მათემატიკა

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი

№2 2014

ივანე ჯავახიშვილის
სახელობის თბილისის
სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო
მეცნიერებათა
ფაკულტეტი

მათემატიკა

სამეცნიერო–პოპულარული ჟურნალი

დაფუძნებულია 2013 წელს
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის საბჭოს გადაწყვეტილებით
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
95 წლის იუბილესთან დაკავშირებით

სარჩევი

ვიქტორ კუპრაძის გახსენება

ვიქტორ კუპრაძეზე მხოლოდ აღმატებულ ხარისხში უნდა ვილაპარაკოთ. თუ მეცნიერთა ნამოღვაწარს მწვერვალებს შევუსაბამებთ, მაშინ აკადემიკოსი ვიქტორ კუპრაძე ერთ-ერთი მაღალი მწვერვალი იქნება — დახვეწილი ინტელიგენტი, დიდი მეცნიერი, მეტად განათლებული, კოლორიტული და მომხიბვლელი პიროვნება.

ჯონდო შარიქაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

არ ყოფილა საქართველოში მეცნიერული თუ საზოგადოებრივი მოღვაწეობის თითქმის არცერთი უბანი, სადაც ბატონ ვიქტორს თავისი ავტორიტეტული სიტყვა არ ეთქვას, მთელი ენერგიითა და რუდუნებით არ ემოღვაწეოს.

საზოგადოებრივ მოღვაწეობაში იგი ერთ-ერთი გამორჩეული პიროვნება გახლდათ.

ის პირველი მათემატიკოსი იყო, რომელიც, სრულიად ჭაბუკი, ხელმძღვანელობდა ახალგაზრდულ გაზეთებს.

იგი იყო თბილისის უნივერსიტეტის კურსდამთავრებული პირველი ქართველი ასპირანტი, რომელმაც ასპირანტურის კურსი ლენინგრადში გაიარა აკადემიკოსების ა. კრილოვისა და ვ. სმირნოვის ხელმძღვანელობით. სწორედ იქ, ლენინგრადში, აკადემიკოს ნ. მუსხელიშვილის რეკომენდაციითა და მხარდაჭერით ბატონ ვიქტორთან ერთად ასპირატურის კურსს გადიოდნენ ი. ვეკუა, ა. გორგიძე, დ. დოლიძე, ი. მეცხვარიშვილი, ა. რუხაძე, ე. ხარაძე, გრ. ხაჟალია, ვ. მამასახლისოვი, ს. ცხაკაია. აი, ეს 27-30 წლის ახალგაზრდები საქართველოში დაბრუნების წინა თვეებში პირობას სდებენ, რომ ერთმანეთში საუბრისას არც ერთი რუსული სიტყვა არ იხმარონ და არც ბილწსიტყვაობას არ ექნება ადგილი. ჯარიმაც კი აქვთ დაწესებული — 1 მანეთი. გამგზავრებამდე რამდენიმე დღით ადრე აღმოჩნდა, რომ ჯარიმის სახით არცერთი მანეთი არ აქვთ გადახდილი ბატონებს ვიქტორ კუპრაძესა და ევგენი ხარაძეს. ახალგაზრდობა ახალგაზრდობაა და მეგობრები ცდილობენ, ძალდატანებით ერთხელ მაინც წამოაცდენინონ მათ რაიმე რუსული ან უწმაწური სიტყვა. ამას ისინი აღწევენ და ბატონი ვიქტორიცა და ბატონი ევგენიც იძულებულნი არიან, წამოეგონ ამ ანკესზე და ჯარიმა გადაიხადონ. აქვე უნდა გავიხსენო ბატონი ვიქტორის ერთი კეთილშობილური საქციელი. ბატონი ალექსი გორგიძე იგონებდა და ამას მისი ვაჟი ივანე გორგიძეც ადასტურებს: ლენინგრადში ჩასულ ილია ვეკუასა და ალექსი გორგიძეს რკინიგზის სადგურზე ჯერ კიდევ არც თუ ახლო ნაცნობი ბატონი ვიქტორი დახვედრია, რომელსაც მათი ჩამოსვლა ალბათ ნ. მუსხელიშვილმა შეატყობინა, წაუყვანია თავის ბინაზე, სადაც ისინი, თავიანთი საცხოვრებელი პირობების გადაწყვეტამდე ცხოვრობდნენ.

