მკითხველო, მე გავაკეთე ყველაფერი, რაც ჩემს ძალებს არ აღემატებოდა, რათა თქვენ გერწმუნათ ამ წერილების დაწერის შესაძლებლობა. რასაკვირველია, შორს ვიყავი იმ აზრისგან, რომ შეცდომაში შემეყვანეთ თქვენ და მეიძულებინეთ გეფიქრათ, რომ კითხულობთ ნამდვილ წერილებს. რაც შეეხება მათ შინაარსს, მე ვერ გავბედავ ვამტკიცო, რომ ის სინამდვილეში გააზრებული იყო პასკალის მიერ, მაგრამ ის სავსებით შესაძლებელია და არანაირი ისტორიული არგუმენტებით ამის უარყოფა არ შეიძლება.

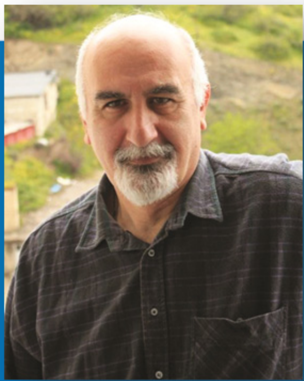
თქვენ სრულიად გონივრულად შეგიძლიათ იკითხოთ: რატომ არ გამოვაქვეყნე ფერმას „პასუხებიც“? რასაკვირველია, მე შემეძლო ეს გამეკეთებინა, მაგრამ ზედმეტად მივიჩნიე, რამეთუ ფერმას პასუხების შინაარსი დიდი სიზუსტით, ზოგიერთი დეტალის გამოკლებით, ძნელი აღსადგენი არ არის პასკალის წერილების საშუალებით. . . .

ალფრედ რენი

[6] იგულისხმება ალფრედ რენის „დიალოგები მათემატიკაზე“ — მთარგმნელის შენიშვნა.

თარგმანი

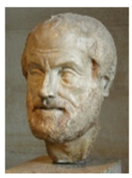
გამონათქვამები მათემატიკის შესახებ

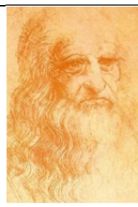
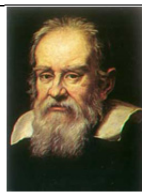
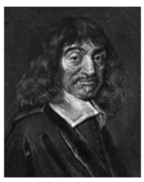


ილია თავხელიძე

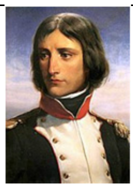
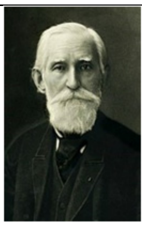
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
ასოცირებული პროფესორი
ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა
ფაკულტეტი, აკადემიკოს ილია ვეკუას პრემიის ლაურეატი, 1984 წ.
დაჯილდოებულია უკრაინის მათემატიკოსთა 2009 წლის
ყრილობის, აკადემიკოს ნიკოლოზ ბოგოლიუბოვის
მემორიალური ოქროს მედლით.

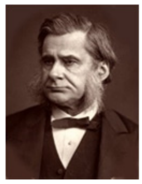
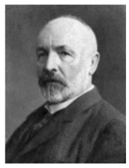
1979 წელს დავამთავრე ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასპირანტურა და გავხდი ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი და უკვე ოფიციალურად დავიწყე მუშაობა ამ საოცარ დარგში. ყოველთვის მაინტერესებდა სხვადასხვა ადამიანის აზრი მათემატიკის შესახებ და ახლა შემოგთავაზებთ ჩემ მიერ სხვადასხვა დროს და გარემოებაში შეგროვებულ, ქართულად გადათარგმნილ და ჩაწერილ გამონათქვამებს მათემატიკის შესახებ. აქაა ზოგიერთი გამონათქვამი, რომელსაც მე ხანდახან არც კი ვეთანხმები, მაგრამ მკითხველმა უნდა იცოდეს სხვადასხვა მოსაზრება მათემატიკის შესახებ. ამ მხრივ განსაკუთრებით საინტერესოა არამათემატიკოსების მოსაზრებები. შემდგომ ვაპირებ წარმოგიდგინოთ ასეთივე კოლექციები: გეომეტრიის, მათემატიკოსების, მათემატიკური კანონზომიერების, მათემატიკური განათლებისა და სხვათა შესახებ. სამწუხაროდ, ამ გამონათქვამებს აკლია ციტირება, მაგრამ ჩვენი მკითხველი მგონი, მომიტევებს. აგრეთვე მოხარული ვიქნები, ვინც ჩვენს ჟურნალს გაამდიდრებს ჩემ მიერ ვერმოძიებული ციტატებით.

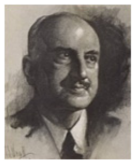
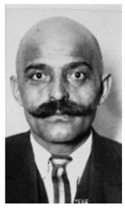
მათემატიკა – არის გონების გიმნასტიკა და მზადება ფილოსოფიისათვის	**ისოკრატე** 436 – 338 ძვ.წა ფილოსოფოსი	
მათემატიკა – ენაა, რომლის საშუალებითაც ღმერთები ესაუბრებიან ადამიანებს	**პლატონი** 429 – 347 ძვ.წა	
1. მათემატიკა გამოავლენს წესრიგს, სიმეტრიას და გარკვეულობას, ეს კი მშვენიერების უმნიშვნელოვანესი სახეობებია; 2. სწავლება ბუნების შესახებ და მათემატიკა უნდა ჩაითვალოს მხოლოდ სიბრძნის ნაწილებად	**არისტოტელე** 384 – 322 ძვ.წა	

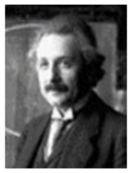
ბუნების კანონები — ეს უბრალოდ ღმერთის მათემატიკური ნააზრევია	**ევკლიდე** IV – III ძვ.წა	
1. მათემატიკა — მეცნიერების კარებიცაა და გასაღებიც; 2. მათემატიკა — პირველია მეცნიერებათა შორის და აუცილებელია მათთვის; 3. ისტორიით ჩვენ ვეწაფებით სიბრძნეს, პოეზიით — გონებამახვილობას, მათემატიკით — გამჭრიახობას	როჯერ ბეკონი 1212 – 1292 *Doctor Mirabilis*	
მათემატიკა ყველაზე უკეთ გვეხმარება სხვადასხვა ღვთიური ჭეშმარიტებების უკეთ გასაგებად	ნიკოლოზ კუზანელი 1401 – 1464	
არავითარი სანდოობა არ გააჩნია იმ მეცნიერებას, რომელშიც არ არის შესაძლებელი გამოვიყენოთ არცერთი მათემატიკური მეცნიერება და რასაც არ აქვს კავშირი მათემატიკასთან	ლეონარდო და ვინჩი 1452 – 1519	
მათემატიკა — დაწერილია მათემატიკოსებისათვის	ნიკოლოზ კოპერნიკი 1473 – 1543 ასტრონომი	
ბუნებაში მრავალი რამ არის ისეთი, რომ მათემატიკის ჩარევის გარეშე მისი არც ღრმად გაგება შესაძლებელი, არც დამაჯერებლად დამტკიცება, არც საკმარისად გონივრულად და საიმედოდ პრაქტიკაში გამოყენება	ფრენსის ბეკონი 1561 –1626	
ბუნების დიადი წიგნი მათემატიკის ენაზეა დაწერილი	გალილეო გალილეი 1564 – 1642	
მათემატიკა — სამყაროს სილამაზის პირველსახეა	იოჰან კეპლერი 1571 – 1630	
უმეცართათვის მათემატიკაში დაფარულია მოვლენათა მრავალი საიდუმლო	იან კომენსკი 1592 – 1670 პედაგოგი	
1. მათემატიკა საშუალებას გვაძლევს დავიკმაყოფილოთ ცნობისმოყვარეობა, გავიადვილოთ ხელოსნობა და შევამციროთ ადამიანების შრომა; 2. ბუნება განასახიერებს ყოველივე იმას, რაზეც თეორიულად ეფუძნება მათემატიკა	რენე დეკარტი **კარტეზიო** 1596 – 1650	

მათემატიკის საგანი იმდენად სერიოზულია, რომ არ უნდა გავუშვათ არცერთი შესაძლებლობა გავხადოთ ის უფრო სახალისო	ბლეზ პასკალი 1623 – 1662	
მათემატიკა და ცდა — აი, ჭეშმარიტი საფუძვლები სინამდვილისა, ბუნებრივი, გონიერი და ცოცხალი შემეცნებისა	ბენედიქტ (ბარუხ) **სპინოზა** 1632 – 1677 ფილოსოფოსი	
მათემატიკურ საკითხებში არ შეიძლება ყველაზე პატარა შეცდომის უგულებელყოფაც კი	ისააკ ნიუტონი 1642 – 1725	
პირველი პირობა, რომელიც უნდა შესრულდეს მათემატიკაში, ესაა სიზუსტე, მეორე — ის უნდა იყოს ნათელი და შეძლებისდაგვარად მარტივი	გოტფრიდ ლაიბნიცი 1646 – 1716	
მათემატიკური ჭეშმარიტება რჩება სამარადჟამოდ და მეტაფიზიკური აჩრდილები ქრებიან, როგორც დაავადებულთა ბოდვები	ფრანსუა მარი არუე **ვოლტერი** 1694 – 1778	
რომელი მეცნიერება შეიძლება იყოს უფრო კეთილშობილი, უფრო ლაღი, უფრო სასარგებლო კაცობრიობისათვის, ვიდრე მათემატიკა?	ბენჟამინ ფრანკლინი 1706 – 1790	
სახელდობრ მათემატიკა იძლევა ყველაზე საიმედო წესებს: ვინც მათ მიჰყვება, მათთვის არაა საშიში გრძნობებისაგან გამოწვეული შეცდომები	ლეონარდ ეილერი 1707 – 1783	
1.ქიმია ფიზიკის მარჯვენა ხელია, ხოლო მათემატიკა — თვალი; 2. ყოველივე, რაც დღემდე იყო მეცნიერებაში: ჰიდრავლიკა, აერომეტრია, ოპტიკა და სხვა ბნელი, საეჭვო და არასაიმედო, მათემატიკამ გახადა ნათელი, ჭეშმარიტი და ცხადი	მიხეილ ლომონოსოვი 1711 – 1765	
1. ნებისმიერი საბუნებისმეტყველო მეცნიერება მოიცავს იმდენ ჭეშმარიტებას, რამდენიც მასში არის მათემატიკა; 2. მათემატიკა — ეს მეცნიერებაა, რომელიც შემოგვთავაზა კაცობრიობამ სამყაროს შესაცნობად მის ყველანაირ გამოვლინებაში	იმანუილ კანტი 1724 – 1804 ფილოსოფოსი	
ბუნების საგულდაგულო, ღრმა შესწავლა არის ყველაზე ნაყოფიერი აღმოჩენების წყარო მათემატიკაში	ჟან ბატისტ ჟოზეფ ფურიე 1768 – 1830	

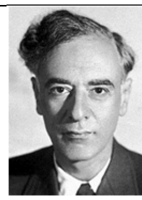
მათემატიკის აყვავება და სრულყოფილება მჭიდროდაა დაკავშირებული სახელმწიფოს კეთილდღეობასთან	**ნაპოლეონი** 1769 – 1821	
1. მათემატიკა — მეცნიერებათა დედოფალია, ხოლო არითმეტიკა — მათემატიკის. ის ხშირად მომსახურეობას უწევს ასტრონომიასა და საბუნებისმეტყველო მეცნიერე-ბებს, მაგრამ ყველა გარემოებაში პირველი ადგილი უეჭველად რჩება მას; 2.მათემატიკაში არ არის ნამდვილი წინააღმდეგობები; 3. მათემატიკა — ესაა მეცნიერება თვალებისათვის და არა სმენისათვის	კარლ ფრიდრიხ გაუსი 1777 – 1855	
ეს ცხოვრება ორი რამისთვისაა კარგი: გაეცნო მათემატიკის შესახებ და შეიცნო მათემატიკა	სიმეონ დენი პუასონი 1780 – 1840	
მათემატიკაში, გამორჩეულად, გონი დაკავებულია შემეცნების საკუთარი ფორმით — დროითა და სივრცით, კატის მსგავსად, რომელიც თავის კუდთან თამაშობს	არტურ შოპენგაუერი 1788 – 1860 ფილოსოფოსი	
მათემატიკა — ესაა ენა, რომელზეც ყველა ზუსტი მეცნიერება მეტყველებს	ნიკოლოზ ლობაჩევსკი 1792 – 1856	
მატემატიკა მეცნიერისათვის იგივეა, რაც ანატომისათვის სკალპელი	ნილს ჰედრიკ აბელი 1802 –1828	
1.მათემატიკა მიეკუთვნება იმ მეცნიერებათა რიგს, რომლებიც თავისთავად ცხადნი არიან; 2. ღმერთთა ცხოვრება არის მათემატიკა . . . ჩემი ცხოვრება წააგავს ღმერთების ცხოვრებას	კარლ გუსტავ იაკობ იაკობი 1804 – 1851	
ეს მეცნიერება (მათემატიკა) — ადამიანის გონის ქმნილება, მოწოდებულია არა იმდენად ცოდნისათვის, რამდენადაც შემეცნებისათვის, ძიებისათვის და არა ჭეშმარიტების საძიებლად	ევარისტ გალუა 1811 – 1832	
მათემატიკა — ეს გონის მუსიკაა	ჯეიმს ჯოზეფ სილვესტრი 1814 – 1897	
მათემატიკური მეცნიერებები უძველესი დროიდან იქცევდნენ განსაკუთრებულ ყურადღებას, ამჟამად მათით უფრო მეტად დაინტერესდნენ მათი გავლენის გამო ხელოვნებაზე და წარმოებაზე	პაფნუტი ჩებიშევი 1821 – 1894	

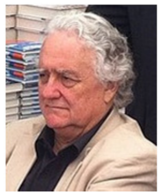
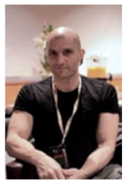
მათემატიკური აღმოჩენების ყველაზე ნაყოფიერი წყარო არის ფაქტებზე ყურადღებით დაკვირვება	შარლ ერმიტი 1822 – 1901	
მათემატიკა დოლაბივითაა, დაფქვავს იმას, რაც მასში ჩაიყრება და როგორც; თუ ჩაიყრება თათაბო, ვერ მიიღება ხორბლის ფქვილი, ისე მრავალი ფურცლის მცდარი წინადადებების ჩაწერით თქვენ ვერ მიიღებთ ჭეშმარიტებას	თომას ჰაკსლი 1825 – 1895 ზოოლოგი	
ჩვეულებრივ, მათემატიკას პოეზიის პირდაპირ საწინააღმდეგოდ მოიაზრებენ, მაგრამ მათემატიკა და პოეზია უახლოესი ნათესავებია, რადგან ერთიც და მეორეც – გონის შრომაა	თომას ჰილი 1828 – 1908 მხატვარი	
მათემატიკა – დიადი რამეა	ლევ ტოლსტოი 1828 – 1910 მწერალი	
მათემატიკა – ესაა დიდი გამოგონება ტყუილის გარეშე!	ლუის კეროლი ჩარლზ დოგსტონი 1838 – 1898 მწერალი	
მათემატიკაში სილამაზე რომ არ ყოფილიყო, მაშინ, ალბათ, არ იქნებოდა თვით მათემატიკაც. სხვაგვარად რა ძალას უნდა მოეზიდა ამ რთულ მეცნიერებაში კაცობრიობის უდიდესი გენიოსები?	პეტრე ჩაიკოვსკი 1840 – 1893 კომპოზიტორი	
მათემატიკის არსი მის თავისუფლებაშია	გეორგ კანტორი 1845 – 1918	
მათემატიკაში არის თავისებური სილამაზე, როგორც ფერწერაში და პოეზიაში	ნიკოლოზ ჟუკოვსკი 1847 – 1922	
მათემატიკა სიცოცხლით სავსე მეცნიერებაა, რომელიც მიკერძოების (ვნების) გარეშე კრებს სულ ახალ პრობლემებს, ამუშავებს მათ, აგდებს მოძველებულებს და ამგვარად ის სულ ყოველთვის ახალგაზრდავდება	ფელიქს კლაინი 1849 – 1925	
მათემატიკა – წინასწარმეტყველების ყველაზე საიმედო ფორმა	ვილჰელმ შვებელი 1851 – 1891 მწერალი	

1.მათემატიკა — ეს ხელოვნებაა უწოდო სხვადასხვა საგნებს ერთი და იგივე სახელი; 2.მათემატიკას არ აქვს სიმბოლოები ბუნდოვანი აზრებისათვის	ანრი პუანკარე 1854 – 1912	
1. მათემატიკა არის სწავლება ფორმულებს შორის ურთიერთობისა, ყოველგვარი შინაარსის გარეშე; 2. მათემატიკა — მხოლოდ თამაშია, რომელსაც თამაშობენ მარტივი წესების თანახმად და ამისათვის იყენებენ არაფრის მთქმელ აღნიშვნებს	დევიდ ჰილბერტი 1862 -1943	
როგორც ხელოვნების ყველა დარგი მიდრეკილია მუსიკისაკენ, ყველა მეცნიერება მიისწრაფვის მათემატიკისაკენ	ჯორჯ სანტაიანა 1863 – 1952 მწერალი	
მრავალი მეცნიერული ამოცანის ამოხსნის გასაღები მათ მათემატიკურ ენაზე მოხერხებულად ჩამოყალიბებაშია	დიმიტრი გრავე 1863 – 1939 ხიდების მშენებელი	
არის მათემატიკაში რაღაც, რაც იწვევს ადამიანის აღფრთოვანებას	ფელიქს ჰაუსდორფი 1868 – 1942	
მათემატიკა სახადს ჰგავს, რაც უფრო ადრეა, მით უკეთესი	არნოლდ ზომერფელდი 1868 – 1951 ფიზიკოსი	
მათემატიკა შესაძლოა განვსაზღვროთ როგორც მეცნიერება, რომელშიც ჩვენ არასოდეს ვიცით რაზე ვსაუბრობთ და ჭეშმარიტია თუ არა, რაზეც ვსაუბრობთ	ბერტრან რასელი 1872 – 1970 ფილოსოფოსი	
ცხოვრება ეფუძნება მათემატიკას, ხელოვნებისა და მუსიკის მთელი სიდიადე მათ მათემატიკურ საფუძვლებშია	გიორგი გურჯიევი 1872/77 – 1949 მისტიკოსი	
მათემატიკას ქაოსშიც კი შეუძლია აღმოაჩინოს გარკვეულობა	გერტრუდა სტაინი 1874 – 1946 მწერალი	
სილამაზე — პირველი კრიტერიუმია; სამყაროში მუდმივად ადგილი არ მოიძებნება უშნო მათემატიკისათვის	გოდფრი ჰაროლდ ჰარდი 1877 – 1947	