წინ დიდი ასპარეზია. ზემოთ ჩამოთვლილ ახალგაზრდებს შემდგომში დიდი მისია მოუწევთ — იყვნენ მათემატიკის, ფიზიკისა და ასტრონომიის ქართული სკოლების მშვენებანი.

ვ. კუპრაძე თბილისის უნივერსიტეტის კურსდამთავრებული პირველი ქართველი მათემატიკოსია, რომელმაც სადოქტორო დისერტაცია დაიცვა მოსკოვში 1935 წელს, 32 წლის ასაკში.

ის ლენინგრადიდან მოსკოვში გადმოსული სტეკლოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის პირველი სწავლული მდივანია. ახალგაზრდული ასაკის მიუხედავად მისი სიტყვა ძალზე ფასობს. ის აკადემიკოს ლუზინის დამცველია ავად მოსახსენებელი ლუზინშჩინის დროს.

თბილისში დაბრუნებული ვ. კუპრაძე თბილისის მათემატიკის ახლად შექმნილი ინსტიტუტის პირველი დირექტორი ხდება.

იგი იყო პირველი მათემატიკოსი, პროფესორი, რომელიც მეორე მსოფლიო ომში ქერჩის ბრძოლებში მონაწილეობდა და, რომ იტყვიან, ბეწვზე გადარჩა.

ომიდან დაბრუნებული ვ. კუპრაძე პირველი მათემატიკოსია, რომელიც უნივერსიტეტის პრორექტორად ინიშნება, შემდეგ პირველი მათემატიკოსი — განათლების მინისტრი. იგი პირველი მათემატიკოსია, რომელიც უნივერსიტეტის რექტორი ხდება.

მისი უშუალო ხელმძღვანელობით იქმნება დიფერენციალური და ინტეგრალური განტოლებების კათედრა, რომელსაც სიკვდილამდე ხელმძღვანელობს.

ბატონი ვიქტორი პირველი მათემატიკოსია, რომელიც საქართველოს უზენაესი საბჭოს თავმჯდომარეა ხანგრძლივი დროის განმავლობაში.

ის საქართველოს მათემატიკური საზოგადოების შემქმნელი და პირველი პრეზიდენტია (1962-1966).

ის პირველი მათემატიკოსია, რომელიც თბილისის საპატიო მოქალაქედ აირჩიეს.

ასეთი დიდი საზოგადოებრივი დატვირთვის მიუხედავად ბატონი ვიქტორი ინტენსიურ მეცნიერულ მოღვაწეობას ეწევა, იკვლევს დიფრაქციის, რხევათა თეორიის, პოტენციალთა თეორიისა და დრეკადობის მათემატიკური თეორიის ამოცანებს, აქვეყნებს 6 სქელტანიან მონოგრაფიასა და 120 სამეცნიერო სტატიას.

კონფერენციებსა და ყრილობებზე მისი გამოსვლები იმის მაგალითია, თუ როგორი უნდა იყოს მეცნიერი-მკვლევარი, მომხსენებელი. საზღვარგარეთ ის დიდებულად წარმოაჩენდა ხოლმე ქართულ მეცნიერებას, მრავალ უცხო ენაზე ისე საუბრობდა, როგორც მშობლიურ ენაზე. მისი მინისტრობის პერიოდი ნიკოლოზ ბარათაშვილის იუბილეს დაემთხვა. ნ. ბარათაშვილის შემოქმედებაზე მისი ცნობილი მოხსენება ბევრ ლიტერატორს შეშურდებოდა.

ახლაც თვალწინ მიდგას ჩვენი დიდი წინაპრების — გამოჩენილ მათემატიკოსთა საუბრები, კამათი, მსჯელობა, მათი ჯდომისა და დგომის მანერა. ფაკულტეტის სამეცნიერო საბჭოს სხდომებზე ბატონები ვიქტორ კუპრაძე და ლევან გოკიელი თითქმის ყოველთვის გვერდიგვერდ ისხდნენ ხოლმე. თვალს არ ვაშორებდი მათ. ყოველთვის რაღაცას ეჩურჩულებოდნენ ერთმანეთს. ორივემ ქუთაისში გაატარა ბავშვობა, თითქმის ერთი ხნისანი იყვნენ, ბევრი რამ ჰქონდათ მოსაგონარი — ავიცა და კარგიც; ერთმანეთს ულრმეს პატივს სცემდნენ. ბატონი ვიქტორი იტყოდა ხოლმე, ლევანს ვერაფერს გამოაპარებო. ბატონ ვიქტორსაც ვერაფერს გამოაპარებდით. ყველა ნიუანსს წვდებოდა ხოლმე. სიანტერესოა აღინიშნოს, რომ თუ ქართველ მათემატიკოსთა პირველ თაობას წლოვანების მიხედვით დავალაგებთ, მაშინ პირველ „შესანიშნავ შვიდეულში" მოხვდებიან: გ. ნიკოლაძე,