მათემატიკა — ესაა ლოგიკის იდეების პოეზია	ალბერტ აინშტაინი 1879 – 1955 ფიზიკოსი	
ეს საყოველთაოდ ცნობილი ჭეშმარიტებაა, ცხადი პირველი შეხედვისთანავე, რომ მათემატიკა — ადამიანის გამოგონებაა	პერსი უილიამს ბრიჯმენი 1882 – 1961	
1. რაც უფრო დიდხანს ცოცხლობს მათემატიკა, მით უფრო აბსტრაქტული და, შესაძლოა, ამიტომაც მით უფრო პრაქტიკული ხდება ის; 2. მათემატიკა მეცნიერების დედოფალიცაა და მსახურიც	ერიკ ტემპლ ბელი 1883 – 1960 ფანტასტი	
მათემატიკა მეტია, ვიდრე მეცნიერება — ის მეცნიერების ენაა	ნილს ბორი 1885 – 1962 ფიზიკოსი	
1. წმინდა მათემატიკას გააჩნია ვარსკვლავური ნათების არაადამიანური თვისება, რომელიცაა ცქრიალა, კაშკაშა, მაგრამ ცივი; 2. მათემატიკა — მეცნიერება უსასრულობის შესახებ! 3. მათემატიკა — ესაა გონებრივი საქმიანობის სახეობა, მაგრამ არა ზუსტი ცოდნების ჩამონათვალი	ჰერმან ვეილი 1885 – 1955	
მათემატიკა — ესაა ყველაზე ცხადი ფაქტების დამტკიცება ყველაზე არაცხადი საშუალებებით	(დიერდ) ჯორჯ პოია 1887– 1985	
1. მათემატიკის სიმარტივე დაფუძნებულია მისი აგების წმინდა ლოგიკურ შესაძლებლობაზე, ხოლო სირთულე, რომელიც მრავალს აშინებს, — სხვანაირად მისი გადმოცემის შეუძლებლობაზე; 2. სულსა და მატერიას შორის შუამავალი მათემატიკაა; 3. არცერთი მეცნიერება ისე არ გვიძლიერებს ადამიანის გონის ძალაში რწმენას, როგორც მათემატიკა	ჰუგო შტეინჰაუზი 1887 – 1972	
მათემატიკა, როგორც ადამიანის გონის გამოხატულება, ასახავს აქტიურ ნებას, განჭვრეტად აზრებს და ესთეტიკური სრულყოფისაკენ სწრაფვას. მისი ძირითადი ელემენტებია ლოგიკა და ინტუიცია, ანალიზი და კონსტრუირება, განზოგადება და ინდივიდუალიზმი	რიხარდ კურანტი 1888 – 1972	
მათემატიკა — ადამიანის სულის ყველაზე მშვენიერი და ძლიერი ქმნილებაა	სტეფან ბანახი 1892 – 1945	

მათემატიკა არის და თანაც მსახური (როგორც კონკია) ხელოვნებებისა, შეპყრობილი იმავე სიგიჟითა და გენიალურობით	ჰაროლდ მარსტონ მორსი 1892 – 1977	
1.მათემატიკის უმაღლესი მისიაა წესრიგის აღმოჩენა იმ ქაოსში, რომელიც ჩვენ გარშემოა; 2. მათემატიკა — ახალგაზრდების მეცნიერებაა. სხვანაირად არც შეიძლება. მათემატიკაში მუშაობა — ეს გონის ისეთი გიმნასტიკაა, რომლისთვისაც საჭიროა ახალგაზრდული მთელი მოქნილობა და გამძლეობა; 3. მათემატიკა — ეს ხელოვნების ერთ-ერთი სახეობაა	ნორბერტ ვინერი 1894 – 1964	
მათემატიკა — ეს იარაღია, სპეციალური მოწყობილობაა იმისათვის, რომ საქმე გვქონდეს ნებისმიერი სახის განყენებულ ცნებებთან და ამ აზრით მის ძლევამოსილებას არა აქვს ზღვარი. ამ მიზეზის გამო თანამედროვე ფიზიკის წიგნი, თუ ის არ არის ექსპერიმენტული სამუშაოს უბრალო აღწერილობა, უნდა იყოს არსებითად მათემატიკური.	პოლ ადრიენ მორის დირაკი 1902 – 1984 ფიზიკოსი	
1. მათემატიკა — ესაა გონებამახვილური ოპერაციების მეცნიერება, რომლებიც ტარდება სპეციალურად შემუშავებული წესებით სპეციალურად მოფიქრებულ ცნებებზე. ცხადია, რომ განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს ასეთი ცნებების გამოგონებას. საინტერესო თეორემების მარაგი მალე ამოიწურებოდა, თუკი მათი ჩამოყალიბება შესაძლებელი იქნებოდა მხოლოდ იმ ცნებებით, რომლებიც აქსიომებშია მოყვანილი; 2.მათემატიკის კოლოსალური ეფექტურობა საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში გარკვეულწილად ესაზღვრება მისტიკას და ამას არავითარი რაციონალური ახსნა არ აქვს	იუჯინ პოლ ვიგნერი 1902 – 1995	
თუ მათემატიკა ხალხს არ ეჩვენება მარტივი, ეს მხოლოდ იმიტომ, რომ მათ არ ესმით რამდენად რთულია ცხოვრება	ჯონ ფონ ნეიმანი 1903 – 1957	
მათემატიკა — ესაა ის, რის საშუალებითაც ადამიანები მართავენ ბუნებასა და თავის თავს	ანდრეი კოლმოგოროვი 1903 – 1987	
სწრაფვა ამქვეყნიური ცხოვრებისაგან განდგომისა და ბერის ცხოვრებით ცხოვრებისა, ვეგეტარიანელობა და საერთო ქონება მრავალ სექტაში გვხვდება. მაგრამ რაც პითაგორელებს განასხვავებს ყველასაგან — ესაა საშუალება, რომლითაც ისინი თვლიდნენ შესაძლებლად სულის განწმენდას და ღვთაებრივთან შეერთებას; ეს მიიღწეოდა მათემატიკის საშუალებით. მათემატიკა იყო მათი რელიგიის ერთ-ერთი შემადგენელი ნაწილი.	ბარტელ ლეენდერტ ვან დერ ვარდენი 1903 – 1996	

ფრენა — მათემატიკაა	ვალერი ჩკალოვი 1904 – 1938 მფრინავი	
ჩვენთვის, რომელთა ბეჭებზეც ძევს ბერძნული აზროვნების მძიმე ტვირთი, რომლებიც მივუყვებით აღორძინების ხანის გმირების გზას, ცივილიზაცია წარმოუდგენელია მათემატიკის გარეშე	ანდრე ვეილი 1906 – 1998	
მათემატიკა — ბუნების საიდუმლოებების გასაღებია	ილია ვეკუა 1907 – 1977	
მათემატიკურ, საბუნებისმეტყველო და ჰუმანიტარულ მეცნიერებებს შესაძლოა ვუწოდოთ ზებუნებრივი, ბუნებრივი და არაბუნებრივი მეცნიერებები	ლევ ლანდაუ 1908 – 1968 ფიზიკოსი	
მათემატიკა კვლავ რჩება ყველაზე საიმედო და ზუსტი ცოდნის ეტალონად, რომელსაც კი ჩვენ შესაძლოა მივაღწიოთ	მორის კლაინი 1908 – 1992	
შეუქცევადობავ — შენი სახელი მათემატიკაა	უილარდ ვან ორმან კუაინი 1908 – 2000	
მათემატიკა — ზეპირობის დაუძინებელი მტერია	ეჟენ იონესკო 1909 – 1993 დრამატურგი	
მათემატიკა — ესაა ენა პლუს მსჯელობა; ესაა თითქოს, მეტყველება და ლოგიკა ერთად აღებული. მათემატიკა — ესაა იარაღი ფიქრისათვის. მასში კონცენტრირებულია მრავალი ადამიანის მკაცრად ნაფიქრალის შედეგები.	იური მიტროპოლსკი 1917 – 2008	
რაღა თქმა უნდა, კარგი მათემატიკა ყოველთვის ლამაზია	პოლ ჯერალდ კოენი 1934 – 2007	
მათემატიკა — ეს ფიზიკის ნაწილია, სადაც ექსპერიმენტები ძალზე იაფია	ვლადიმერ არნოლდი 1937 – 2010	

მათემატიკური ფორმულები არ შეიძლება ვინმეს ეკუთვნოდეს! მათემატიკა ეკუთვნის ღმერთს!	დონალდ ერვინ კნუტი 1938	
მათემატიკა არსებობს არა იმისათვის, რომ ვინმეს თავს მოახვიოს მძიმე სამუშაო. პირიქით, ის არსებობს მხოლოდ სიამოვნებისათვის. იმათი სიამოვნებისათვის, ვისაც უყვარს იმის ანალიზის ჩატარება, თუ რას აკეთებს, ან რას გააკეთებს, ან რა გააკეთა უკვე იმის იმედით, რომ გააკეთოს ეს უკეთესად	რობერტ ბრინხერტი 1946 მწერალი	
მათემატიკის სილამაზე, როგორც ნებისმიერი ნივთის სილამაზე — ესაა შინაგანი თვისება, ის წარმოიქმნება ერთი მთლიანის სხვადასხვა ნაწილის ჰარმონიიდან	ხორხე ვაგენსბერგი 1946 – 2018 ფიზიკოსი, ხელოვნებათ-მცოდნე	
მათემატიკა ბავშვობიდან ჩემთვის იგივეა, რაც რელიგია, იმიტომ, რომ რელიგიაცა და მათემატიკაც ამტკიცებს, რომ შეუძლიათ ახსნან სამყარო	რობერტ დიგზი 1969 რეპერი	
ერთი მხრივ მათემატიკა — სრულიად აბსტრაქტული მეცნიერებაა: კვადრატული ფესვი მინუს ერთიანიდან და სხვა ამგვარი; მაგრამ სამყარო სულაც არ ემორჩილება მკაცრ მათემატიკურ წესებს. ამგვარად, ეს არის უბრალოდ ერთ-ერთი შესაძლებლობა შევხედოთ სამყაროს, რომელიც აერთიანებს თავის თავში ყველა ძალას: გონებრივს, სოციალურს და ფიზიკურს...	ჩაინა მიელვილი 1972 ფანტასტი	

ალგებრა და ლოგიკა: ძველი და ახალი კავშირები*

იური ლეონიდეს ძე ერშოვი

2020 წლის 1 მაისს დაბადებიდან 80 წელი შეუსრულდა რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოს იური ლეონიდეს ძე ერშოვს, დიდ მეცნიერს, მათემატიკოსს, ალგებრისა და მათემატიკური ლოგიკის ციმბირის სამეცნიერო სკოლის აღიარებულ ხელმძღვანელს. მან 1964 წელს წარჩინებით დაამთავრა ნოვოსიბირსკის სახელმწიფო უნივერსიტეტი და მას, როგორც ამ უნივერსიტეტის პირველი გამოშვების კურსდამთავრებულს, დიპლომი გადასცა ამ უნივერსიტეტის ერთ-ერთმა დამაარსებელმა და პირველმა რექტორმა, ჩვენმა თანამემამულემ, აკადემიკოსმა ილია ვეკუამ. ი. ერშოვმა უნივერსიტეტის დამთავრებიდან რამდენიმე თვეში დაიცვა საკანდიდატო, ხოლო 2 წლის მერე სადოქტორო დისერტაცია. ის 27 წლის ასაკში გახდა საბჭოთა კავშირის მეცნიერებათა აკადემიის ციმბირის განყოფილების მათემატიკის ინსტიტუტის მათემატიკური ლოგიკის განყოფილების გამგე, ხოლო 1970 წელს აკადემიის წევრ-კორესპონდენტი. 1991 წლიდან იური ერშოვი რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსია. მას გამოქვეყნებული აქვს 300-ზე მეტი სამეცნიერო ნაშრომი და ახლაც ეწევა აქტიურ და ნაყოფიერ სამეცნიერო მოღვაწეობას. ამჟამად ის რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის ციმბირის განყოფილების, აკადემიკოს სერგეი სობოლევის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის სამეცნიერო ხელმძღვანელია.

ჩვენ, ქართველი კოლეგები, ვუსურვებთ ბატონ იური ერშოვს ჯანმრთელობას, დიდხანს სიცოცხლესა და წარმატებებს მათემატიკის განვითარებაში.

თარგმანი ჟურნალიდან „ფილოსოფიური მეცნიერებები“ - „Философские науки“ N4 (23) 2004 მოამზადეს თსუ პროფესორებმა: მიხეილ ამაღლობელმა და როლანდ ომანაძემ.

ილია ვეკუა დიპლომს გადასცემს ნოვოსიბირსკის უნივერსიტეტის პირველი გმოშვების წარჩინებულ კურსდამთავრებულს — იური ერშოვს

* აკადემიკოს ი.ლ.ერშოვის სამეცნიერო მოხსენება რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის პრეზიდიუმის სხდომაზე (მოსკოვი, 12 ნოემბერი, 2003 წ.). ტექსტი მომზადებულია სხდომის სტენოგრამის საფუძველზე.

მიხეილ ამაღლობელი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი;
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი;
ფ. მ. დოსტოევსკის სახელობის ომსკის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის საპატიო დოქტორი

როლანდ ომანაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა
დოქტორი, პროფესორი;
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო
მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მე მადლობელი ვარ შესაძლებლობისთვის გამოვიდე აქ მოხსენებით, თუმცა ჩემი ამოცანა არაა ადვილი, რადგან ის, რის შესახებაც მინდა მოვყვე, ეკუთვნის მათემატიკის ყველაზე უფრო აბსტრაქტულ ნაწილებს, რომელიც თვითონ არის ყველაზე აბსტრაქტული მეცნიერება. ალგებრა და ლოგიკა — ეს კვლევების საკმარისად ფართო არეებია და აქ მიმდინარეობს აქტიური და ნაყოფიერი მუშაობა. მე ამოვარჩიე მათი ურთიერთმოქმედების ვიწრო მიმართულება; მიმართულება, რომელიც, ჩემი შეხედულებით, წარმოადგენს ინტერესს და, მისი ისტორიული პერსპექტივის განხილვისას, შევეცდები რაც შეიძლება დიდხანს შევაჩერო პატივცემული სამეცნიერო საზოგადოების ყურადღება, იმიტომ, რომ მთლად ტექნიკური შედეგების მოყოლა საკმარისად რთულია.

მაშ ასე, ალგებრა და ლოგიკა, მათი ძველი და ახალი კავშირები. სიტყვები „ალგებრა“ და „ლოგიკა“ ყველასთვის ნაცნობია. ალგებრა ნაცნობია სასკოლო კურსიდან, ხოლო ლოგიკის შესახებ მართებულია შემდეგი ნამდვილი ამბავის მოყოლა. ერთი ჩემი გონებამახვილი კოლეგა მოჰყვა ცოტა ხნის წინ თავის სხვა კოლეგა-მათემატიკოსთან საუბარს. მან თქვა: „მე ვმუშაობ მათემატიკურ ლოგიკაში“ და მან სრულიად გულწრფელად უპასუხა შემდეგი: „იცი შენ, მე კი ჩემს მოღვაწეობაში ლოგიკით არასდროს ვსარგებლობდი!“ უნდა ითქვას, რომ ეს უფრო სუფთაა, ვიდრე ლიტერატურული გმირი, რომელიც გაოცებული იყო, როცა შეიტყო, რომ პროზაზე საუბრობდა. და ეს თქვა მათემატიკოსმა!

მათემატიკასა და ლოგიკას შორის ურთიერთქმედებები საკმარისად საინტერესოა. ამ ურთიერთქმედებებში მე გამოვყოფ სამ ისტორიულ პერიოდს. ისინი არ არის ურთიერთგამომრიცხავი, ისინი თანაიკვეთება, როცა, ფიგურულად რომ ვთქვათ, ალგებრა შეთავსებით ასრულებს მათემატიკური ლოგიკისა და ალგორითმების თეორიის როლს.

რას ნიშნავს „ასრულებს როლს“ და როგორია მათემატიკური ლოგიკის როლი? ისტორიულ პერიოდებზე შეხედულებები რეტროსპექტიულია: თანამედროვე შეხედულებით ჩვენ შეგვიძლია ინტერპრეტაცია მოვლენებისა, რომლებსაც ადგილი ჰქონდა წარსულში.

მათემატიკა ცნობილია იმით, რომ მასში შექმნილი და გამოცდილია ყველა ლოგიკური მეთოდი. ეს არის ერთ-ერთი საშუალებათაგანი, რომლის დახმარებით მათემატიკამ მიაღწია და ახლაც აღწევს სიმკაცრის თავის მაღალ დონეს. ცნობილია, რომ „ისტორიამდელ პერიოდში “ „სრულყოფის“ პიკი არის ევკლიდეს მიერ გეომეტრიის აქსიომატური წარმოდგენა. მისი არსი მდგომარეობს შემდეგში: სამეცნიერო დისციპლინის გადმოცე-

მა, მაგალითად, გეომეტრიის, იწყება აქსიომათა ზუსტი ფორმულირებით — „საწყისი ჭეშმარიტობებით“, ხოლო ყველა დანარჩენი, ანუ მიმდევრობითი გადმოცემა, გამომდინარეობს მიღებული წანამძღვრებისაგან ყველა დარჩენილი თეორემის ლოგიკური გამოყვანით.

მართლაც, აქსიომატური მეთოდი თამაშობდა და თამაშობს მნიშვნელოვან როლს არა მხოლოდ მათემატიკაში, არამედ სხვა დისციპლინებში. მაგრამ მე ვიტყოდი, რომ ლოგიკასთან მიმართებაში ევკლიდე იყო სუსტი. რა აზრით? საქმე იმაშია, რომ ლოგიკას ეპყრობოდა, როგორც რაღაც თავისთავად ნაგულისხმევს. ეს საკმარისად პრაგმატული შეხედულებაა. არ ვიტყვი, რომ ის ძალიან ცუდია: მრავალი საუკუნის განმავლობაში თუ ის ხელს უშლიდა, მაშინ მნიშვნელოვნად არა. ზოგჯერ, ცნობილი მეცნიერებიც უშვებდნენ ელემენტარულ ლოგიკურ შეცდომებს. ეს კიდევ მოსათმენი იყო, მაგრამ XIX-XX საუკუნეების მიჯნაზე წარმოიშვა ე. წ. პარადოქსები, რომლებმაც ეჭვის ქვეშ დააყენეს მათემატიკის, როგორც ყველაზე მეტად ზუსტი და უნაკლო მეცნიერების როლი. პარადოქსი — როცა ერთი და იგივე მსჯელობები, რომლებიც მიღებულია სამეცნიერო საზოგადოების მიერ, იძლევა ერთ შემთხვევაში ერთ შედეგს, მეორე შემთხვევაში — საწინააღმდეგოს. მაშინ გაიაზრეს აუცილებლობა გაეკეთებინათ კიდევ ერთი ნაბიჯი აქსიომატური მეთოდის განვითარებაში: საჭიროა ზუსტად იმ ლოგიკური საშუალებების გამოვლენა, რომლებიც დაშვებულია შედეგების მიღების გამოსაყენებლად, მათი გამოყვანისთვის.

ეს იყო პრობლემა, რომელმაც XIX-XX საუკუნეების მიჯნაზე მოიტანა თანამედროვე მათემატიკური ლოგიკის წარმოშობა. მიუხედავად ამისა, საუკუნეების განმავლობაში ალგებრამ, რომელიც არის ერთ-ერთი უძველესი მათემატიკური მეცნიერება, ფაქტობრივად ზუსტი დემონსტრაცია მოახდინა, მათ შორის ფორმალური, ლოგიკური გარდაქმნების, მაგრამ არაყველაზე რთული ლოგიკური დებულებების, არამედ იგივეობების დონეზე. შეიძლება ითქვას, რომ ალგებრამ მოახდინა შრომის კოდიფიცირება იგივეობებთან. ეს საკმარისად მნიშვნელოვანი მომენტია. და, ახლა, მე მივმართავ მარტივ მაგალითს სკოლის ალგებრიდან. სკოლაში სწავლობენ x^2+ax+b განტოლების ამოხსნას, სადაც a და b ამონახსნების პარამეტრებია, და საჭიროა ამ განტოლების ფესვების პოვნა. როგორ ხდება ეს? კეთდება გარკვეული გარდაქმნები და მიიღება ამოხსნის ფორმულა, რომელიც იძლევა ამ კვადრატული განტოლების ამოხსნას:

$$x^2+ax+b=0$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b=0$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2-4b}{4}$$

$$x+\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{a^2-4b}{2}}\,.$$

ამ იგივურ გარდაქმნებს მივყავართ ამოცანის ამოხსნამდე, კერძოდ, განტოლების ფესვების პოვნასთან, ხოლო განტოლების ფესვების პოვნა — ეს იყო ამოცანა, რომელსაც სვამდა რიცხვთა თეორიაც და არითმეტიკაც, ხოლო ალგებრა ცდილობდა ამოეხსნა ეს განტოლებები ზოგადი სახით.

სხვა შეხედულება (როცა უკვე მიიღეს ეს ამოხსნები) მდგომარეობს შემდეგში. ეს ფორმულა ფაქტობრივად წარმოადგენს ამოხსნის პოვნის გარკვეული ალგორითმის ჩანაწერს. ის შეიძლება ინტერპრეტირებული იქნას, როგორც გარკვეული მითითება: რა უნდა გაკეთდეს, კოეფიციენტებზე როგორი არითმეტიკული მოქმედებები უნდა ვაწარმოოთ იმისათვის, რომ ვიპოვოთ კვადრატული განტოლების ფესვი, ანუ ალგებრული ფორმულები წარმოადგენდეს ალგორითმების პირველ ფორმალურ ჩანაწერებს. ამიტომ ალგებრა ასრულებდა ალგორითმების თეორიის როლსაც.

XV-XVI საუკუნეების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანა იყო უფრო მაღალი ხარისხის განტოლების ფესვების პოვნა. მაგალითად, ცნობილია კარდანოს ფორმულა კუბური განტოლების ფესვისთვის:

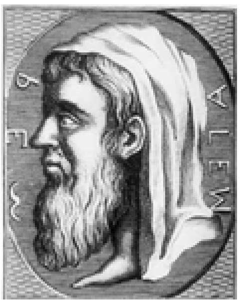
$$x^3+px+q=0$$

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$$

აქ განტოლების კანონიკურ ჩანაწერში არაა კვადრატი, ამასთანავე, გარკვეული გარდაქმნების დახმარებით ზოგადი განტოლება მიიყ-

ვანება მოცემულ სახემდე. ამიტომ, თუმცა, ეს უფრო რთული გამოსახულებაა, მაგრამ ისიც წარმოადგენს განტოლების ფესვების პოვნის ალგორითმის ჩანაწერს.

მაშ ასე, პირველი ისტორიული პერიოდი — VIII-XVI საუკუნეები. ალგებრა ასრულებს (შეთავსებით) (მათემატიკური) ლოგიკის და ალგორითმების თეორიის როლს. მე მოვიყვან ზოგიერთ სახელს, რომელიც ეკუთვნის ამ პერიოდს: აბუ ჯაფარ მუჰამად იბნ მუსა ალხორეზმი (783-850), ჯელორამო კარდანო (1501-1576), ლუდოვიკო ფერარი (1522-1565), ფრანსუა ვიეტი (1540-1603), რენე დეკარტი (1596-1650), ევარისტ გალუა (1811-1832) და სხვ.

			
ევკლიდე ძვ. წ. 325-265	მუჰამედ იბნ მუსა ალ ხორეზმი ალ მაჯუსი 783-850	ჯელორამო კარდანო 1501-1576	ფრანსუა ვიეტი 1540-1603

პირველად მივუთითე ალ-ხორეზმის სახელი, რომელიც არც ისე კარგადაა ცნობილი ფართო საზოგადოებისთვის, მაგრამ, მიუხედავად ამისა, ეს ადამიანი არის უნიკალური. ის დაიბადა VII საუკუნის ბოლოს და იცხოვრა VIII საუკუნის შუამდე. ორი სიტყვა, რომელიც მათემატიკურ ყოველდღიურ ცხოვრებასა და საზოგადოების ყოველდღიურ ცხოვრებაში არსებობს, — „ალგორითმი“ და „ალგებრა“ — დაკავშირებულია ამ ადამიანის სახელთან.

სიტყვა „ალგორითმი“ — ეს არის ტრანსფორმაცია ალ-ხორეზმის სახელის (ლათინურად dixit algorizmi — ასე თქვა ალ-ხორეზმიმ), ხოლო „ალგებრა“ წარმოიშვა ალგებრაში მისი წიგნის არაბული დასახელებიდან الْكِتَاب الْمُخْتَصَر فِي حِسَاب الْجَبْر وَالْمُقَابَلَة — „კიტატ ალ-მუხასსარ იბნ ხასაბ ალ-გაბრ ალ-მუკაბალა“ (შევსებათა და წინააღმდეგობათა მოკლე წიგნი). ეს არის უნიკალური შემთხვევა, როცა ორი ასეთი უმნიშვნელოვანესი და ფართო ცნება დაკავშირებულია ერთი ადამიანის სახელთან, მეტიც, ის ცხოვრობდა საკმარისად დიდი ხნის წინათ.

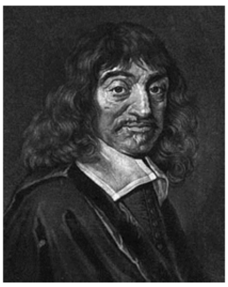
მათ კვალს მიჰყვება იმ იტალიელთა სახელები, რომლებიც ეძებდნენ, ცდილობდნენ ეპოვათ ზოგადი ფორმულები უფრო მაღალი ხარისხის ერთი ცვლადის განტოლების ამოხსნისათვის.

პრინციპული ნაბიჯი, რომელიც შემდეგ გაკეთდა, დაკავშირებულია უდიდეს ფრანგ ფილოსოფოსთან, რენე დეკარტთან. ამ კონტექსტში მისი სახელის ხსენება მნიშვნელოვანია, რადგან კოორდინატების შემოტანით, დეკარტმა პირველმა აჩვენა,რომ ბევრი გეომეტრიული საკითხი შეიძლება ფორმულირებული იქნეს ალგებრულად, ე. ი. კვლავ დაყვანილი იქნეს განტოლების ამოხსნაზე, განტოლებათა სისტემის ამოხსნაზე და ა. შ.

ცნობილია სალიერის სიტყვა პუშკინის ტრაგედიიდან „მოცარტი და სალიერი“: „...ვირწმუნე მე ჰარმონიის ალგებრა“. ეს სიტყვები აჩვენებს, რომ პუშკინს ინტუიციურად ესმოდა, რომ ალგებრასთან დაკავშირებულია გარკვეული ფორმალური მიდგომა, რომელიც იძლევა ანალიზის საშუალებას. ასე რომ, მე ვიტყოდი, რენე დეკარტს სჯეროდა გეომეტრიული ალგებრის და ეს იყო ნამდვილად უდიდესი მიღწევა. ალგებრამ შექმნა განტოლების გარდაქმნისა და ამოხსნის ტექნიკა.

ცოტა ხნის წინ თარგმნეს ამერიკელი ფილოსოფოსის, რენდალ კოლიზის, საკმარისად სერიოზული წიგნი „ფილოსოფიის სოციოლოგია. ინტელექტუალური ცვლილების გლობალური თეორია“, სადაც ის აანალიზებს მეცნიერების განვითარებას და, კერძოდ, ამბობს, რომ ევროპაში მეცნიერების განვითარება, XVI-XVII საუკუნეებში მეცნიერების აყვავება დაკავშირებულია ახალი ინსტრუმენტების შემოტანასთან. ამ ინსტრუმენტების გამოჩენამ სტიმული მისცა „სწრაფი აღმოჩენების მეცნიერებას“. მათემატიკა ხდება აღმოჩენების წარმოებების მანქანა და დეკარტი იყო „თავდადებული დამცველი ახალი ალგებრული მიდგომის. მან გაათავისუფლა მათემატიკის ბოლო დარგებიდან, რომელიც დარჩენილი იყო გამოუთავისუფლებელი კლასიკის ჰუმანიტარული აღორძინებით, და ისინი გახადა ამოცანათა სწრაფი ამოხსნის ტექნიკად“. ამავე დროს კოლიზი ამბობს, რომ „სწრაფი აღმოჩენების თეორიის“ სხვა წყარო იყო მათემატიკა, კერძოდ, ალგებრა, როგორც მეცნიერება, რომელიც აწვდიდა ამოხსნებისა და გარდაქმნების ტექნიკას. ფაქტობრივად, ალგებრა იყო თანამედროვე მეცნიერების ინსტრუმენტთა ბაზის ანალოგი.

ბოლოს, ევარისტ გალუა, ტრაგიკულად დაღუპული ახალგაზრდა ფრანგი მათემატიკოსი, რომელმაც დაამტკიცა ზოგადი ფორმულის არარსებობა მეხუთე ხარისხის განტოლებისათვის. ეს იყო შესანიშნავი მიღწევა. ამასთანავე, ეს იყო შესანიშნავი მიღწევა საშუალებების თვალსაზრისითაც, რომლითაც მიღებული იყო დამტკიცება, რადგან ანალოგიური შედეგი აჩვენა აბელმაც, მაგრამ გალუამ ეს გააკეთა ისეთი მეთოდით, რომ მე მას ვუწოდებ მაუწყებელს ან თანამედროვე მათემატიკის ერთ-ერთ დამფუძნებელს. მან კლასიკური მათემატიკის ამოცანის ამონახსნის შესასწავლად მოიზიდა სხვა, ახალი ობიექტები: ავტომორფიზმთა ჯგუფები, სასრული ჯგუფები, სასრული ველები და ა. შ. მეორე მხრივ, თვითონ გალუას შედეგი შეიძლება ინტერპრეტირებული იყოს ალგორითმული თვალსაზრისითაც. შეიძლება ითქვას, გალუას თეორემა არის ალგორითმულად ამოუხსნადი პრობლემის პირველი მაგალითი. თუ ალგორითმის ქვეშ გავიგებთ ფორმულას, რომელიც გამოსახავს ფესვს რადიკალებით, შეკრებით, გამრავლებით და გაყოფით, მაშინ მან აჩვენა, რომ ასეთი წარმოდგენა, ასეთი ალგორითმი უბრალოდ არ არსებობს. შემდეგ ცნებამ „ალგორითმი“ შეიძინა მეტი ზოგადი ფორმა.

			
რენე დეკარტი 1596-1650	ევარისტ გალუა 1811-1832	ნილს ჰენრიხ აბელი 1802-1829	გოტფრიდ ლეიბნიცი 1646-1716

მეორე ისტორიული პერიოდი — XVII-XX საუკუნეები. ალგებრა ეხმარება ლოგიკას იპოვოს თავისი გზა მათემატიკაში. აქაც შეიძლება მოვიყვანოთ მთელი რიგი სახელები: გოტფრიდ ლეიბნიცი (1646-1716), ჯორჯ ბული (1815-1864), ერნსტ შრედერი (1841-1902), გოტლობ ფრეგე (1848-1925), დავიდ ჰილბერტი (1862-1943) და სხვ.

უდიდესი გერმანელი ფილოსოფოსი გოტფრიდ ლეიბნიცი სამართლიანად შეიძლება ჩაითვალოს მათემატიკური ლოგიკის დამფუძნებლად. მან პირველმა ცხადი სახით დასვა ამოცანა და ცდილობდა შემოეტანა უნივერსალური ენა, უნივერსალური აღრიცხვა, რომელსაც შეეძლო მოეცვა მთელი მათემატიკა. გარდა ამისა, ნიუტონთან ერთად ის იყო მათემატიკური ანალიზის შემქმნელი. მაგრამ ის

იყო მათემატიკური ლოგიკის დამფუძნებელი, რადგან მან პირველმა გაიაზრა ამის აუცილებლობა. მეორე ელემენტი, რომელიც მათემატიკურმა ლოგიკამ შეიტანა აქსიომატური მეთოდის სრულყოფაში და, ამ მიმართებით, ალგებრა სერიოზულად დაეხმარა, — ესაა უფრო და უფრო მეტი მდიდარი ფორმალური ენების გამოყენება. თვით ამოხსნის ტექნოლოგიაში წარმატება ბევრად იყო დაკავშირებული ფორმალური ენების შემოტანაში და მათი გარდაქმნის ზუსტ წესებში. თუ ალგებრა მუშაობდა იგივეობებთან, იგივეობების გარდაქმნებთან, მაშინ ლეიბნიცმა დასვა ამოცანა იმის შესახებ, შეიძლება თუ არა შეიქმნას ისეთი ფორმალური ენა, რომელიც ყველაფრის შესახებ ზუსტად საუბრის (გამოთვლის) საშუალებას იძლევა.

შემდეგ, ისეთი მათემატიკოსები, როგორებიც არიან ბული და შრედერი, პირველები ეცადნენ უფრო მეტი წარმატებით ამოეხსნათ ეს ამოცანა. ამიტომ არ შეიძლება ითქვას, რომ ლეიბნიცმა წარმატებით გადაწყვიტა უნივერსალური ფორმალური ენის შექმნის ამოცანა. ლოგიკის ფორმალიზების მცდელობა ერთ-ერთმა პირველმა სცადა ინგლისელმა მათემატიკოსმა ბულმა, რომლის სახელი მათემატიკაში დარჩა სათაურში „ბულის ალგებრა". ეს აჩვენებს, რომ ალგებრა იყო გზის ის მანათობელი ვარსკვლავი, რომელმაც ბოლოს და ბოლოს მიიყვანა თანამედროვე მათემატიკური ლოგიკის აგებამდე.

კიდევ ერთი სახელი— დავიდ ჰილბერტი, რომელიც მე მივუთითე, როგორც მეორე პერიოდის საბოლოო საკვანძო ფიგურა. ეს არის უდიდესი გერმანელი მათემატიკოსი, რომელიც მუშაობდა მათემატიკის მრავალ დარგში, კერძოდ, რიცხვთა თეორიაში, მათემატიკურ ფიზიკაში და სხვ., და დიდი როლი ითამაშა მათემატიკური ლოგიკის შექმნასა და ფორმალიზაციაში. გარკვეული აზრით, მან დაასრულა მეორე ციკლი. XIX-XX საუკუნეების მიჯნაზე მან გამოაქვეყნა წიგნი „გეომეტრიის დაფუძნება". ეს იყო გეომეტრიის თანამედროვე აქსიომატური გადმოცემა, სადაც გეომეტრიულ აქსიომებთან ერთად ცხადი სახით იყო ფორმულირებული ლოგიკური აქსიომებიც, ანუ ცხადი სახითაა მითითებული ის ლოგიკური საშუალებები, რომლებიც დასაშვებია შედეგების მისაღებად და თეორემების დასამტკიცებლად.

ამის საფუძველზე წარმოიშვა მრავალი სხვადასხვა მოვლენა. კერძოდ, როცა ცხადი სახით ფორმალიზდება ზოგიერთი აქსიომა, წარმოიქმნება სავსებით მოულოდნელი საგნები. როცა აქსიომატიზირებული იქნა სიმრავლეთა თეორია და ცხადი სახით ფორმულირდა ამორჩევის აქსიომა, რომლითაც ინტუიციურად და არაცხადად სარგებლობდა მრავალი მათემატიკოსი, უცბად აღმოჩნდა, რომ მას მივყავართ პარადოქსულ შედეგებამდე. ხოლო ლოგიკური საშუალებების გამოვლენამ, ვთქვათ, საწინააღმდეგოს დაშვებიდან მსჯელობამ, მიიყვანა იქამდე, რომ თავის მოღვაწეობაში თვითონ ჰილბერტი სარგებლობდა ამით. საწინააღმდეგოს დაშვების გამოყენებით, მან იპოვა ინვარიანტთა სასრულობის შესახებ ცნობილი თეორემის საკმარისად მოკლე დამტკიცება. როგორც შედეგი მათემატიკოსების მხრიდან, რომლებიც მუშაობდნენ ამ პრობლემით, შეიმჩნეოდა ჰილბერტის დამტკიცების გარკვეული უარყოფა, რადგან კლასიკური მათემატიკა იყო ინტუიციურად კონსტრუქტიული. ანუ, როცა საუბარია რაღაცის არსებობის შესახებ, უნდა იყოს მითითებული ამ ობიექტის აგების გზა, და მისი არსებობის არამხოლოდ დამტკიცება. მიუხედავად ამისა, ცოდნის მიღებისათვის საწინააღმდეგოს დაშვებით მსჯელობა არაფრით არაა უარესი საშუალება.

მაშ ასე, XIX-XX საუკუნეების მიჯნაზე ჩამოყალიბდა მათემატიკური ლოგიკა, როგორც დამოუკიდებელი დისციპლინა, მაგრამ მან ვერ გადაწყვიტა ყველა ამოცანა. ჰილბერტის ერთ-ერთი მიზანი იყო აეგო ისეთი ფორმალური აღრიცხვა, რომელშიც მოთავსდება მთელი მათემატიკა, და დამტკიცდებოდა მისი არაწინააღმდეგობრიობა, ანუ სამუდამოდ უზრუნველეყო აყვავებული მომავალი. გეოდელის თეორემების გამო, ეს მიზანი ვერ იქნა მიღწეული, თუმცა ეს არ არის სავსებით მოულოდნელი. მიუხედავად ამისა, მათემატიკაში დიდი სიზუსტის მიღწევის მიზანი შესრულდა (აქსიომატური მეთოდის განვითარების სახით ზემოთ აღნიშნულ ორ ნაბიჯში).

მათემატიკურმა ლოგიკამ თითქოს შეასრულა თავისი როლი, მაგრამ დადგა მესამე პერიოდი — ფაქტობრივად უნიკალური პერიოდი, როცა ლოგიკა იწყებს „ვალი გადაუხადოს" ალგებრას. ეს მოხდა, ჩემი აზრით, სავ-

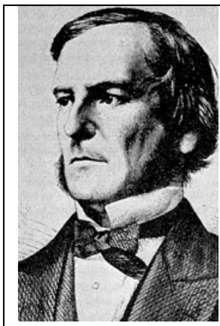
სებით მოულოდნელად. ისტორიულად ეს არაფრით არ იყო გამართლებული. 1941 წ. ანატოლი ივანეს ძე მალცევმა, მაშინ ჯერ კიდევ არააკადემიკოსმა, გამოაქვეყნა სტატია, რომელსაც ერქვა „ჯგუფთა თეორიაში ლოკალური თეორემების მიღების ერთი ზოგადი მეთოდის შესახებ“.

გარკვეული წინაისტორია: 1936 წ. ანატოლი ივანეს ძე მალცევმა დაამტკიცა ძალიან მნიშვნელოვანი თეორემა, რომელიც ეხება მათემატიკურ ლოგიკას, — ე. წ. პრედიკატთა აღრიცხვის ენის კომპაქტურობის თეორემა, რომელიც მათემატიკური ლოგიკის მთელი მიმართულების შექმნის საფუძველი გახდა. მას ეწოდება „მოდელების თეორია“ და ამჟამად სავსებით წარმატებით ვითარდება. მან აღმოაჩინა, რომ ჯგუფთა თეორიის ზოგიერთი თეორემა, რომელთაგან თითოეულს ჰქონდა თავისი საკუთარი, ხშირად საკმარისად რთული დამტკიცება, რომელიც ატარებს ლოკალური თეორემების სახელს, ფაქტობრივად, მათემატიკური ლოგიკის ზოგადი პრინციპის შედეგებია, ამასთანავე, კომპაქტურობის თეორემის უფრო მარტივი შედეგები, ვიდრე მათი კონკრეტული დამტკიცებები.