ვიქტორ კუპრაძე

ა. რაზმაძე, ნ. მუსხელიშვილი, ა. ხარაძე, შ. მიქელაძე, ლ.გოკიელი და ვ.კუპრაძე.

ამათგან სამი რკინიგზელის შვილი იყო: ანდრია რაზმაძე, არჩილ ხარაძე და ვიქტორ კუპრაძე. ისიც ნიშანდობლივია, რომ მაშინდელ იმპერიაში ამ სამმა, მუშების შვილებმა, შესანიშნავი განათლება მიიღეს — ორმა მოსკოვში, ერთმა თბილისში — და სხვებთან ერთად სახელი გაუთქვეს ქართულ მათემატიკურ სკოლას.

სიკვდილამდე, 1985 წლის 25 აპრილამდე ბატონ ვიქტორს კალამი არ გაუგდია ხელიდან, როგორც ლეონარდ ეილერზე თქვეს: „Эйлер перестал жить и вычислять".

ისეთი პიროვნება, როგორიც ბატონი ვიქტორი გახლდათ თავისი დიდი საქმეებითა და მოღვაწეობით, თითქოს ბედნიერი უნდა ყოფილიყო, მაგრამ ხანგრძლივ ეს სოფელი არავის ახარებს და, აი, ბატონი ვიქტორის შესანიშნავ ოჯახს დიდი ტრაგედია ატყდება თავს — ტრაგიკულად დაიღუპა მისი ერთადერთი ვაჟი გურამი, დიდი იმედის მომცემი ახალგაზრდა.

თითქოს ფარ-ხმალი უნდა დაყაროს ადამიანმა. არა, ბატონი ვიქტორი არ არის ასეთი პიროვნება! მან თავის გარშემო შემოიკრიბა თითქმის თავისი შვილის ტოლი ახალგაზრდა მათემატიკოსები: მ. ბაშელეიშვილი, თ. ბურჭულაძე, თ. გეგელია, შემდეგ კი — მთელი თაობა ახალგაზრდებისა, ჩაუნერგა მათ მათემატიკური კვლევის სიყვარული, მათთან ერთად შექმნა სკოლა — ვიქტორ კუპრაძის სკოლა. ამ სკოლის მეცნიერულმა გამოკვლევებმა ერთხელ კიდევ გაუთქვეს სახელი ქართულ მათემატიკურ სკოლას.

ბატონი ვიქტორის მეცნიერული სკოლის დროშა დიდებული მეცნიერების ხელშია. მე დარწმუნებული ვარ, რომ ამ დროშას ისინი ძირდაუხრელად გადასცემენ მომავალ თაობებს და ერთხელ კიდევ უკვდავყოფენ მათი ძვირფასი მასწავლებლის სახელს.

წელს ბატონ ვიქტორს დაბადებიდან 110 წელი შეუსრულდა.

დიდება ბატონი ვიქტორის მემკვიდრეებს!

დიდება ბატონი ვიქტორის სახელს!

ვიქტორ კუპრაძე

110

დავით ნატროშვილი,

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის
მათემატიკის დეპარტამენტის უფროსი, საქართველოს
მათემატიკოსთა კავშირის ეროვნული კომიტეტის
თავმჯდომარე

ვიქტორ კუპრაძეს, როგორც გამორჩეულ ერისკაცს, თავისი მრავალმხრივი მოღვაწეობით, ღირსეული ადგილი უკავია შარავანდედით მოსილ ქართველ მამულიშვილთა პლეადაში. მისი ცხოვრება მშობლიური ერისა და ქვეყნის მსახურების ნათელი მაგალითია.

ვიქტორ კუპრაძის სახელი კარგადაა ცნობილი მსოფლიოს მათემატიკოსთა და მექანიკოსთა ფართო წრისათვის. ბატონმა ვიქტორმა უდიდესი წვლილი შეიტანა დიფერენციალური და ინტეგრალური განტოლებების თეორიაში, მათემატიკურ ფიზიკაში, დრეკადობის სამგანზომილებიან თეორიაში და, ზოგადად, გამოყენებით მათემატიკაში, რითაც მან დიდი საერთაშორისო აღიარება მოიპოვა.

ვიქტორ კუპრაძეს შესწევდა იშვიათი უნარი ინტენსიური სამეცნირო-პედაგოგიური მუშაობისათვის შეეთავსებინა ფართო სამეცნიეროორგანიზატორული, საზოგადოებრივი და სახელმწიფოებრივი მოღვაწეობა. ის იყო საბჭოთა კავშირის მეცნიერებათა აკადემიის ვ. სტეკლოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის სწავლული მდივანი, თბილისის მათემატიკის ინსტიტუტის დირექტორი, საქართველოს განათლების მინისტრი, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის რექტორი, საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის მათემატიკისა და ფიზიკის განყოფილების აკადემიკოს-მდივანი, მრავალი სამეცნიერო ჟურნალის რედაქტორი და სარედაქციო კოლეგიის წევრი, საქართველოს მათემატიკური საზოგადოების პრეზიდენტი, საქართველოს უმაღლესი საბჭოს თავმჯდომარე, გაერთიანებული ერების ორგანიზაციაში საბჭოთა დელეგაციის წევრი, მრავალი სამეცნიერო ფორუმის მონაწილე და ორგანიზატორი, საქართველოს პოლიტექნიკური ინსტიტუტისა და თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის კათედრების გამგე, საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის პრეზიდიუმის წევრი; საბჭოთა კავშირისა და გერმანიის დემოკრატიული რესპუბლიკის მეგობრობის საზოგადოების საქართველოს განყოფილების თავმჯდომარე; საბჭოთა კავშირის თეორიული და გამოყენებითი მექანიკის ნაციონალური კომიტეტის წევრი, საბჭოთა კავშირის მეცნიერებათა აკადემიის პლასტიკურობისა და სიმტკიცის სამეცნიერო საბჭოს ბიუროს წევრი, საბჭოთა მათემატიკოსების ნაციონალური კომიტეტის წევრი.

ესაა არასრული, მაგრამ შთამბეჭდავი ჩამონათვალი ვიქტორ კუპრაძის მართლაც გასაოცარი მრავალასპექტიანი სამეცნიერო და საზოგადოებრივი მოღვაწეობისა.

ვიქტორ კუპრაძე დაიბადა 1903 წლის 2 ნოემბერს ლანჩხუთის რაიონის სოფელ ყელაში (ახლანდელი ნინოშვილი), რკინიგზელის ოჯახში. საშუალო განათლება მიიღო ქუთაისის რე-

ვ. კუპრაძის სახლი ს. ყელაში

ქ. ქუთაისი

ალურ სასწავლებელში, სადაც მათემატიკური დისციპლინები შედარებით გაფართოებული პროგრამით ისწავლებოდა. მათემატიკის მასწავლებელმა ივანე გაჩეჩილაძემ თავიდანვე მიაქცია ყურადღება ვიქტორის მათემატიკისადმი განსაკუთრებულ მიდრეკილებას. სკოლის დამთავრების შემდეგ, სწორედ მისი რჩევით შევიდა იგი თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე.

უნივერსიტეტში სწავლის დროს ვიქტორ კუპრაძემ მიიქცია პროფესორების ანდრია რაზმაძისა და ნიკო მუსხელიშვილის ყურადღება. აკადემიკოსი შალვა ნუცუბიძე ასე გამოთქვამს ანდრია რაზმაძის შეხედულებას ბატონი ვიქტორის შესახებ: „მე კარგად ვიცოდი ჩემი მეგობრის ანდრია რაზმაძის სიმპათია-ანტიპათიები. მას ძალიან უყვარდა თავისი მოწაფე ვიქტორ კუპრაძე; იგი ერთხელ უნივერსიტეტის კარებთან შეგვხვდა. მე და ანდრია უნივერსიტეტიდან გამოვდიოდით. ვინმეს შეხვედრისას ანდრია იშვიათად ჩამორჩებოდა. ამ შემთხვევაში ის შედგა. მე პირველად შევამჩნიე მაშინ ახალგაზრდა ვიქტორ კუპრაძე, რომელიც მორიდებით და დინჯად უსმენდა მასწავლებელს. ნაბიჯი შევანელე და როცა ანდრია დამეწია, ჩემს კითხვას არ დაელოდა, ისე მითხრა:

— საინტერესო ყმაწვილია, ნიჭიერი და მუყაითი. შორს წავა. სამწუხაროდ, ხშირად ვერ ვხვდები — პოლიტიკითაა გატაცებული".