რამდენიმე სიტყვა იმის შესახებ, რა არის *ლოკალური თეორემა.* მე მოვიყვან ერთ კონკრეტულ მაგალითს და ვიმედოვნებ, რომ ეს მაგალითი შეიძლება გაიგონ არა მხოლოდ მათემატიკოსებმა, არამედ ფიზიკოსებმაც.

რა არის ჯგუფი? მე უკვე ვახსენე ჯგუფები გალუას სახელთან დაკავშირებით, ჯგუფი — ეს ისეთი ალგებრული სისტემაა, რომელიც აღწერს სიმეტრიებს ან ავტომორფიზმებს, თუ ვიტყვით მათემატიკური ენით. კერძოდ, თუ არის n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცე კომპლექსურ რიცხვებზე, მაშინ მისი ავტომორფიზმების ჯგუფი — ე. წ. ზოგადი წრფივი ჯგუფი — ძალიან კონსტრუქციულია. თუ დავაფიქსირებთ ამ ვექტორული სივრცის ბაზისს, ყოველი ავტომორფიზმი აღიწერება $n\times n$ რიგის კვადრატული მატრიცით, ხოლო ამ ავტომორფიზმების ნამრავლი ფაქტიურად არის მატრიცების ნამრავლი. ამიტომ ეს სავსებით კონკრეტული ობიექტია, რომელთანაც შეიძლება შედარება.

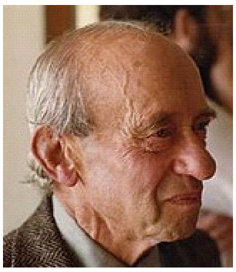
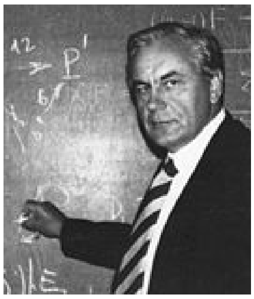
კითხვაზე, იმის შესახებ, აქვს თუ არა რაიმე ჯგუფს, რომელიც შეიძლება წარმოიშვა სრულებით სხვა მოსაზრებით, მატრიცული წარმოდგენა (არის თუ არა იმ ჯგუფის იზომორფული ჩადგმა მატრიცთა ჯგუფში), ხშირად ძალიან მნიშვნელოვანია. ასე რომ, ერთ-ერთი ლოკალური თეორემის მიხედვით: თუ ჯგუფი ისეთია, რომ ყოველ ქვეჯგუფს, რომელიც წარმოიქმნება ელემენტთა სასრული რიცხვით, აქვს იზომორფული ჩადგმა $n\times n$ რიგის მატრიცთა ჯგუფში, მაშინ თვით ამ ჯგუფს აქვს იზომორფული ჩადგმა $n\times n$ რიგის მატრიცთა ჯგუფში. ასეა, თვისება, ჰქონდეს ზუსტი მატრიცული წარმოდგენა ფაქტიურად არის ლოკალური თვისება: თუ არის ჩადგმის რაიმე წინააღმდეგობა, მაშინ ეს წინააღმდეგობა ფაქტიურად რეალიზდება რაიმე სასრულად წარმოქმნილ ქვეჯგუფზე. ასეთი თეორემები ზღვაა. ამ თეორემის ალგებრული დამტკიცება საკმარისად რთულია, ხოლო ლოგიკური — მარტივი.

				
ჯორჯ ბული 1815-1864	ერნსტ შრედერი 1841-1902	გოტლობ ფრეგე 1848-1925	დავიდ ჰილბერტი 1862-1943	ანატოლი ივანეს ძე მალცევი 1909-1967

ამ ნაშრომის გამოჩენისას დადგა მესამე ეტაპი, რომელიც წარმატებით გრძელდება ახლანდელ დრომდე. მაშ ასე, მესამე ისტორიული პერიოდი — 1941 წლიდან ახლანდელ დრომდე. ლოგიკა იწყებს ალგებრისთვის „ვალის გადახდას“. სახელები, რომლებიც აქ უნდა დავასახელოთ — ანატოლი ივანეს ძე მალცევი (1909-1967), ალფრედ ტარსკი (1902-1983), აბრაჰამ რობინსონი (1918-1974), იან დენეფი, ეხუდ ხრუშოვსკი და სხვ.

ალფრედ ტარსკი და აბრაჰამ რობინსონი — ეს მათემატიკოსები, ანატოლი ივანეს ძე მალცევთან ერთად, არიან მათემატიკური ლოგიკის მიმართულების შემქმნელები, რომელსაც ეწოდება მოდელების თეორია. მოდელების თეორია აღმოჩნდა მეტად წარმატებული. მაგრამ მე მაინტერესებს ლოგიკის და ალგებრის ურთიერთმიმართება მათემატიკის სხვა მიმართულებასთან. ალფრედ ტარსკიმ მათემატიკური ლოგიკის დახმარებით დააფუძნა ე. წ. ლეფშეცის პრინციპი. ცნობილმა ამერიკელმა ტოპოლოგმა და ალგებრული გეომეტრიის სპეციალისტმა სოლომონ ლეფშეცმა (1884-1972) ჩამოაყალიბა ასეთი არაფორმალური პრინციპი: თუ რაიმე დამტკიცებულია ალგებრულ გეომეტრიაში კომპლექსურ რიცხვთა ველზე, მაშინ ეს სამართლიანია ნებისმიერი ალგებრულად ჩაკეტილი ველისთვის. აღმოჩნდა, რომ, თუ ამას ლოგიკურად ჩამოვაყალიბებთ, მაშინ შეიძლება დამტკიცებაც.

აბრაჰამ რობინსონმა, რომელმაც მოდელების თეორიაში შემოიტანა საკმარისად ბევრი სასარგებლო ცნება, შემოგვთავაზა უსასრულოდ მცირეს მათემატიკური მოდელი. იგივე ლეიბნიცი ანალიზის აგებისას სარგებლობდა უსასრულოდ მცირეს ცნებით, რომელიც შემდეგ განდევნეს ანალიზის თანამედროვე გადმოცემისას. უსასრულოდ მცირეების გარეშე შეიძლებოდა გვერდის ავლა, ამის მიუხედავად ამას ჰქონდა თავისი ევრისტიკული აზრი. გამოდის, რომ ფაქტიურად შეიძლება რიცხვთა ისეთი მოდელების აგება, რომლებშიც არის უსასრულოდ მცირეები, და შეიძლება მათით სარგებლობა.

				
ალფრედ ტარსკი 1902-1983	აბრაჰამ რობინსონი 1918-1974	სოლომონ ლეფშეცი 1884-1972	იგორ შაფარევიჩი 1923-2017	ზენონ ბორევიჩი 1923-2017

მესამე ეტაპი — ესაა მათემატიკური ლოგიკის გამოყენება თანამედროვე ალგებრაში, თანამედროვე მათემატიკაში.

ამასთანავე, ირკვევა, რომ მათემატიკური ლოგიკის მეთოდები შეიძლება წარმატებით გამოიყენებოდეს კლასიკურ ობიექტებშიც, რომლებიც დაკავშირებულია არითმეტიკასთან, რიცხვთა თეორიასთან, ალგებრულ გეომეტრიასთან. ბელგიელმა მათემატიკოსმა იან დენეფმა მოგვცა ლოგიკური დამტკიცება შაფარევიჩ-ბორევიჩის ჰიპოთეზისა ველის მწკრივების რაციონალობის შესახებ, რომლებიც დაკავშირებულია მოდულით pn განტოლების ამოხსნის წერტილთა რიცხვთან. დეტალებში არ შევალ, მაგრამ მნიშვნელოვანია თვითონ ფაქტი. ალგებრულ-გეომეტრიული მეთოდებით ეს ჰიპოთეზა დაამტკიცა ჯ. იგუზამ, ხოლო დენეფმა, გამოიყენა ის, რომ ლოგიკა p-ადური რიცხვების კარგად ცნობილია, მოგვცა სხვა დამტკიცება — უფრო მარტივი და ლოგიკური.

ისრაელელმა მათემატიკოსმა ეჰუდ ხრუშოვსკიმ გადაწყვიტა ზოგიერთი ძნელი არითმეტიკულ-ალგებრული პრობლემა, რომელიც დაკავშირებული იყო აბელური მრავალსახეობების წერტილთა რიცხვთან, — ესაა მამფორდის ჰიპოთეზა, მანინის ჰიპოთეზა და ა. შ. აქ სიტუაცია ასეთია: ნაპოვნი იყო ლოგიკური დამტკიცება ჰიპოთეზებისთვის, რომლებისთვისაც ლოგიკური დამტკიცება უბრალოდ არ არსებობდა.

დასასრულს, მინდა რაღაც ავხსნა ზოგიერთ ჩემს შრომასთან დაკავშირებით. კლასიკური მათემატიკა განიხილავს ობიექტთა რიცხვის შეზღუდვებს — რაციონალური, ნამდვილი და კომპლექსური რიცხვები, სიბრტყეები, სივრცეები და სხვ. თანამედროვე მათემატიკა არ ზღუდავს თავის თავს ობიექტების არჩევაში და, თუ საჭიროა, ქმნის ყველაფერს ახალს და ახალს. იმისათვის, რომ ნაყოფიერად ვიმუშაოთ ობიექტთა ასეთ მრავალსახეობაში, უნდა შეგვეძლოს ამოვირჩიოთ, ამა თუ იმ აზრით, „უფრო მეტად მნიშვნელოვანი“, რაც საშუალებას გვაძლევს მოვფინოთ სინათლე მთლიანად სიტუაციას. ასე რომ, მათემატიკაში ტრადიციული მიდგომა არის, პირველ რიგში, სრული (მეტრიკული, ტოპოლოგიური და ა. შ.) სივრცეების განხილვა გასრულების პროცედურასთან ერთად. კატეგორიის თეორია სასარგებლოა იმით, რომ გვთავაზობს კატეგორიის პროექტიული და ინვექტიური ობიექტების შესწავლას. მათემატიკურ ლოგიკას შეაქვს თავისი დადებითი წვლილი „მნიშვნელოვანი“ ობიექტების შერჩევის მეთოდოლოგიის შექმნაში.

ასეთი მნიშვნელოვანი ცნებების ობიექტი, რომელთა წარმოშობა მოდის ლოგიკიდან, არის E-ჩაკეტილი სისტემის ცნება. შევეცდები ავხსნა მაგალითზე. ვთქვათ, C კომპლექსურ რიცხვთა ველია; $F_0 \le F_1$ C-ს ქვეველია (ანუ ქვესიმრავლე, რომელიც ჩაკეტილია შეკრების, გამოკლების, გამრავლების და ნულისგან განსხვავებულ რიცხვებზე გაყოფის მიმართ). F_0 არის E-ჩაკეტილი F_1-ში, თუ F_0-ზე მრავალწევრების ტოლობათა და უტოლობათა ნებისმიერ სასრულ სისტემას, რომელსაც აქვს ამოხსნა F_1-ში, აქვს ამოხსნა F_0-იც. თუ K არის C ველის ქვეველთა რაიმე კლასი, მაშინ F_0 ველი K-დან არის E-ჩაკეტილი (K კლასში), თუ ნებისმიერი ისეთი F_0 ველისთვის K-დან, რომ $F \le F_0$ (F არის F_0-ის ქვეველი), F არის E-ჩაკეტილი F_0-ში. K კლასის ვარირებით, მივიღებთ განსხვავებულ ცნებებს. ასე, მაგალითად, თუ K კლასი შედგება C ველის ყველა ქვეველისგან, მაშინ E-ჩაკეტილი K-ში იქნება ზუსტად C ველის ალგებრულად ჩაკეტილი ქვეველები.

K კლასში E-ჩაკეტილი ველების არსებობის შესახებ საკითხი წყდება დადებითად, თუ K ჩაკეტილია K-ს ელემენტების ერთმანეთში ჩადგმის ჯაჭვების გაერთიანების მიმართ.

რიცხვთა თეორიის კლასიკურ ობიექტს — რაციონალურ რიცხვთა Q ველს აქვს რიგი ბუნებრივი მეტრიკებისა: ერთი დაკავშირებულია Q-ზე ბუნებრივ წრფივ დალაგებასთან, სხვა განისაზღვრება გაყოფის მიმართების დახმარებით მთელ რიცხვთა რგოლში $Z \le Q$ ფიქსირებული მარტივი p რიცხვის ხარისხით. Q-ს გასრულებები ამ მეტრიკებით იძლევა ნამდვილ რიცხვთა ველს და p-ადურ რიცხვთა ველს. ყველა ეს გასრულება აღმოჩნდა უფრო „მარტივი“ ობიექტები. მათემატიკურმა ლოგიკამაც მისცა ზუსტი აზრი ამ „სიმარტივეს“, რომელიც ადრე იგრძნობოდა პრაქტიკულ დონეზე, — მათში უფრო მარტივია განტოლებების ამოხსნა.

1948 წ. ალფრედ ტარსკიმ დაამტკიცა ალგორითმული ამოხსნადობა ნამდვილი რიცხვებისთვის, ხოლო 1965 წ. (როგორც ტარსკის კითხვაზე პასუხი) p-ადურ რიცხვთა ველის ალგორითმულად ამოხსნადობა იყო ნაჩვენები ჩემს მიერ და ამერიკელი მათემატიკოსების (ერთად) — რიცხვთა თეორიის სპეციალისტის, ჯ. აკსის და მოდელების თეორიის სპეციალისტის, ს. კოჩენის მიერ. ველის ალგორითმულად ამოხსნადობა ნიშნავს ალგორითმის არსებობას, რომელიც ველისთვის ამა თუ იმ დებულების სამართლიანობის შესახებ ნებისმიერ კითხვაზე იძლევა (სწორ) პასუხს, სამართლიანია ის თუ არა. შევნიშნოთ, რომ რაციონალურ რიცხვთა Q ველისთვის ასეთი ალგორითმი არ შეიძლება არსებობდეს.

მაშ ასე, ვაჩვენეთ, რომ არსებობს Q ველის უსასრულოდ ბევრი „კარგი“ გასრულება. მე დამაინტერესა კითხვამ: შეიძლება თუ არა „შევკრიბოთ“ ეს (ერთმანეთთან არასადარი) გასრულებები ერთ „კარგ“ ველში? ველთა შესაბამის კლასში E-ჩაკეტილი ველის ცნების გამოყენებით დადებითი პასუხი მივიღე. 1936 წ. ფრანგმა მათემატიკოსმა კ. შევალემ განსახილველად შემოიტანა მნიშვნელოვანი რგოლი ა დ ე ლ ე ბ ი ს (ნამდვილ რიცხვთა ველისა და p-ადურ რიცხვთა ველის პირდაპირი ნამრავლის შესაბამისი ქვეველი), რომელთა ტერმინებშიც მოხდენილად გადმოსცა ე. წ. ველთა კლასების გლობალური თეორია — რიცხვთა თეორიის ერთ-ერთი ღრმა მიმართულება. თუ ველთა K კლასის როლში ავიღებთ ა დ ე ლ ი ს რგოლის ყველა თვლადი ქვეველების ოჯახს, მაშინ K-ში E-ჩაკეტილი ველები — ესაა ველები, რომლებსაც მე ვუწოდე რაციონალურ რიცხვთა ველის საოცარი გაფართოებები. აღმოჩნდა, რომ ყოველ ასეთ ველს აქვს ერთი და იგივე თეორია (ერთი და იგივე თვისებები) და ეს თეორია ალგორითმულად ამოხსნადია. ეს თეორია თავისთავში ასევე თანაბრად „შეიცავს“ ნამდვილ რიცხვთა და p-ადურ რიცხვთა ყველა თეორიას.

ამის შემდეგ (იხ. ჩემი შენიშვნა 2003 წ. რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის მოხსენებებში) აღმოჩნდა, რომ ეს საოცარი გაფართოებები შეიძლება გამოვიყენოთ ველების კლასთა გლობალური თეორიის ახალი წარმოდგენისთვისაც. რამდენადაც საოცარ გაფართოებათა თეორია ალგორითმულად ამოხსნადია, იმდენად შეიძლება თვითონ ველთა კლასების გლობალური თეორიის ეფექტურობა, კერძოდ, უ რ თ ი ე რ თ კ ა ვ შ ი რ ი ს გადასახვა შეიძლება ეფექტურად გამოვთვალოთ.

მესამე ეტაპის მიღწევების შეჯამებისას, შეიძლება აღვნიშნოთ, რომ მათემატიკური ლოგიკის მეთოდების გამოყენებამ წარმოაჩინა თავისი წარმატება თანამედროვე მათემატიკის პრობლემების გადაწყვეტიდან დაწყებული, შემდეგ, კლასიკური მათემატიკის პრობლემების გადაწყვეტასა და, ბოლოს, როგორც „ჩარევა“ კლასიკური მათემატიკის კონცეპტუალურ აპარატში. ეჭვი არაა „ვალების გადახდის“ შემდეგ პროგრესშიც.

რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის
ციმბირის განყოფილების
მათემატიკის ინსტიტუტი,
ნოვოსიბირსკი

თარგმანი

[1] „философия нвуки“. № 4(23), 2004.
[2] „Алгебра и логика: старые и новые связи“. Ю. Л. Ершов.

ავტორების ელექტრონული მისამართები: *mikheil.amaglobeli@tsu.ge; roland.omanadze@tsu.ge*

უსასრულო დაშვების ფერმას მეთოდი და მისი გამოყენება

თეიმურაზ ვეფხვაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი; ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

უსასრულო დაშვების ფერმას მეთოდი არის საწინააღმდეგოს დაშვებით დამტკიცების ერთ-ერთი ხერხი. იგი ეყრდნობა დებულებას: ნატურალურ რიცხვთა ნებისმიერ ქვესიმრავლეში არსებობს უმცირესი ელემენტი. ეს დებულება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის დაფუძნების პეანოს აქსიომათა სისტემის ერთ-ერთი აქსიომის — ინდუქციის აქსიომის ეკვივალენტურია. ზოგჯერ ნატურალურ რიცხვთა აგებისას ინდუქციის აქსიომის ნაცვლად უმცირესი ელემენტის არსებობის აქსიომა გამოიყენება. გავიხსენოთ ინდუქციის აქსიომაც: ვთქვათ, N — ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა, A — მისი ქვესიმრავლე. თუ სრულდება ორი პირობა: 1) $1\in \mathrm{A}$; 2) ყოველი n-ისთვის, $n\in \mathrm{A}$ პირობიდან გვაქვს $n+1\in \mathrm{A}$; მაშინ $\mathrm{A}=\mathrm{N}$. ეს აქსიომა მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის საფუძველია.

უსასრულო დაშვების მეთოდს ევკლიდის „საწყისებშიც" ვხვდებით. ევკლიდე ამ მეთოდს იყენებს, როცა ასაბუთებს, რომ ყოველი შედგენილი რიცხვი იყოფა გარკვეულ მარტივ რიცხვზე. მეცნიერები მიიჩნევენ, რომ ეს მეთოდი სრულად პირველად გამოიყენა ფერმამ, როცა იხილავდა ნატურალური რიცხვის ორი მთელი რიცხვის კვადრატების ჯამად წარმოდგენის საკითხს. ამ საკითხს უკავშირდება ფერმას თეორემა: მარტივი რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ ორი მთელი რიცხვის კვადრატების ჯამის სახით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს რიცხვი 4-ზე გაყოფისას ნაშთში 1-ს იძლევა.

ერთ-ერთ წერილში ფერმა ასე ხსნის დამტკიცების იდეას: ძირითადი იდეა არის უსასრულო დაშვების გამოყენება — იმ დაშვებით, რომ $4n+1$ სახის მარტივი რიცხვისთვის დებულება არასწორია. მივიღოთ, რომ იგი არასწორია უფრო ნაკლები რიცხვისთვისაც და ა.შ. ამ პროცესს მივყავართ აღნიშნული ტიპის „უკანასკნელ" რიცხვამდე — 5-მდე. მივიღებთ წინააღმდეგობას. ეილერმა მოიფიქრა დამტკიცება, რომელიც ეყრდნობა უსასრულო დაშვების მეთოდს. ამიტომ ნატურალური რიცხვის მთელი რიცხვების კვადრატების ჯამად წარმოდგენადობის შესახებ ზემოთ ჩამოყალიბებულ თეორემას ფერმა-ეილერის თეორემასაც უწოდებენ.

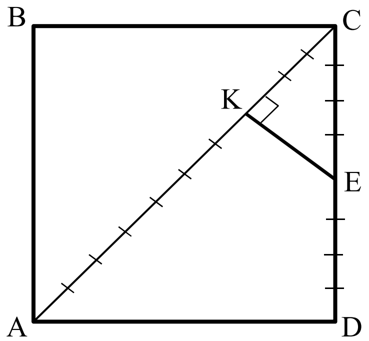
საშუალო სკოლაში ამჟამად მათემატიკის ახალ სტანდარტზე გადასვლა მიმდინარეობს. ეს არის განათლების რეფორმის მესამე ეტაპი. კიდევ უფრო მეტი ყურადღება ეთმობა მათემატიკის სწავლების იმ მიზნებს, რომლებიც აბსტრაქტული, ლოგიკური და კრიტიკული აზროვნების ხერხების დაუფლებასთან არის დაკავშირებული. აღნიშნული მიზნებიდან გამომდინარე, ჩამოყალიბებულია სტანდარტის შედეგები, რომლებმაც უნდა უპასუხოს კითხვას — რა უნდა შეძლოს მოსწავლემ მათემატიკის შესწავლის ბოლოს. შედეგები 3 მიმართულებად არის დაჯგუფებული. პირველი მი-

მართულება მსჯელობისა და დასაბუთების უნარების განვითარებას ეხება. კერძოდ, დამტკიცებისა და დასაბუთების ხერხების შერჩევისა და არჩეული სტრატეგიის ვარგისიანობის შესახებ მსჯელობის უნარებია გამოყოფილი. მსჯელობის ხაზის განვითარება, ალტერნატიული გზის მოძებნა, საჭიროების შემთხვევაში, მიღებული გადაწყვეტილების სისწორისა და ეფექტიანობის დასაბუთება — პირველი მიმართულების ძირითადი ასპექტებია. სხვა შედეგები მათემატიკური ენის დაუფლებასა და პრაქტიკულ გამოყენებებს ეხება. ამიტომ დიდ მნიშვნელობას იძენს დასაბუთების სხვადასხვა ხერხის გამოყენება.

ცნობილია, რომ დასაბუთების ხერხები, ძირითადად, ორ ნაწილად შეიძლება დავაჯგუფოთ — პირდაპირი ხერხები და არაპირდაპირი ხერხები. არაპირდაპირი ხერხით დასაბუთების ერთ-ერთი მეთოდი საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდია. უსასრულო დაშვების ფერმას მეთოდი საწინააღმდეგოს დაშვებით დამტკიცების ერთ-ერთი ხერხია, რომელიც იყენებს იმ ფაქტს, რომ არსებობს მხოლოდ სასრული რაოდენობა დადებითი მთელი რიცხვებისა, რომლებიც ნაკლებია მოცემულ მთელ დადებით რიცხვზე, ანუ არ არსებობს არაუარყოფით მთელ რიცხვთა უსასრულო კლებადი მიმდევრობა. ამასთანავე, მათემატიკის ერთიანობისა და მისი სხვადასხვა ნაწილის ინტეგრირებულად გადაცემის მნიშვნელობის გათვალისწინებით, ალგებრული დებულებების დამტკიცების პროცესში გეომეტრიული ინტერპრეტაციების ჩართვაც არის სასურველი.

განვიხილოთ $\sqrt{2}$-ის ირაციონალურობის გეომეტრიული დასაბუთება, როცა უსასრულო დაშვების ხერხს ვიყენებთ.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $\sqrt{2}$ რაციონალური რიცხვია. ეს წინადადება ეკვივალენტურია იმისა, რომ კვადრატის b გვერდი და a დიაგონალი თანაზომადი მონაკვეთებია. მაშასადამე, არსებობს d სიგრძის მონაკვეთი, რომელიც მთელ რიცხვჯერ თავსდება CD მონაკვეთშიც (ვთქვათ, m-ჯერ) და AC დიაგონალშიც (ვთქვათ, n-ჯერ); $a=dn,\ b=dm$; აქედან $a^2=d^2n^2,\ b^2=d^2m^2,\ \frac{a^2}{b^2}=\frac{n^2}{m^2},\ \frac{2b^2}{b^2}=\frac{n^2}{m^2},\ \sqrt{2}=\frac{n}{m}$. მივიღეთ, რომ $\sqrt{2}$ რაციონალური რიცხვია.



ამრიგად, დიაგონალისა და გვერდის თანაზომადობა ნიშნავს $\sqrt{2}$-ის რაციონალურობას.

მაშასადამე, AC დიაგონალისა და CD გვერდის თანაზომადობა ნიშნავს იმას, რომ d სიგრძის მონაკვეთი AC-ში n-ჯერ მოთავსდა, CD-ში — m-ჯერ. მოვნიშნოთ გადაზომვისას მიღებული წერტილები AC-ზე და CD-ზე. ახლა AC-ზე A წერტილიდან გადავდოთ CD მონაკვეთი, მივიღებთ: Ak=CD; ამასთანავე, K წერტილი დაყოფის წერტილში მოხვდება. ცხადია, $CK=a-b$, D წერტილიდან DC გვერდზე გადავზომოთ: $DE\in CK$; $CE=b-(a-b)=2b-a$.

განვიხილოთ ΔCKE

$$\frac{CK^2}{CE^2}=\frac{(a-b)^2}{(2b-a)^2}=\frac{a^2-2ab+b^2}{4b^2-4ab+a^2}=$$

$$=\frac{3b^2-2ab}{6b^2-4ab}=\frac{1}{2}.$$

მაშასადამე,

$$\frac{CK^2}{CE^2}=\frac{CD^2}{AC^2},$$

ე.ი.

$$\frac{CK}{CE}=\frac{CD}{AC}=\frac{AD}{AC}.$$

CKE და CDA სამკუთხედებს C კუთხე საერთო აქვს. სამკუთხედების მსგავსების I ნიშნის თანახმად,

$$\Delta CKE \sim \Delta CDA.$$

ამრიგად, CKE სამკუთხედი ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედია, CK=KE კათეტებია, CE ჰიპოტენუზაა.

რადგან K და E წერტილები დაყოფის წერტილებშია, ამიტომ ამ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტიც და ჰიპოტენუზაც თანაზომადი მონაკვეთებია. ამ პროცესს თუ კიდევ ერთხელ ჩავატარებთ, მივიღებთ ახალ, უფრო პატარა სამკუთხედს, რომლის კათეტი და ჰიპოტენუზა თანაზომადი მონაკვეთებია. ერთი

მხრივ, შესაძლებელია ამ პროცესის უსასრულოდ გაგრძელება, მეორე მხრივ, პროცესის უსასრულოდ გაგრძელება შეუძლებელია, რადგან კათეტზე და ჰიპოტენუზაზე სასრული რაოდებობის დაყოფის წერტილებია მონიშნული.

საუნივერსიტეტო კურსებში განიხილება $\sqrt{2}$-ის ირაციონალურობის დამტკიცების ალგებრული ხერხი. თუმცა ჩვენი გეომეტრიული დამტკიცება ალგებრულითაც შეიძლება შეიცვალოს.

ვთქვათ, არსებობს a და b ნატურალური რიცხვები, ისეთი, რომ

$$a^2=2b^2.$$

მაშინ ვაჩვენოთ, რომ არსებობს A და B ნატურალური რიცხვები, რომლისთვისაც

$$A^2=2b^2.$$

ამასთანავე, A<a. მივიღებთ უსასრულო პროცესს, რომელიც არ შეიძლება იყოს უსასრულო პროცესი (წინააღმდეგობას მივიღებთ).

მართლაც, განვიხილოთ რიცხვები:

$$A=2b-a>0 \text{ და } B=a-b>0.$$

ამასთანავე, ცხადია, $A<a$.

მაშინ გვექნება:

$$A^2=4b^2-4ab+a^2=6b^2-4ab,$$
$$B^2=a^2-2ab+b^2=3b^2-2ab.$$

ამრიგად, $A^2=2B^2$ და $A<a$.

შეიძლება არითმეტიკის ძირითადი თეორემის გამოყენებაც. თუ $a^2=2b^2$, მაშინ a^2-ის კანონიკურ დაშლაში მარტივი რიცხვი 2 შედის ლუწ ხარისხში, $2b^2$-ში — კენტ ხარისხში, მივიღეთ წინააღმდეგობა.

ახლა განვიხილოთ უსასრულო დაშვების ფერმას მეთოდის გამოყენების ორი მაგალითი.

მაგალითი 1. დავამტკიცოთ, რომ განტოლებას

$$8x^4+4y^4+2z^4=t^4$$

ნატურალურ რიცხვებში არა აქვს ამონახსნი.

დავუშვათ, აქვს ამონახსნი — $x=m$, $y=n$, $z=p$, $t=r$ (m, n, p და r ნატურალური რიცხვებია). ამასთანავე, $x=m$ უმცირესი შესაძლო მნიშვნელობაა.

განტოლებიდან ჩანს, რომ r ლუწი რიცხვია, ვთქვათ, $r=2r_1$. ჩავსვათ ეს ამონახსნი განტოლებაში და შევკვეცოთ 2-ზე, მივიღებთ:

$$4m^4+2n^4+p^4=8r_1^4.$$

ახლა ჩანს, რომ p ლუწია, $p=2p_1$. მაშასადამე,

$$2m^4+n^4+8p_1^4=4r_1^4.$$

აქ n ლუწია, $n=2n_1$.

მივიღებთ:

$$m^4+8n_1^4+4p_1^4=2r_1^4.$$

აქ კი m რიცხვია ლუწი, $m=2m_1$. მივიღეთ:

$$8m_1^4+4n_1^4+2p_1^4=r_1^4.$$

მაშასადამე, $x=m_1$, $y=n_1$, $z=p_1$, $t=r_1$ განტოლების ამონახსნია. მაგრამ $m_1<m$. მივიღე წინააღმდეგობა, რადგან არჩეული იყო ამონახსნი უმცირესი პირველი ელემენტით.

მაგალითი 2. დავამტკიცოთ, რომ განტოლებას

$$x^2+y^2+z^2+u^2=2xyzu$$

ნატურალურ რიცხვებში არ აქვს ამონახსნი.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ (x, y, z, u) ამონახსნია.

რადგან $x^2+y^2+z^2+u^2$ ლუწი რიცხვია, ამიტომ x, y, z, u რიცხვებში კენტების რაოდენობა ლუწია — ვთქვათ, მათ შორის 2 კენტია, ან 4 რიცხვია კენტია. თუ ორი რიცხვია კენტი, მაშინ $x^2+y^2+z^2+u^2$ არ იყოფა 4-ზე, $2xyzu$ — იყოფა 4-ზე. თუ ყველა რიცხვი კენტია, მაშინ $x^2+y^2+z^2+u^2$ იყოფა 4-ზე, $2xyz$ არ იყოფა 4-ზე. მაშასადამე, ოთხივე რიცხვი ლუწია: $x=2x_1$, $y=2y_1$, $z=2z_1$, $u=2u_1$.

მივიღებთ:

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+u_1^2=8x_1y_1z_1u_1.$$

აქედან ჩანს, რომ $x_1y_1z_1$ და u_1 რიცხვებიდან ყველა რიცხვი არ შეიძლება იყოს კენტი (რადგან მაშინ ტოლობის მარცხენა მხარე არ გაიყოფა 8-ზე). ანალოგიურად, არ შეიძლება იყოს კენტი ზუსტად ორი რიცხვი, რადგან მაშინ მარცხენა მხარე არ გაიყოფა 8-ზე. მაშასადამე, ყველა რიცხვი ლუწია:

$$x_1=2x_2,\ y_1=2y_2,\ z_1=2z_2,\ u_1=2u_2.$$

მივიღეთ:

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2+u_2^2=32x_2y_2z_2u_2.$$

გავიმეორებთ ზემოთ მოყვანილ მსჯელობის და მივიღებთ: x_2, y_2, z_2, u_2 რიცხვები ლუწი რიცხვებია და ა.შ.

ამრიგად, ყოველი ნატურალური s-ისთვის გვაქვს:

$$x_s^2+y_s^2+z_s^2+u_s^2=2^{2s+1}x_sy_sz_su_s,$$

ამასთანავე:

$$x_k=2x_{k+1},\ y_k=2y_{k+1},\ z_k=2z_{k+1},\ u_k=2u_{k+1};\ \ k\geq 1.$$

მაშასადამე, ნებისმიერი ნატურალური s-სთვის, $\frac{x}{2^s}, \frac{y}{2^s}, \frac{z}{2^s}, \frac{u}{2^s}$ — მთელი რიცხვებია. ეს შეუძლებელია, მივიღეთ წინააღმდეგობა.

ლიტერატურა:

Weil, Andre (1984). Number Theory; An approach through history from Hammurabi to Legendre, pp. 75-79, ISBN 0-8178-3141-0.

ნორჩი ქართველი მათემატიკოსები საერთაშორისო ოლიმპიადებში

გიორგი ჭელიძე

ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების ლიდერი,
ასისტენტ-პროფესორი,
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

გივი ნადიბაიძე

ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების თანალიდერი,
ასისტენტ-პროფესორი,
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მე-60 საერთაშორისო ოლიმპიადა მათემატიკაში ჩატარდა დიდი ბრიტანეთის გაერთიანებული სამეფოს ქალაქ ბათში, 2019 წლის 10-22 ივლისის პერიოდში (IMO 2019). ასპარეზობაში მონაწილე გუნდები ტრადიციულად 6-6 მოსწავლისაგან შედგებოდა. საქართველოს ნაკრებს წარმოადგენდნენ: ნიკოლოზ ბირკაძე (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი), თეიმურაზ თოლორაია (კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი), ლუკა მუშკუდიანი (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი), დიმიტრი კორკოტაშვილი (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი), ლუკა მაჭარაშვილი (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი) და გიორგი ადიკაშვილი (ვეკუას სახ. №42 საჯარო სკოლა, მე-12 კლასი).

საქართველოს მოსწავლეთა ნაკრები გუნდი მათემატიკის საერთაშორისო ოლიმპიადებში მონაწილეობს 1993 წლიდან. 2019 წლის ოლიმპიადაზე საქართველო ოცდამეშვიდედ მონაწილეობდა და ქართველმა მოსწავლეებმა ამჯერადაც იყოჩაღეს. გუნდის ექვსივე წევრმა დაიმსახურა ჯილდო: 1 ვერცხლი (ნიკოლოზ ბირკაძე, თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი), 4 ბრინჯაო (თეიმურაზ თოლორაია, კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი; ლუკა მუშკუდიანი, თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი; დიმიტრი კორკოტაშვილი, თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი; ლუკა მაჭარაშვილი, თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი) და 1 სიგელი (გიორგი ადიკაშვილი, ვეკუას სახ. №42 საჯარო სკოლა, მე-12 კლასი).

ქვემოთ დიაგრამაზე ნაჩვენებია 2019 წლის მონაწილეთა შედეგები:

Contestant [♀♂]	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Total	Rank		Award
								Abs.	Rel.	
Team results	**42**	**10**	**0**	**36**	**20**	**0**	**108**	**45**	**60.36%**	**S, B, B, B, B, HM**
Nikoloz Birkadze	7	6	0	7	7	0	27	101	83.87%	Silver medal
Teimuraz Toloraia	7	1	0	7	7	0	22	168	73.06%	Bronze medal
Luka Mushkudiani	7	1	0	7	2	0	17	275	55.81%	Bronze medal
Dimitri Korkotashvili	7	1	0	7	2	0	17	275	55.81%	Bronze medal
Luka Macharashvili	7	1	0	7	2	0	17	275	55.81%	Bronze medal
Giorgi Adikashvili	7	0	0	1	0	0	8	444	28.55%	Honourable mention

Leader: **George Chelidze**
Deputy leader: **Givi Nadibaidze**

განსაკუთრებით უნდა აღინიშნოს ნიკოლოზ ბირკაძის წარმატება, რომელიც იყო გუნდის ლიდერი და მეორედ დაიმსახურა ვერცხლის მედალი (2018 წელს რუმინეთში ჩატარებულ ოლიმპიადაზეც ვერცხლის მედლით დაჯილდოვდა).

საქართველოს ოლიმპიური ნაკრების ფორმირება მოხდა ორი შესარჩევი ტურის შედეგის საფუძველზე. შესარჩევ წერებს ადმინისტრირებას უწევდა საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტრო. მკაცრად რეგლამენტირებულ 2-ტურიან წერით გამოცდებში მონაწილეობის უფლება კი მოიპოვა რესპუბლიკური სასკოლო მათემატიკური ოლიმპიადის დასკვნითი ტურის შედეგებზე დაყრდნობით გამოვლენილმა 22-მა საუკეთესო მოსწავლემ. მათ შორის იყო თოთხმეტი მეთერთმეტე-მეთორმეტეკლასელი და რვა მეათეკლასელი. შესარჩევი წერების საფუძველზე დაკომპლექტდა 6-მოსწავლიანი ნაკრები.

განათლების და მეცნიერების სამინისტროდან ამ პროცესს ადმინისტრირებას უწევდა ქალბატონი ნინო ცანდიშვილი. ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების დაკომპლექტების შემდეგ ერთთვიანი საწვრთნელი შეკრება ჩატარდა კომაროვის სკოლაში ყოველდღიური 6-საათიანი მეცადინეობებით. ბოლო ეტაპზე კი საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტრომ უზრუნველყო ნაკრების წევრების ერთკვირიანი წვრთნები ბაკურიანში, სადაც მოსწავლეებს უტარდებოდათ სატრენინგო წერები საერთაშორისო ოლიმპიადების პირობების გათვალისწინებით.

გუნდის ლიდერის, თანალიდერის და ასისტენტის გარდა, მოსწავლეთა მომზადებაში ასევე მონაწილეობდნენ გამოცდილი ყოფილი ოლიმპიელები: საბა ლეფსვერიძე და ვანო გოქაძე.