უნივერსიტეტის დამთავრების შემდეგ, 1927 წელს, ვიქტორ კუპრაძე უნივერსიტეტში დატოვეს სამეცნიერო მოღვაწეობისათვის მოსამზადებლად, ხოლო 1928 წელს, იმედის მომცემი ახალგაზრდა მკვლევარი ანდრია რაზმაძისა და ნიკო მუსხელიშვილის რეკომენდაციით ასპირანტურაში ჩაირიცხა.

მათემატიკის გამოყენებითი ასპექტებით გატაცება, განსაკუთრებით კი მათემატიკური აპარატის გამოყენებით ფიზიკური ამოცანების გადაჭრის პერსპექტივები დამწყები მეცნიერის ურყევ გადაწყვეტილებად იქცა — იგი ირჩევს გამოყენებითი მათემატიკის მიმართულებას და სტუდენტობის პერიოდშივე იხვეჭს ფრიად წარმატებული სტუდენტის სახელს. იგი აქტიურად მონაწილეობს სამეცნიერო სემინარში. აღსანიშნავია, რომ მასთან ერთად ამ სემინარით მეცნიერულ კარიერას იწყებდნენ გამოჩენილი ქართველი მათემატიკოსები: ილია ვეკუა, ვლადიმერ ჭელიძე და სხვები. იგი თანამშრომლობდა ცნობილ მათემატიკოსებთან გიორგი ნიკოლაძესთან და არჩილ ხარაძესთან. ვიქტორ კუპრაძემ პირველი მეცნიერული ნაშრომიც სტუდენტობის პერიოდში შეასრულა — შეისწავლა ნიკოლოზ მუსხელიშვილის მიერ შეთავაზებული ამოცანა: „გრინის, კლაინისა და ნეიმანის ფუნქციები ზოგიერთი მარტივი კონტურისთვის". მოგვიანებით ასე ახასიათებდა ნიკო მუსხელიშვილი თავის ახალგაზრდა კოლეგას: "სტუდენტობის პერიოდში ის ამჟღავნებდა დამოუკიდებელი მუშაობის ნათლად გამოხატულ უნარს. ის საფუძვლიანად გაეცნო მათემატიკისა და მექანიკის სხვადასხვა საკითხს, საკმაო წარმატებით დაამუშავა ძირითადი სასწავლო საგნები. ყოველთვის ამჟღავნებდა დამოუკიდებელი, შემოქმედებითი და კრიტიკული აზროვნების უნარს. შემიძლია დარწმუნებით აღვნიშნო, რომ სათანადო პირობებში ის დადგება გამოყენებითი მათემატიკის გამოჩენილი სპეციალისტი".

1930 წელს ვიქტორ კუპრაძე სწავლას აგრძელებს საბჭოთა კავშირის მეცნიერებათა აკადემიის ასპირანტურაში ლენინგრადში. მისი ხელმძღვანელები იყვნენ გამოჩენილი რუსი მეცნიერები აკადემიკოსები ალექსი ნიკოლოზის ძე კრილოვი და ვლადიმერ ივანეს ძე სმირნოვი.

ლენინგრადში ვიქტორ კუპრაძე აღმოჩნდა ნიჭიერი ახალგაზდა მათემატიკოსებისა და მექანიკოსების: ს. სობოლევის, ლ. კანტოროვიჩის, ს. ხრისტიანოვიჩის, ს. მიხლინის, გ. გოლუზინისა და სხვათა გარემოცვაში.