ქვემოთ მოვიყვანთ იმ ამოცანებს, რომლებიც მიეცათ მოსწავლეებს წერებზე:

ამოცანა 1. ვთქვათ, $\mathbb{Z}$ არის ყველა მთელ რიცხვთა სიმრავლე. იპოვეთ ყველა ფუნქცია $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ისეთი, რომ ყოველი მთელი a და b რიცხვებისთვის:

$$f(2a)+2f(b)=f\big(f(a+b)\big). \tag{1}$$

ამოხსნა: ჩავსვათ (1)-ში $a=0, b=n+1$, მივიღებთ: $f\big(f(n+1)\big)=f(0)+2f(n+1)$. ახლა ჩავსვათ ისევ (1)-ში $a=1, b=n$, გვექნება: $f\big(f(n+1)\big)=f(2)+2f(n)$. ამრიგად ვღებულობთ, რომ: $f(0)+2f(n+1)=f(2)+2f(n)$ და ე.ი. $f(n+1)-f(n)=\frac{1}{2}\big(f(2)-f(0)\big)$. ბოლო ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $f(n+1)-f(n)$ არის მუდმივი სიდიდე, აღვნიშნოთ ის M-ით. ვთქვათ $f(0)=K$. რადგანაც f განსაზღვრულია $\mathbb{Z}$-ზე, ვღებულობთ: $f(n)=Mn+K$. ამის შემდეგ (1) ტოლობა გადაიწერება შემდეგნაირად:

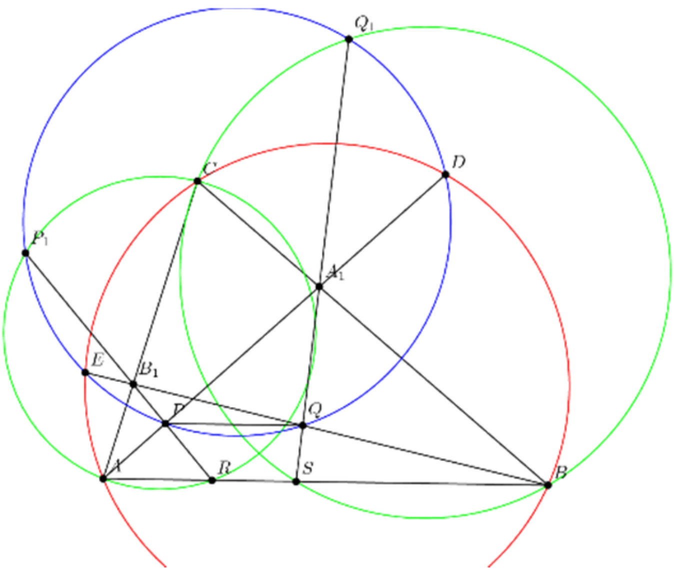
$$2Ma+K+2(Mb+K)=M(M(a+b)+K)+K.$$

ბოლო ტოლობიდან ცხადია, რომ: $(M-2)(M(a+b)+K)=0$.

ამრიგად, ან $M=2$ და ამ შემთხვევაში ვღებულობთ: $f(n)=2n+K$, ან $M(a+b)+K=0$ ყოველი $a+b$-თვის და ამ შემთხვევაში ვღებულობთ: $f(n)=0$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ორივე ფუნქცია მართლაც არის (1) ამონახსნი.

პასუხი: $f(n)=0$; $f(n)=2n+K$, სადაც K ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

ამოცანა 2. სამკუთხედ ABC-ში A_1 წერტილი ძევს BC გვერდზე, ხოლო B_1წერტილი ძევს AC გვერდზე. ვთქვათ P და Q არიან, შესაბამისად, AA_1 და BB_1 სეგმენტის ისეთი წერტილები, რომ PQ პარალელურია AB-სი. ვთქვათ P_1 არის PB_1 წრფის ისეთი წერტილი, რომ B_1 მოთავსებულია მკაცრად P და P_1-ს შორის და, ამასთან, $\angle PP_1C=\angle BAC$. ანალოგიურად, ვთქვათ Q_1 არის QA_1 წრფის ისეთი წერტილი, რომ A_1 ძევს მკაცრად Q და Q_1 წერტილებს შორის და $\angle CQ_1Q=\angle CBA$.



დაამტკიცეთ, რომ P, Q, P_1 და Q_1 წერტილები მდებარეობენ ერთ წრეწირზე.

ამოხსნა: ვთქვათ, AA_1 და BB_1 წრფეები კვეთენ ΔABC-ზე შემოხაზულ წრეწირს შესაბამისად, D და E წერტილებში. გვექნება: $\angle QPD=\angle BAD=\angle BED=\angle QED$ და ამიტომ P,Q,D,E იმყოფებიან ერთ წრეწირზე. აღვნიშნოთ ეს წრეწირი ω-თი. დავამტკიცოთ, რომ P_1 და Q_1 წერტილებიც ω-ზე მდებარეობენ. ამით, ცხადია, ამოცანის ამოხსნა დასრულდება.

ვინაიდან $\angle CDA_1 = \angle CDA = \angle CBA = \angle CQ_1Q = \angle CQ_1A_1$, ამიტომ C, Q_1, D, A_1 ციკლურია. ასე რომ, ვღებულობთ:

$$\angle QQ_1\mathrm{D} = \angle A_1Q_1\mathrm{D} = \angle A_1CD = \angle BCD = \angle BAD = \angle QPD,$$

რაც ნიშნავს, რომ Q_1 დევს ω წრეწირზე. ანალოგიურად მტკიცდება, რომ P_1-იც დევს ω-ზე. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

ამოცანა 3. სოციალურ ქსელში გაერთიანებულია 2019 მომხმარებელი, რომელთაგან ზოგიერთი ერთმანეთის მეგობარია. მეგობრობა ორმხრივია, ანუ, თუ მომხმარებელი A არის მომხმარებელი B-ს მეგობარი, მაშინ B-ც არის A-ს მეგობარი. ყოველ ჯერზე ხორციელდება ერთი შემდეგი სახის *ცვლილება:*

სამი — A , B და C მომხმარებელი, რომელთაგან A მეგობარია B-სი და C-სი, ხოლო B და C ერთმანეთის მეგობრები არ არიან, ერთმანეთში ერთდროულად იცვლიან თავიანთი მეგობრობის სტატუსს, კერძოდ, B და C ხდებიან მეგობრები, ხოლო A და Bდა ასევე A და C მეგობრობას წყვეტენ. ყველა სხვა დანარჩენი მეგობრობის სტატუსი რჩება უცვლელი.

თავდაპირველად, 1010 მომხმარებლიდან ყოველს ჰყავს 1009 მეგობარი და 1009 მომხმარებლიდან ყოველს ჰყავს 1010 მეგობარი.

დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ცვლილებათა ისეთი მიმდევრობა, რომლის შემდეგაც ყოველ მომხმარებელს ეყოლება არაუმეტეს ერთი მეგობარი.

ამოხსნა: განვიხილოთ გრაფი G, რომლის წვეროებია მომხმარებლები. შევაერთოთ წიბოთი მხოლოდ ის ორი წვერო, ანუ ორი წვერო იყოს ერთმანეთის მოსაზღვრე, თუ შესაბამისი მომხმარებლები ერთმანეთის მეგობრები არიან. შევნიშნოთ, რომ თავდაპირველად გვაქვს ბმული გრაფი (ყოველი წვეროდან ნებისმიერ წვერომდე მისვლა შეგვიძლია წიბოების გასწვრივ მოძრაობით). მართლაც, თუ განვიხილავთ ნებისმიერ ორ წერტილს, მაშინ მათი ხარისხების (წვეროდან გამოსულ წიბოთა რაოდენობის) ჯამი არანაკლებ 2018-ია, რაც ნიშნავს იმას, რომ ეს ორი წერტილი ან უშუალოდაა ერთმანეთთან შეერთებული წიბოთი, ან არსებობს ისეთი წერტილი, რომელიც ორივეს მოსაზღვრეა.

გრაფს დავარქვათ *კარგი,* თუ მას აქვს შემდეგი თვისება:

მისი ყოველი ბმული კომპონენტი, რომელიც არანაკლებ სამი წვეროსგან შედგება, არ არის სრული, და ამასთან, გრაფის ასეთ ბმულ კომპონენტს გააჩნია ერთი მაინც წვერო, რომელსაც კენტი ხარისხი აქვს.

ვაჩვენოთ, რომ, თუ კარგ გრაფში გვაქვს წვერო, რომლის ხარისხი არანაკლებ 2-ია, მაშინ არსებობს ცვლილება, რომლის შემდეგ გრაფი კვლავ კარგ გრაფად დარჩება. ვინაიდან თავდაპირველი G გრაფი კარგია და ყოველი ცვლილება ამცირებს გრაფში წიბოების საერთო რაოდენობას, ამიტომ ზემოთ აღნიშნული ცვლილებების სასრული რაოდენობის შემდეგ მივიღებთ გრაფს, რომლის ყოველი წვეროს ხარისხი იქნება არაუმეტეს 1 და, ამრიგად, ამოცანის ამოხსნა დასრულდება.

განვიხილოთ წვერო A, რომლის ხარისხია არანაკლებ 2 და რომელიც იმყოფება G' ბმულ კომპონენტში. ვინაიდან კარგი გრაფის ყოველი ბმული კომპონენტი, რომელიც სამ წვეროს მაინც შეიცავს, სრული არაა, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ A-ს რომელიღაც ორი მეზობელი ერთმანეთთან შეერთებული არაა (განვიხილოთ G'-ის მაქსიმალური სრული ქვეგრაფი K. მაშინ K-ს რომელიღაც A-წვეროს ჰყავს მეზობელი K-ს გარეთ და ეს მეზობელი K-ს მაქსიმალურობის გამო K-ს რომელიღაცა წვეროსთან შეერთებული არაა). $G_1, \dots, G_k$-თი აღვნიშნოთ G'-ის ბმული კომპონენტები, რომლებიც წარმოიქმნება, თუ A წვეროს დროებით წავშლით გრაფიდან. ცხადია, თითოეულ ამ ბმულ კომპონენტთან A წვერო შეერთებულია არანაკლებ ერთი წიბოთი. შესაძლებელია შემდეგი შემთხვევები:

1. $k \geq 2$ და A შეერთებულია რომელიღაც G_i-თან არანაკლებ ორი წიბოთი.

ამ შემთხვევაში განვიხილოთ G_i-ის B წვერო, რომელიც შეერთებულია A-თან და განვიხილოთ ასევე $G_j(j \neq i)$ კომპონენტის A-ს მეზობელი C წვერო. ცხადია, B და C მეზობლები არ არიან. ამიტომ თუ ცვლილებას განვახორციელებთ A, B და C წვეროებზე, ე.ი. წავშლით AB და AC წიბოებს და დავუმატებთ BC წიბოს, G' ისევ ბმული დარჩება. ასევე შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი ცვლილების შემდეგ ყოველი წვეროს ხარისხის ლუწ-კენტობა იგივე რჩება. ჩამოთვლილი ფაქტებიდან ვასკვნით, რომ ასეთი ცვლილების შემდეგ გრაფი ისევ კარგ გრაფად გარდაიქმნება.

2. $k \geq 2$ და A შეერთებულია ყოველG_i-თან ზუსტად ერთი წიბოთი.

განვიხილოთ ინდუცირებული ქვეგრაფი, რომელიც ნებისმიერი G_iკომპონენტით და A-წვეროთია შედგენილი. ცხადია ამ ქვეგრაფში A-ს ხარისხი არის 1 და ვინაიდან ნებისმიერ გრაფში კენტი ხარისხის წვეროების რაოდენობა ლუწი უნდა იყოს, ამიტომ G_i-ში მოიძებნება კენტი ხარისხის მქონე წვერო. ახლა განვიხილოთ A-ს ნებისმიერი ორი განსხვავებული მეზობელი $B \epsilon G_i$ და $C \epsilon G_j$ და ჩავატაროთ ცვლილება A, B და C წვეროებზე. ამ ცვლილების შემდეგ შეიქმნება ორი ახალი ბმული კომპონენტი და თითოეული მათგანი (თუ სამი მაინც წვეროსგან შედგებიან) არ იქნება სრული და თითოეულში იარსებებს წვერო კენტი ხარისხით (რადგან თითოეულ G_i კომპონენტში გვქონდა ასეთი წვერო და, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ცვლილება წვეროს ლუწ-კენტობას არ ცვლის).

3. $k = 1$ და A შეერთებულია G_1-თან სამი წიბოთი მაინც.

დაშვების თანახმად A-ს ჰყავს ორი მეზობელი — B და C, რომლებიც ერთმანეთის მეზობლები არ არიან. თუ ჩავატარებთ ცვლილებას A, B და C წვეროებზე, ცხადია G' ისევ ბმულ გრაფად დარჩება და შემთხვევა 1-ის ანალოგიურად დავასკვნით, რომ გრაფი ისევ კარგი დარჩება.

4. $k = 1$ და A შეერთებულია G_1-თან ზუსტად ორი წიბოთი.

ვთქვათ, B და C არიან A-ს მეზობლები. ჩვენი დაშვების გამო ისინი ერთმანეთის მეზობლები არ არიან. თუ ჩავატარებთ ცვლილებას A, B და C წვეროებზე, მივიღებთ ორ ბმულ კომპონენტს, რომლიდანაც ერთი მხოლოდ A წვეროსგან შედგება. მეორე ბმულ კომპონენტში ცხადია გვაქვს წვერო კენტი ხარისხით. ამრიგად, თუ ის სამ- ან მეტწვეროიანი სრული გრაფი არ გამოვიდა, ამოცანის ამოხსნა დამთავრებულია. თუ მეორე ბმული კომპონენტი სრული გრაფია, ეს ნიშნავს რომ G_1 ყოფილა სრულ გრაფს მინუს BC წიბო. ამასთან, შევნიშნოთ, რომ G_1-ში ოთხი წვერო მაინც უნდა იყოს. წინააღმდეგ შემთხვევაში G' გამოვიდოდა ციკლი და ე.ი. მასში არ იარსებებდა წვერო კენტი ხარისხით. ახლა განვიხილოთ G_1-ის მესამე წვერო D და ჩავატაროთ ცვლილება B, D და A წვეროებზე. ცხადია, ეს ცვლილება არ წყვეტს G' გრაფს და, როგორც შემთხვევა 1-ში, ანალოგიურად ვღებულობთ, რომ ამ ცვლილების შემდეგ გრაფი კარგ გრაფად დარჩება. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

ამოცანა 4. იპოვეთ მთელ დადებით რიცხვთა ყველა (k, n) წყვილი, ისეთი, რომ:

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1})$$

ამოხსნა: როცა $n = 1, 2, 3$ და 4-ს, უშალოდ შემოწმებით ვპოულობთ ორ ამონახსნს: (1,1) და (3,2). ახლა ვაჩვენოთ, რომ, როცა $n \geq 5$, მაშინ ამონახსნი არ გვაქვს.

მარტივი p რიცხვისთვის და მთელი დადებითი N რიცხვისთვის $\nu_p(N)$-ით აღვნიშნოთ p-ს უმაღლესი ხარისხი, რომელიც ყოფს N-ს. თუ a და b ერთმანეთისაგან განსხვავებული p-თან თანამარტივი ისეთი მთელი რიცხვებია, რომ $p | (a - b)$, მაშინ ჰენსელის ლემის თანახმად გვაქვს ტოლობა: $\nu_p(a^k - b^k) = \nu_p(a - b) + \nu_p(k)$.

შევნიშნოთ, რომ 3 ყოფს 2^k-1 მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა k ლუწია. ამრიგად გვაქვს: $\nu_3(2^{2k}-1)=\nu_3(4^k-1)=1+\nu_3(k)=\nu_3(3k)$. დავთვალოთ ახლა 3-ის უმაღლესი ხარისხი $L_n=(2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\cdots(2^n-2^{n-1})$ გამოსახულებისთვის.

$$\nu_3(L_n)=\sum_{2k\le n}\nu_3(4^k-1)=\sum_{k\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\nu_3(3k)$$

შევნიშნოთ, რომ ბოლო ტოლობა გვიჩვენებს 3-ის ხარისხს $3\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)!$ რიცხვში. ამიტომ $\nu_3(k!)=\nu_3(L_n)=\nu_3(3\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)!)$ საიდანაც ვასკვნით, რომ:

$$3\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\le k\le 3\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2. \tag{1}$$

დავუშვათ ახლა, რომ $n\ge 5$. რადგანაც L_n-ის ყოველი მეხუთე მამრავლი იყოფა $2^5-1=31$, ამიტომ $\nu_{31}(L_n)\ge\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor$. გვაქვს:

$$\frac{n}{10}\le\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor\le\nu_{31}(L_n)\le\nu_{31}(k!)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{k}{31^k}\right\rfloor<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{31^k}=\frac{k}{30}. \tag{2}$$

და (2) გვაძლევს შეფასებას $3n<k\le\frac{3n}{2}+2$ და ე.ი. $n<\frac{4}{3}$. ეს კი ეწინააღმდეგება პირობას $n\ge 5$. ამრიგად, თუ $n\ge 5$, მაშინ არ არსებობს მთელი დადებითი რიცხვი k, რომ ამოცანაში მოცემული ტოლობა შესრულდეს.

პასუხი: $(1,1); (3,2)$

ამოცანა 5. ბათის ბანკი უშვებს მონეტებს, რომელსაც ერთ მხარეს აწერია ასო H, ხოლო მეორე მხარეს აწერია ასო T. გუგამ ერთ რიგში დაალაგა, მარცხნიდან მარჯვნივ, n ცალი ასეთი მონეტა. ის ყოველ ჯერზე ასრულებს შემდეგ ოპერაციას: თუ რიგში დევს ზუსტად k ცალი მონეტა ზედა მხარით H, მაშინ გუგა ატრიალებს მარცხნიდან k-ურ ადგილზე მყოფ მონეტას. წინააღმდეგ შემთხვევაში ყველა მონეტა დევს ზედა მხარით T და გუგა არ ატარებს ოპერაციას. მაგალითად, თუ $n=3$ და თავიდან დევს მონეტები შემდეგი კონფიგურაციით: THT, მაშინ გუგას მიერ შესრულებულ ოპერაციათა თანმიმდევრობა გამოიყურება ასე: $THT\to HHT\to HTT\to TTT$, ანუ პროცესი მთავრდება სამი ოპერაციის შემდეგ.

ა) დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი საწყისი კონფიგურაციის შემთხვევაში გუგას მოუწევს სასრული რაოდენობა ოპერაციების შესრულება.

ბ) ყოველი საწყისი C კონფიგურაციისთვის, $L(C)$-თი აღვნიშნოთ ოპერაციათა რაოდენობა, რომლის შემდეგაც პროცესი ჩერდება. მაგალითად, $L(THT)=3$ და $L(TTT)=0$.

იპოვეთ $L(C)$ სიდიდის საშუალო არითმეტიკული, როცა C გარბის ყველა შესაძლო 2^n საწყის კონფიგურაციას.

ამოხსნა: საწყისი C კონფიგურაციისთვის აღვნიშნოთ $h=h(C)$-თი იმ მონეტების რაოდენობა, რომლებიც დევს ზედა მხარით H, ხოლო $s=s(C)$ იყოს ჯამი იმ ნომრებისა (ადგილები გადანომრილია მარცხნიდან მარჯვნივ), რომლებზეც იმყოფებიან ეს „H“მონეტები. დავარქვათ ასეთ დალაგებას (h,s) ტიპის კონფიგურაცია. დავამტკიცოთ, რომ $L(C)=2s-h^2$, ამით ცხადია ამოცანის ა) პუნქტი ნაჩვენები იქნება. ჯერ შევნიშნოთ, რომ $2s-h^2$ სიდიდე არაუარყოფითია და ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $h=0$.მართლაც, თუ კონფიგურაციაში h ცალი „H“-ია, მაშინ ცხადია s სიდიდის მინიმალური მნიშვნელობა იქნება $1+2+\cdots+h=\frac{h(h+1)}{2}$, ე.ი. $2s-h^2\ge h\ge 0$.

დებულება დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით $r=2s-h^2$ სიდიდის მიმართ. როცა $r=0$, გვექნება $0=2s-h^2\ge h\ge 0$, ე.ი. ვღებულობთ, რომ $h=0$ და წინადადება

ჭეშმარიტია. ვთქვათ, ახლა (h,s) ტიპის კონფიგურაციის შემდეგ გუგა ღებულობს (h',s') კონფიგურაციას. შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

- თუ h ადგილას ძევს „H“ მონეტა, მაშინ ის ამოტრიალდება და შესაბამისად გვექნება: $h' = h-1$ და $s' = s-h$.
- თუ h ადგილას ძევს „T“ მონეტა, მაშინ ის ამოტრიალდება და, შესაბამისად, გვექნება: $h' = h+1$ და $s' = s+h$.

პირველ შემთხვევაში გვექნება: $r' = 2s' - h'^2 = 2s - 2h - h^2 + 2h - 1 = r - 1$. ადვილი საჩვენებელია, რომ მეორე შემთხვევაშიც $r' = r - 1$. ინდუქციის დაშვების ძალით, $r-1$ ბიჯის შემდეგ გუგა მიიღებს მხოლოდ „T“ მონეტებით შემდგარ მწკრივს, რაც წინა ბიჯის გათვალისწინებით ნიშნავს იმას, რომ (h,s) ტიპის კონფიგურაციიდან მხოლოდ „T“ -ებით შედგენილი მწკრივი მიიღება$r = 2s - h^2$ ბიჯის შემდეგ. ამრიგად დავამტკიცეთ, რომ მართლაც $L(C) = 2s(C) - [h(C)]^2$.

ახლა დავითვალოთ $s(C)$ და $[h(C)]^2$ სიდიდეების საშუალო არითმეტიკულები, როცა C გარბის ყველა შესაძლო2^n კონფიგურაციას, აღვნიშნოთ ეს სიმრავლე K-თი. ვთქვათ, $I_C(i) = i$, თუ i-ურ ადგილას ძევს მონეტა „H“ და $I_C(i) = 0$, თუ i-ურ ადგილას ძევს მონეტა „T“. მაშინ ცხადია, რომ: $s(C) = \sum_{i=1}^{n} I_C(i)$. ამიტომ $s(C)$ საშუალო ტოლი იქნება:

$$\frac{1}{2^n}\sum_{C\in K} s(C) = \frac{1}{2^n}\sum_{C\in K}\sum_{i=1}^{n} I_C(i) = \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{C\in K} I_C(i) = \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n} 2^{n-1} i = \frac{n(n+1)}{4}.$$

(ალბათობის ტერმინებში: ცხადია $I_C(i)$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოლოდინი არის $EI_C(i) = \frac{i}{2}$ და ადიციურობის გამო ვღებულობთ $Es(C) = \frac{n(n+1)}{4}$).

$[h(C)]^2$-ის საშუალოს დასათვლელად, ჯერ შევნიშნოთ, რომ ფიქსირებული h-თვის, იმ C-ების რაოდენობა, სადაც $h(C) = h$, იქნება $\binom{n}{h} = \frac{n!}{(n-h)!\cdot h!}$, ამიტომ გვექნება:

$$\frac{1}{2^n}\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}h^2 = \frac{1}{2^n}\sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h}h + \frac{1}{2^n}\sum_{h=2}^{n}\binom{n}{h}h\,(h-1) = \frac{1}{2^n}\sum_{h=1}^{n}\binom{n-1}{h-1}n + \frac{1}{2^n}\sum_{h=2}^{n}\binom{n-2}{h-2}n\,(n-1) =$$

$$= \frac{1}{2^n}\cdot 2^{n-1}\cdot n + \frac{1}{2^n}2^{n-2}\cdot n(n-1) = \frac{n(n+1)}{4}.$$

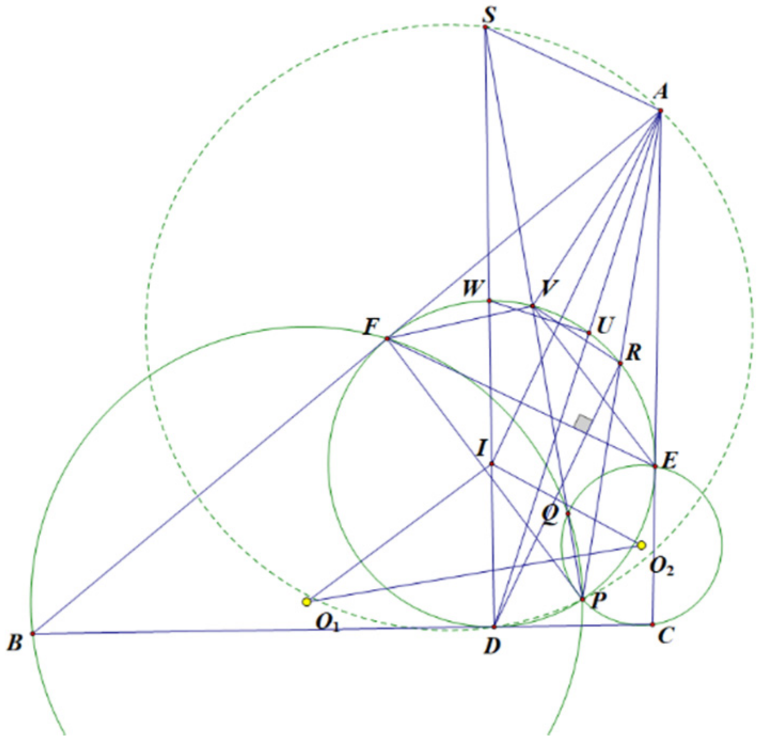
ე.ი. $s(C)$ და $[h(C)]^2$ სიდიდეების საშუალო არითმეტიკულები ერთმანეთის ტოლია და უდრის $\frac{n(n+1)}{4}$. ამიტომ $2s(C) - [h(C)]^2$ სიდიდის საშუალოც იქნება: $\frac{n(n+1)}{4}$.

პასუხი: $\frac{n(n+1)}{4}$.

ამოცანა 6. ABC მახვილკუთხა სამკუთხედში, რომელშიც $AB \neq AC$, ჩახაზულია წრეწირი ω ცენტრით I. ვთქვათ ω წრეწირი ეხება BC, CA და AB გვერდებს, შესაბამისად, D, Eდა F წერტილებში. D წერტილზე გამავალი EF-ის მართობული წრფე ω-ს მეორედ კვეთს R წერტილში. AR წრფე ω-ს მეორედ კვეთს P წერტილში. PCE და PBF სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირები მეორედ იკვეთებიან Q წერტილში.

დაამტკიცეთ, რომ DI დაPQ წრფეების გადაკვეთის წერტილი ძევს A წერტილზე გამავალ AI-ის მართობულ წრფეზე.

ამოხსნა: ვთქვათ, ΔBFP-ზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრია O_1, ხოლო ΔCEP-ზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრია O_2. DI და PQ-ს გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ S-ით. AD, PQ და DI-ის ω წრეწირთან გადაკვეთის წერტილები იყოს, შესაბამისად, U, V და W. გვაქვს: $\angle FIP = 2\angle FEP =$ $= 2\angle BFP = \angle BO_1P$.



ამრიგად, $\Delta BO_1P \sim \Delta FIP, \Delta BFP \sim \Delta O_1IP$ და ასევე $\Delta CEP \sim \Delta O_2IP$. მაშასადამე გვაქვს:

$$\frac{IO_1}{IO_2} = \frac{BF \cdot PI \cdot PE}{PF \cdot CE \cdot PI} = \frac{BF \cdot PE}{PF \cdot CE} = \frac{BF \cdot RE}{RF \cdot CE} = \frac{BF}{CE} \cdot \frac{\cos\angle DEF}{\cos\angle DFE} = \frac{BF}{CE} \cdot \frac{\cos\angle BFD}{\cos\angle CED} = \frac{DF}{DE} = \frac{UF}{UE}.$$

ასევე $\angle FUE = 180^0 - \angle FDE = \angle O_1IO_2$, ამიტომ: $\Delta IO_1O_2 \sim \Delta UFE, \angle UFE = \angle IO_1O_2 = \angle FPV = \angle FEV$ და UV პარალელურია EF.

$\angle \mathrm{W}DF = \angle RDE$ ნიშნავს, რომ WR ასევე პარალელურია EF-ის.
ამრიგად: $WU = VR, \angle SDA = \angle WDU = \angle VPR = \angle SPA$, ე.ი. A, S, D, P ციკლურია. გვაქვს:
$\angle SAI = 180^0 - \angle SDP - \angle \mathrm{I}AP = \angle \mathrm{WR}P - \angle \mathrm{DR}P = \angle \mathrm{WR}D = 90^0$. რ.დ.გ..

ავტორების ელექტრონული მისამართები: *giorgi.chelidze@tsu.ge*
givi.nadibaidze@tsu.ge

წინა ნომრის ამოცანების ამოხსნები

ამოცანა 1

ვთქვათ, F მთელ რიცხვთა რაიმე სასრული სიმრავლეა შემდეგი თვისებებით: ა) ყოველი $x \in F$ რიცხვისათვის არსებობს $y, z \in F$ რიცხვები, ისეთი, რომ $x = y + z$; ბ) არსებობს ნატურალური რიცხვი n, ისეთი, რომ ყოველი ნატურალური $1 \le k \le n$ რიცხვისათვის და ნებისმიერად არჩეული $x_1, \ldots, x_k \in F$ რიცხვებისათვის ჯამი $x_1 + \ldots + x_k$ ნულის ტოლი არ ხდება. აჩვენეთ, რომ F სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობა არაა ნაკლები $2n+2$-ზე.

ამოხსნა: პირობის ძალით, $0 \notin F$. ვთქვათ, $F_+ = F \cap Z_+, F_- = F \cap Z_-$, სადაც $Z_+ = \{1, 2, \ldots\}$ და $Z_- = \{-1, -2, \ldots\}$. გვაქვს $F = F_+ \cup Z_-$. განვიხილოთ არაორიენტირებული გრაფი Γ, რომლის წვეროებია Z_+ სიმრავლის ელემენტები, ხოლო წიბოები განსაზღვრულია შემდეგნაირად: x შეერთებულია y-თან, თუ არსებობს $z \in F$ ისეთი, რომ $x = y + z$. პირობის ძალით, გრაფის თითოეული წვერო წიბოთი შეერთებულია ერთი მაინც განსხვავებულ წვეროსთან. მაშასადამე, Γ გრაფი შეიცავს რაიმე $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ ციკლს. ვთქვათ, k მინიმალური ასეთი რიცხვია, მაშინ არსებობს $z_i \in F$ ისეთი, რომ:

$$x_1 = x_2 + z_1 = x_3 + z_2 + z_1 = \ldots = x_1 + z_k + \ldots + z_1,$$

საიდანაც გვექნება: $z_k + \ldots + z_1 = 0$. მეორე პირობის ძალით, $k \ge n+1$ და ამიტომ $card(F_+) \ge k \ge n+1$. ანალოგიური მსჯელობით ვაჩვენებთ, რომ $card(F_+) \ge k \ge n+1$. საბოლოოდ გვექნება: $card(F) \ge 2n+2$.

ამოცანა 2

ვთქვათ, $\pi_2(x)$ აღნიშნავს ყველა იმ p მარტივი რიცხვების რაოდენობას, რომელთათვისაც $p+2$ რიცხვიც მარტივია და $p \le x$ (თუ p და $p+2$ რიცხვებიდან ორივე მარტივია, მათ ტყუპ მარტივ რიცხვებს უწოდებენ). აჩვენეთ, რომ:

$$\pi_2(x) = 2 + \sum_{7 \le n \le x} \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+2)\left[\frac{n!}{n+2}\right]\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} n \left[\frac{(n-2)!}{n}\right]\right)$$

როცა $x > 7$ ($[x]$-ით აღნიშნულია x რიცხვის მთელი ნაწილი).

ამოხსნა: იმ შემთხვევაში, როცა $n > 5$ და ის შედგენილია, მაშინ $\frac{(n-2)!}{n}$ ლუწია და, მაშასადამე:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} n \left[\frac{(n-2)!}{n}\right]\right) = 0.$$

თუ p მარტივი რიცხვია, მაშინ, ვილსონის თეორემის ძალით: $(p-2)! \equiv -(p-1)! \equiv 1 (\bmod p)$, საიდანაც გვექნება:

$$\left[\frac{(p-2)!}{p}\right] = \frac{(p-2)! - 1}{p}.$$

თუ $p>5$, მაშინ $(p-2)!$ იყოფა 4-ზე და ამიტომ:

$$\sin\pi\left(\frac{\pi}{2}p\left[\frac{(p-2)!}{p}\right]\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}[(p-2)!-1]\right)=-1.$$

მაშასადამე, მოცემული ჯამის n-ური წევრი არის ნული, თუ რიცხვებიდან $n, n+2$ ერთი მაინც არის შედგენილი და ტოლია ერთის, თუ ორივე რიცხვი, n და $n+2$ არის მარტივი. თუ აგრეთვე გავითვალისწინებთ $(3,5)$ და $(5,7)$ წყვილებს, მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

ამოცანა 3

ვთქვათ, S სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობაა n. განვიხილოთ S სიმრავლის არაცარიელ $M_1,\dots,M_{n+1}\subset S$ $n+1$ რაოდენობის ქვესიმრავლეთა ერთობლიობა. აჩვენეთ, რომ არსებობს $r,s\geq 1$ რიცხვები და ინდექსთა არათანამკვეთი ორი სიმრავლე: $\{i_1,\dots,i_r\}\cap\{j_1,\dots,j_s\}=\varnothing$ ისეთი, რომ:

$$\bigcup_{k=1}^{r}M_{i_k}=\bigcup_{k=1}^{s}M_{j_k}.$$

ამოხსნა: დავუშვათ, $S=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$. M_j სიმრავლეები გავაიგივოთ $v_j\in R^n$ ვექტორთან კომპონენტებით $(v_{1j},v_{2j},\dots,v_{nj})$, სადაც $v_{ij}=1$, თუ $a_i\in M_j$ და $v_{ij}=0$, როცა $a_i\notin M_j$. ვინაიდან ჩვენ გვაქვს $n+1$ ვექტორი $v_1,v_2,\dots,v_{n+1}\in R^n$, ამიტომ არსებობს ამ ვექტორთა არატრივიალური წრფივი კომბინაცია, რომელიც ნულოვანი ვექტორის ტოლია. ჩვენ განვაცალკევებთ აღნიშნულ წრფივ კომბინაციაში დადებითკოეფიციენტებიან და უარყოფითკოეფიციენტებიან წევრებს და აღნიშნულ ტოლობას ასე გადავწერთ:

$$\sum_{i\in I}\lambda_i v_i=\sum_{j\in J}\lambda_j v_j,$$

სადაც I და J ინდექსების დიზიუნქციური სიმრავლეებია და $\lambda_k>0$, როცა $k\in I\cup J$. ვაჩვენოთ, რომ:

$$\cup_{i\in I}M_i=\cup_{j\in J}M_j.$$

დავუშვათ $a_k\in\cup_{i\in I}M_i$ ანუ $a_k\in M_i$, რაიმე $i\in I$ ნომრისათვის. მაშინ v_i ვექტორის k-ური კოორდინატი არის არანულოვანი. v_s ვექტორების ყველა კოორდინატი არაუარყოფითია და λ_i კოეფიციენტები დადებითი, რაც იწვევს იმას, რომ $\sum_{i\in I}\lambda_i v_i$ ვექტორი არის არანულოვანი. ვინაიდან $\sum_{j\in J}\lambda_j v_j$ ვექტორის k-ური კოორდინატი არის არანულოვანი, ამიტომ იარსებებს $j\in J$, ისეთი, რომ k-ური კოორდინატი v_j ვექტორისა არანულოვანია და ამიტომ $a_i\in M_j\subset\cup_{j\in J}M_j$. მაშასადამე, გვექნება: $\cup_{i\in I}M_i\subset\cup_{j\in J}M_j$ სიმრავლური ჩართვა. ანალოგიურად დამტკიცდება შებრუნებული ჩართვაც.

ამოცანა 4

$S(x,y,z)$ სიმბოლოთი აღნიშნულია იმ სამკუთხედის ფართობი, რომელთა გვერდების სიგრძეებია x, y და z. აჩვენეთ, რომ

$$\sqrt{S(a,b,c)}+\sqrt{S(m,n,p)}\le\sqrt{S(a+m,b+n,c+p)}.$$

ამოხსნა: შემოვიღოთ აღნიშვნები: $s=(a+b+c)/2$, $t=s-a, u=s-b$ და $v=s-c$. ჰერონის ფორმულის გამოყენებით, დასამტკიცებელი უტოლობა მიიღებს სახეს:

$$\sqrt[4]{stuv}+\sqrt[4]{s't'u'v'}\le\sqrt[4]{(s+s')(t+t')(u+u')(v+v')}.$$

პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ დადებითი x,x',y,y' რიცხვებისათვის სამართლიანია უტოლობა:

$$\sqrt{xy}+\sqrt{x'y'}\le\sqrt{(x+x')(y+y')}. \qquad (1)$$

ეს უკანასკნელი უტოლობა ადვილად მიიღება შემდეგი უტოლობიდან:

$$xy+x'y'+2\sqrt{x'y\cdot y'x}\le xy+x'y'+xy'+yx'.$$

თუ გამოვიყენებთ (1) უტოლობას, $x=\sqrt{st}$, $y=\sqrt{uv}$ $x'=\sqrt{s't'}$, $y'=\sqrt{u'v'}$ რიცხვებისათვის ორჯერ მივიღებთ დასამტკიცებელ უტოლობას.

ამოცანა 5

ვთქვათ, $A_1,\dots,A_n$ წარმოადგენს წესიერი n-კუთხედის წვეროებს, რომელიც ჩახაზულია წრეწირში ცენტრით O. ვთქვათ, B წერტილი მდებარეობს წრეწირის A_1A_n მცირე სიგრძის რკალზე და $\angle A_nOB=\alpha$. გამოსახეთ ჯამი $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,|BA_k|$ წრეწირის r რადიუსის და α-ს საშუალებით.

ამოხსნა: შევნიშნოთ, რომ: $a_k=2r\sin\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)$. აღნიშნული ტოლობის გათვალისწინებით გვექნება:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k\cos\frac{\pi}{2n}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k r\left(\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)=$$

$$=(-1+(-1)^{n+1})r\sin\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

მაშასადამე, როცა n ლუწია, საძიებელი ჯამი ტოლია: $-2r\sin\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2n}\right)^{-1}$-ის, ხოლო, როცა n კენტია, ტოლია 0-ის.

მასალა მომზადდა თენგიზ კოპალიანის მიერ

ახალი ამოცანები

ამოცანა 1. ვთქვათ, P მთელკოეფიციენტებიანი ალგებრული მრავალწევრია და $N(P) = card\{k \in Z; f(k) = \pm 1\}$ (Z მთელ რიცხვთა სიმრავლეა). აჩვენეთ, რომ $N(P) \le 2 + \deg P$, სადაც $\deg P$ წარმოადგენს P მრავალწევრის ხარისხს.