ასპირანტურაში სწავლის პერიოდში ვიქტორ კუპრაძე დაინტერესდა რხევის თეორიის ამოცანებით, რომელთაც დიდი პრაქტიკული გამოყენებები აქვთ, განსაკუთრებით სეისმომედეგი ნაგებობების მშენებლობაში. სწორედ ამ საკითხებს მიუძღვნეს თავიანთი ერთობლივი ნაშრომი 1930 წელს ვიქტორ კუპრაძემ და სერგეი სობოლევმა. მათ აღმოაჩინეს ახალი სახის ზედაპირული ტალღა, რომელიც ვრცელდება დრეკადი და თხიერი ფენების გამყოფ ზედაპირზე. ავტორებმა ამ ტალღას „ურთიერთქმედების" ტალღა უწოდეს. შემდეგ ვ. კუპრაძემ ცალკე შეისწავლა ორი დრეკადი ფენის გამყოფ

ვიქტორ კუპრაძის სამეცნიერო ხელმძღვანელები:
ალექსი კრილოვი და ვლადიმერ სმირნოვი

ზედაპირზე დრეკადი ტალღების გავრცელების საკითხი და ელექტომაგნიტური ტალღების დიფრაქციის ამოცანები. ამ შედეგების ავტორს ახალგაზრდა მეცნიერთა საკავშირო კონკურსზე პრემია მიენიჭა. ნიკო მუსხელიშვილმა, რომელიც ყურადღებით ადევნებდა თვალს ახალგაზრდა კოლეგის მეცნიერულ წინსვლას, ასე შეაფასა ეს ნაშრომები: „ვ.კუპრაძემ მოგვცა დიფრაქციის განსაკუთრებულად მნიშვნელოვანი და ძნელი პრობლემის გადაწყვეტა. ეს ამოცანა იდგა ასზე მეტი წლის განმავლობაში, მაგრამ მისი ზოგადი ამოხსნა ვ. კუპრაძის შრომამდე არ იყო მიღებული. ჩვენ გვაქვს ამ ძალიან ძნელი ამოცანის ძალიან მარტივი ამოხსნა“.

სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის ფიზიკისა და მათემატიკის ინსტიტუტი

1933-1935 წლებში ვიქტორ კუპრაძე მუშაობდა საკავშირო მეცნიერებათა აკადემიის სტეკლოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტში სწავლულ მდივნად. 1935 წელს, მან წარმატებით დაიცვა სადოქტორო დისერტაცია თემაზე: „ელექტრომაგნიტური ტალღების დიფრაქციის თეორიის სასაზღვრო ამოცანები“.

ამავე წელს ვიქტორ კუპრაძე ბრუნდება თბილისში და 1935 წლის პირველ ოქტომბერს ინიშნება ახლად შექმნილი თბილისის მათემატიკის ინსტიტუტის დირექტორად.

1941 წლის შემოდგომაზე ვიქტორ კუპრაძე სამამულო ომში გაიწვიეს, როგორც გერმანული ენის კარგი მცოდნე. მიუხედავად იმისა, რომ მას შეეძლო ე.წ. „ჯავშნით“ ესარგებლა და ომში მონაწილეობა არ მიეღო, იგი დათანხმდა შეესრულებინა სპეციალური დავალება უშუალოდ ფრონტის წინა ხაზზე. ის იყო გერმანულ ენაზე გამომავალი პროპაგანდისტული გაზეთის — „ჯარისკაცის სიმართლე“ რედაქტორის მოადგილე. მრავალ არაორდინარულ მომენტებს შორის, რაც დაკავშირებულია ბატონი ვიქტორის ფრონტულ ცხოვრებასთან, ერთ მეტად ამაღელვებელ და არაჩვეულებრივ შემთხვევას გავიხსენებთ. იმ პერიოდში საბჭოთა ჯარის ნაწილებს ტყვედ ჩაბარდა ეფრეიტორი ოტო ტრეტჩერი, რომელიც ამტკიცებდა, რომ მას სურდა ფაშიზმის წინააღმდეგ ბრძოლა. ოტო ტრეტჩერს ეს არ დაუჯერეს და, როგორც ყველა სხვა ტყვე, გაგზავნეს ტყვეთა ბანაკში, ნოვოროსიისკში. სამხედრო შტაბის დავალებით ვიქტორ კუპრაძე გაფრინდა ნოვოროსიისკში გერმანელ ტყვეთა ბანაკში ანტიფა-