ამოცანა 2. მოცემულია მიმდევრობა $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + [\sqrt{a_n}]$ ($[x]$-ით აღნიშნულია x რიცხვის მთელი ნაწილი). აჩვენეთ, რომ a_n წარმოადგენს რაიმე ნატურალური რიცხვის კვადრატს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა n-ს აქვს სახე: $2^k + k - 2$.

ამოცანა 3. ვთქვათ, $a_1, a_2, \ldots$ ნატურალურ რიცხვთა მკაცრად ზრდადი მიმდევრობაა. ვთქვათ, ყოველი ნატურალური k რიცხვისათვის u_k აღნიშნავს მოცემული მიმდევრობის პირველი k წევრის უდიდეს საერთო გამყოფს. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $n > 1$ ნატურალური რიცხვისათვის:

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_n} \le 2.$$

ამოცანა 4. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი ამოზნექილი მრავალკუთხედი Φ შეიცავს Φ_1 და Φ_2 მრავალკუთხედებს, ისეთს, რომ მათ საერთო შიგა წერტილი არ გააჩნიათ და ისინი მსგავსებია Φ მრავალკუთხედის, მსგავსების კოეფიციენტით $1/2$.

ამოცანა 5. მოცემულია $A_1A_2 \ldots A_n$ ამოზნექილი n-კუთხედი. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს $A_iA_{i+1}A_{i+2}$ სამკუთხედი, რომელზედაც შემოხაზული წრეწირი შეიცავს მოცემულ n-კუთხედს მთლიანად.

მასალა მომზადდა თენგიზ კოპალიანის მიერ

წარმატებების კვალდაკვალ...

ანანო ბასილაია

ყველაფერი უკრაინაში, ქალაქ კიევში დაიწყო. ჩემს დაბადებამდე რამდენიმე წლით ადრე, ბაბუამ — გრიგოლ სოხაძემ გადაწყვიტა მათემატიკის სამეცნიერო ხარისხი უკრაინის მეცნიერების ნაციონალურ აკადემიაში მოეპოვებინა. სწორედ ამ მიზნით, ჩემი ოჯახი მასთან ერთად დროებით საცხოვრებლად ქალაქ კიევში გადავიდა. 1996 წელს კი ჩემი დაბადებით ოჯახის წევრების რაოდენობა ერთით გაიზარდა. იქ მხოლოდ ორი წელი გავატარე, ამიტომ ბევრი მოგონება არ შემომრჩა, თუმცა აღნიშნულმა სიტუაციამ ბავშვობიდანვე ჩემ გარშემო მათემატიკური ატმოსფერო შექმნა.

საქართველოში დაბრუნების შემდეგ ბევრი სკოლა გამოვიცვალე. მიზეზი ყოველთვის ერთი და იგივე იყო — მუდამ მეტის ძიების გაუნელებელი სურვილი. ბავშვობიდან პერფექციონისტი ვიყავი, მინდოდა საუკეთესო ვყოფილიყავი ყველაფერში, რასაც ვაკეთებდი. პირველობის მოთხოვნილება ბევრჯერ დამხმარებია წარმატების მიღწევაში, თუმცა მას ბევრი სირთულეც ახლდა თან. საბედნიეროდ, ჩემი ოჯახი ყველა ეტაპზე გვერდით მედგა. ჩემთვის ყველაზე დიდი ბედნიერება იყო გაკვეთილების შემდეგ როგორც მათემატიკური, ისე ზოგადი თავსატეხების გარჩევა ბაბუასთან ერთად. ყოველთვის ვცდილობდი სკოლის დავალება რაც შეიძლება მალე დამემთავრებინა, რომ მეტი დრო მქონოდა მასთან სასაუბროდ. შემიძლია დარწმუნებით ვთქვა, რომ სწორედ ბაბუასთან საუბრებში ჩამოვყალიბდი პიროვნებად და მაშინ დაიწყო ჩემში მათემატიკის მიმართ სიყვარულის გაღრმავება.

მეშვიდე კლასში პირველად მივიღე მონაწილეობა მათემატიკის ეროვნულ ოლიმპიადაში. მაშინ ჩვეულებრივ სკოლაში ვსწავლობდი, მიჩვეული ვიყავი მათემატიკის დავალებებში ყველა ამოცანის ამოხსნას და როდესაც ოლიმპიადის ფინალურ ტურში ზოგიერთი მათგანი ვერ გავაკეთე, ახლა კი სასაცილოდ ჟღერს, ვიფიქრე, რომ მათემატიკის ნიჭი საერთოდ არ მქონდა. მაშინ, ჩემდა გასაკვირად, მოვხვდი საქართველოს ათეულში, თანაც მხოლოდ მე ვიყავი არამათემატიკური სკოლიდან. სწორედ ამ პერიოდში სკოლა „კომაროვში" მისაღები გამოცდები ტარდებოდა. სამწუხაროდ, მე საზაფხულო ბანაკში ვიმყოფებოდი და ვერ შევძელი გამოცდაზე გასვლა. თუმცა სკოლის მაშინდელმა დირექტორმა, ბატონმა გელა მანელიძემ, მიიღო გადაწყვეტილება, ოლიმპიადის შედეგის გათვალისწინებით, უგამოცდოდ ჩავერიცხე სკოლა კომაროვის მერვე კლასში, რის შემდეგაც დაიწყო ჩემი ცხოვრების ახალი, მნიშვნელოვანი ეტაპი.

პირველი სემესტრი საკმაოდ რთული აღმოჩნდა — ჩემს კლასელებს ბევრად დიდი ცოდნა ჰქონდათ ფიზიკა-მათემატიკაში. მათთან დასაწევად დღე და ღამე გაუჩერებელი სწავლა მიწევდა. რომ არა დედის მუდმივი მხარდაჭერა, ამ ყველაფერს ვერ შევძლებდი. დედასთან ყოველთვის განსაკუთრებული მეგობრობა მაკავშირებდა, ნებისმიერი გასაჭირის დროს დარწმუნებული ვიყავი, რომ ის ჩემს დახმარებას შეძლებდა, რაც ყოველთვის მეტ სიმამაცეს მმატებდა სირთულეებთან შესაბრძოლებლად.

ცხადია, ბევრმა მუშაობამ თავისი შედეგი გამოიღო. გარდა მათემატიკისა, ყოველთვის ვცდილობდი სხვადასხვა მიმართულებით განვითარებას. დიდ ყურადღებას ვუთმობდი, მაგალითად, ინგლისური ენის სწავლას. მე-8 და მე-10 კლასში მონაწილეობა მივიღე ბრიტანული აკადემიის და ლონდონის ინგლისურის სკოლის ინგლისური ენის შეჯიბრებაში. ორივე წელს პირველი ადგილი დავიკავე და საჩუქრად შესაძლებლობა მომეცა ენის საზაფხულო სკოლაში წავსულიყავი ინგლისში. სკოლის დროს აქტიურად ვიყავი ჩართული ევროპული ახალგაზრდული პარლამენტის სესიებში — როგორც საქართველოში, ისე სომხეთსა და თურქეთში. აღნიშნული სესიები დამეხმარა საჯარო გამოსვლისა და პრეზენტაციის უნარების გამომუშავებაში, რაც, ვთვლი, რომ საკმაოდ მნიშვნელოვანია.

სკოლის დამთავრების შემდეგ, გადავწყვიტე უმაღლესი მათემატიკის სწავლა ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში გამეგრძელებინა. პირველი სემესტრის დასაწყისში ეროვნული გამოცდების შედეგების მიხედვით საუკეთესო 50 აბიტურიენტი „სააკაშვილის საპრეზიდენტო ბიბლიოთეკაში“ დაგვიბარეს და გვითხრეს, რომ ის ორი სტუდენტი, რომელიც პირველ კურსს საუკეთესო ქულებით დაასრულებდა, გაემგზავრებოდა ვაშინგტონში, ამერიკაში. ამ ამბავმა კიდევ უფრო მეტი მოტივაცია მომცა, რომ საკუთარი თავი მაქსიმალურად გამომევლინა. შედეგმაც არ დააყოვნა და პირველი კურსის ბოლოს ამ ორი სტუდენტიდან ერთ-ერთი ვიყავი.

ბაკალავრიატის ოთხივე კურსმა წარმატებით ჩაიარა. ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტზე საშუალო ქულის მიხედვით პირველი ადგილი მოვიპოვე. გარდა დიდი ცოდნისა და გამოცდილებისა, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტმა შესაძლებლობა მომცა სრული დაფინანსებით მონაწილეობა მიმეღო ზუსტ მეცნიერებათა საერთაშორისო კონფერენციაში ტაილანდში და — მათემატიკის საერთაშორისო ოლიმპიადაში ისრაელში. ბაკალავრიატი ასევე სავსე იყო საინტერესო პროექტებით და კვლევებით როგორც წმინდა მათემატიკაში, ისე მათემატიკის გამოყენებებში ფიზიკასა და ქიმიაში.

ძირითადად დაინტერესებული ვიყავი გამოყენებითი მათემატიკით (ალბათობისა და სტატისტიკის მიმართულებით), ამიტომ გადავწყვიტე სწავლის მოქნილი სისტემა ჩემს სასარგებლოდ გამომეყენებინა და მეორეულ პროფესიად სოციოლოგია ავირჩიე. ამ გადაწყვეტილებამ საშუალება მომცა კვლევით პრობლემებზე განსხვავებული კუთხით შემეხედა და გამეფართოვებინა ჩემი თვალსაწიერი.

შინაგანად ყოველთვის მქონდა სურვილი მონაწილეობა მიმეღო უნივერსიტეტის რეფორმებსა და ახალი ინიციატივების ჩამოყალიბება/გადაწყვეტილების მიღებაში. ამ მიზნით, ჩემი კანდიდატურა წამოვაყენე უნივერსიტეტის სენატში ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის წარმომადგენლის პოზიციაზე. თანაკურსელებმა დიდი ნდობა გამომიცხადეს და არჩევნებში გამარჯვება მოვიპოვე, რის შემდეგაც აქტიურად ვიყავი ჩართული თსუ სენატის აქტივობებში. ამას გარდა, ბაკალავრიატის ბოლო ორი წლის განმავლობაში ვმუშაობდი უმაღლესი სასწავლებლების აკრედიტაცია/ავტორიზაციის ექსპერტად განათლების ხარისხის განვითარების ეროვნულ ცენტრში, რის შედეგადაც უკეთ გავერკვიე უნივერსიტეტის, უმაღლესი საგანმანათლებლო პროგრამების სტრუქტურასა და მასთან დაკავშირებულ გამოწვევებში.

ბაკალავრიატის მესამე კურსის დამთავრების შემდეგ მივიღე ჩემი ცხოვრების ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი გადაწყვეტილება, რომ სწავლა მაგისტრატურის საფეხურზე საზღვარგარეთ გამეგრძელებინა. ამისთვის ჩავაბარე ინგლისურის (IELTS) და მათემატიკის (GRE Mathematics) გამოცდები, მოვამზადე სამოტივაციო და სარეკომენდაციო წერილები და შევარჩიე რეიტინგის მიხედვით ევროპის საუკეთესო უნივერსიტეტები. მალევე მივიღე დადებითი პასუხები. ბონის და უტრეხტის უნივერსიტეტებმა გადაწყვიტეს ჩემი სწავლა და საყოფაცხოვრებო ხარჯები სრულად დაეფინანსებინათ. საბოლოოდ, არჩევანი უტრეხტის უნივერსიტეტზე შევაჩერე. ამ პროცესების პარალელურად, ჩავერთე USAID-ის მიერ დაფინანსებულ G4G (Governing for Georgia)-ს პროექტში, სადაც 30 შერჩეულ მონაწილეს სრულად დაგვიფინანსდა როგორც სწავლება, ისე გამოცდის საფასური აქტუარ-ანალიტიკოსის ექვსსაფეხურიანი სერტიფიცირების მოსანიჭებლად. აღნიშნული კვალიფიკაცია გაიცემა CAA Global-ის მიერ, რომელიც დაფუძნებულია ინგლისში. საბედნიეროდ, პროექტის ხელმძღვანელებმა მომცეს საშუალება გრანტში მონაწილეობა ჰოლანდიიდანაც გამეგრძელებინა.

უცხო ქვეყანაში სწავლა და ცხოვრება ადვილი ნამდვილად არ აღმოჩნდა. პირველი წელი საკმაოდ დატვირთული და რთული იყო. თუმცა როგორც ჩემი ოჯახი, ისე თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორები მუდამ გვერდში მედგნენ, მეხმარებოდნენ დამეძლია დაბრკოლებები. მეც თავდაუზოგავად ვმუშაობდი და წარმატებით ჩავაბარე ყველა საგანი.

ამჟამად ვმუშაობ სამაგისტრო ნაშრომზე ფინანსურ კომპანია „რისკო"-ში, ვიკვლევ ხელოვნური ინტელექტის მოდელებს ჰოლანდიის ინფლაციის პროგნოზირებისთვის; მყავს ორი ხელმძღვანელი, რომლებიც გვერდში მიდგანან და ხელს მიწყობენ ამ რთული გზის გავლაში.

სტუდენტური ცხოვრება დატვირთულია ბევრი სოციალური აქტივობით. გარდა სწავლისა, ვარ ცეკვის სტუდენტური ასოციაციის წევრი და აქტიურად ვმონაწილეობ უნივერსიტეტის მიერ დაგეგმილ არაერთ ღონისძიებაში; პატივი მქონდა წარმედგინა უტრეხტის უნივერსიტეტის მათემატიკის სამაგისტრო პროგრამა უნივერსიტეტის სარეკლამო ვიდეოში.

კიდევ ერთი რამ, რამაც დიდი გავლენა იქონია ჩემზე, იყო ენთუზიაზმით სავსე ატმოსფერო ჩემს გარშემო. ჩემი ყველა თანაკურსელი, გამონაკლისის გარეშე, უსაზღვროდ დიდი პასუხისმგებლობით უდგება თავის პრო-

ფესიას. რა დროსაც არ უნდა შეხვიდე მათემატიკის დეპარტამენტის სასწავლო ბიბლიოთეკაში, მუდმივად ნახავ სტუდენტებს განუწყვეტელ შრომაში. ცხადია, ამ ყველაფრის შემდეგ, შენც მეტი ხალისით უდგები სამუშაოს.

უნივერსიტეტში დანერგილია ძალიან საინტერესო პრაქტიკა — მაგისტრატურის წარმატებულ სტუდენტებს საშუალება აქვთ პრაქტიკული მეცადინეობები ჩაუტარონ ბაკალავრებს. ეს არა მარტო დიდი გამოცდილებაა, არამედ მათ სოლიდური ანაზღაურებაც ეძლევათ აღნიშნული სამსახურისთვის. სხვებთან ერთად, მეც მივიღე შემოთავაზება გავმხდარიყავი სტუდენტი ასისტენტი საგანში „სტოქასტური პროცესები“.

დაბოლოს მინდა ვთქვა, რომ ყოველი დღე სავსეა საქართველოს მონატრებით, თუმცა იმედი მაქვს ჩემი აქ დაგროვილი ცოდნა და გამოცდილება ჩემს სამშობლოსაც გამოადგება.

ინსტრუქცია ავტორებისთვის

1. სტატია აკრეფილი უნდა იყოს Sylfaen-ში, შრიფტის ზომა 11, სტრიქონებს შორის ინტერვალი 1,5, სიტყვებს შორის 1 ინტერვალი, გვერდის Margins – Normal.
2. სტატია ფორმდება შემდეგნაირად: სტატიის სათაური (შრიფტის ზომა 14 Bold), სახელი და გვარი (შრიფტის ზომა 12 Bold), წოდება, თანამდებობა, სამუშაო ადგილი (შრიფტის ზომა 11). ავტორ(ებ)ის/მთარგმნელ(ებ)ის ფოტოსურათი თავსდება სათაურის გვერდით, მარჯვენა მხარეს.
3. ფორმულები და სიმბოლოები იკრიფება Microsoft Eq.-ით. თუ ფორმულა ორ სტრიქონს იკავებს, უნდა გაიყოს (რედაქტირების გაადვილების მიზნით).
4. ქვესათაური გამოიყოფა იმავე ზომის Bold შრიფტით. ტექსტი გრძელდება იმავე სტრიქონზე.
5. აბზაცისათვის გამოიყენება Tab.
6. ნახატები, ნახაზები, ცხრილები და სხვა არატექსტური გამოსახულებები წარმოდგენილი უნდა იყოს მაღალი გარჩევადობის ნახატის ტიპის ჩანართებით; უნდა იყოს გადანომრილი. შესაბამისი მითითება გაკეთდება ტექსტში (შინაარსობრივი და ვიზუალური მხარის კორექტირებისათვის). გრაფიკულ გამოსახულებაზე, მაგ. ნახ. 1, წარწერა კეთდება 10 ზომის შრიფტით.
7. ლიტერატურის ციტირება ხდება ქრონოლოგიურად (და არა ავტორის გვარების ალფაბეტის შესაბამისად): სტატიის ბოლოს, შუაში, იწერება — ლიტერატურა, [] სიმბოლოში იწერება ნომერი (ასეთივე აღნიშვნა იხმარება ტექსტში), გვარი და ინიციალები, წიგნის, სტატიის (ან ინტერნეტრესურსის მისამართი) სრული ბიბლიოგრაფიული მონაცემები: გამომცემლობა (წიგნის შემთხვევაში), ტომი, ნომერი, გვერდები, წელი. ლიტერატურის მითითება ხდება იმ ენაზე, რომელი წყაროთიც ავტორი სარგებლობდა.
8. ტექსტური ჩანართები გაკეთდეს Tex Box-ის საშუალებით. რომელშიც, ისევე, როგორც მთელ ტექსტში, კიდეები სწორდება მარჯვნივ და მარცხნივ, ფორმატირების საშუალებით.
9. Word ფაილთან ერთად ავტორმა უნდა წარმოადგინოს pdf ფაილიც, რითაც მიანიშნებს რედაქტორს სტატიის ვიზუალურ მხარეზე (აქ იგულისხმება, რომ ჩანართებმა არ უნდა დაიკავოს გვერდის მნიშვნელოვანი ნაწილი, ე.ი. ნახატის ტიპის ჩანართები არ უნდა იყოს დიდი ან ბევრი; არ უნდა დარჩეს გვერდზე, ტექსტის გარეშე, ბევრი თავისუფალი ადგილი).
10. გვერდები არ ინომრება.
11. ტექსტში თეორემა, დებულება, განმარტება ან სხვა მნიშვნელოვანი ცნება (ავტორის შეხედულებისამებრ) გამოიყოფა Italic-ით. შრიფტის განსხვავებული ფერი ტექსტში არ იხმარება.
12. თეორემის, დებულების დამტკიცების დაწყება ან დამთავრება რაიმე ნიშნით არ გამოიყოფა.
13. სტატიას ბოლოში, მარჯვენა კუთხეში, 10 ზომის შრიფტით უნდა მიეთითოს ავტორის ელექტრონული მისამართი; კორპორაციული ელექტრონული ფოსტის გამოყენება სავალდებულოა თსუ-ის თანამშრომლებისთვის.

გამომცემლობის რედაქტორი	**მარინე ვარამაშვილი**
გარეკანის დიზაინერი	**მარიამ ებრალიძე**
დამკაბადონებელი	**ლალი კურდღელაშვილი**

0179 თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 14
14, Ilia Tchavtchavadze Ave., Tbilisi 0179
Tel: +995 (32) 2250484, 6284; 6278
www.press.tsu.edu.ge

ISSN 2298-0938