შისტური მსოფლმხედველობის კადრების შესარჩევად ჟურნალისტური მოღვაწეობისათვის, სადაც შეხვდა ოტო ტრეტჩერს. იგი ალღოთი მიხვდა, რომ გერმანელი სიმართლეს ამბობდა და ქერჩში ჩამოიყვანა გაზეთის რედაქციაში სამუშაოდ. ამით მან, ფაქტობრივად, იხსნა ოტო ტრეტჩერი ტყვეობის მძიმე ხვედრისგან. ვიქტორ კუპრაძის ამ მოქმედებას ყველა არ იწონებდა, მაგრამ თვითონ ამართლებდა თავის მოქმედებას იმით, რომ გაზეთის თანამშრომლებს არ ჰქონდათ გერმანული ენისა და ფაშისტური არმიის ყოფა-ცხოვრებაზე საკმარისი ცოდნა. ამის გარეშე კი არ შეიძლებოდა კარგი პროპაგანდისტული გაზეთის გამოშვება. რედაქციაში ტრეტჩერის მისვლით გაზეთი უფრო კონკრეტული და მიზანმიმართული გახდა. უმძიმესმა საფრონტო ტრაგიკულმა კატაკლიზმებმა, რაც დატრიალდა ყირიმის ნახევარკუნძულზე, ვიქტორ კუპრაძე და ოტო ტრეტჩერი ერთმანეთს დააშორა.

ამ მოვლენიდან 30 წლის შემდეგ ვიქტორ კუპრაძე აირჩიეს საბჭოთა კავშირისა და გერმანიის დემოკრატიული რესპუბლიკის მეგობრობის საზოგადოების საქართველოს განყოფილების თავმჯდომარედ და გერმანიიდან ის ღებულობს წერილს, სადაც ეწერა: „არ ვიცი ვინ ხართ თქვენ, მაგრამ ოდესღაც ჩემი ცხოვრების ძალიან რთულ პერიოდში ამ გვარის ადამიანმა ისეთი როლი ითამაშა ჩემი ბედის გადაწყვეტაში, რომ მე არ შემეძლო გულგრილად მიმეღო გაზეთის ეს ცნობა". წერილის ავტორი იყო ოტო ტრეტჩერი. მალე მან მიიღო საპასუხო წერილი ვიქტორ კუპრაძისაგან, რასაც მოყვა მათი მეტად ამაღელვებელი შეხვედრა.

1943 წელს ვიქტორ კუპრაძე, ფრონტიდან დემობილიზაციის შემდეგ, დაინიშნა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პრორექტორად სამეცნიერო მუშაობის დარგში.

ამ პერიოდიდან მოყოლებული, ბატონი ვიქტორის ცხოვრებაში სამეცნიერო-პედაგოგიური მოღვაწეობის პარალელურად კალეიდოსკოპური სისწრაფით იცვლებოდა პოლიტიკური და სახელმწიფოებრივი სამოღვაწეო სფეროები.

1943 წელს ვიქტორ კუპრაძემ უნივერსიტეტში დააარსა დიფერენციალური და ინტეგრალური განტოლებების კათედრა, რომლის გამგე იყო 1980 წლამდე.

1944 წლის მაისში ვიქტორ კუპრაძე დაინიშნა საქართველოს განათლების მინისტრად. ამ თანამდებობაზე იგი 1953 წლამდე მუშაობდა. ვიქტორ კუპრაძის მოღვაწეობა განათლების მინისტრის პოსტზე მრავალი ნოვატორული წამოწყებით გამოირჩევა განათლების სფეროში. კერძოდ, მისი უშუალო მცდელობით განხორციელდა სასკოლო პროგრამების რეფორმა და შემოღებულ იქნა თერთმეტწლიანი სწავლება ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლაში.

1946 წელს ვიქტორ კუპრაძე აირჩიეს საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ნამდვილ წევრად. 1947 წლიდან 1985 წლამდე იგი იყო აღნიშნული აკადემიის პრეზიდიუმის წევრი.

1954-1963 წლებში ვიქტორ კუპრაძე იყო საქართველოს უმაღლესი საბჭოს თავმჯდომარე.

1954-1958 წლებში ვიქტორ კუპრაძე იყო თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის რექტორი და ღირსეულად აგრძელებდა თავისი დიდი წინაპრების — პეტრე მელიქიშვილისა და ივანე ჯავახიშვილის მიერ დანერგილ ტრადიციებს.

1955 წელს ვიქტორ კუპრაძე წარგზავნილ იქნა აშშ-ში გაერთიანებული ერების ორგანიზაციის გენერალური ასამბლეის მეათე სესიაში მონაწილეობისათვის. იგი იყო საბჭოთა დელეგაციის ხელმძღვანელის მოადგილე. ბატონი ვიქტორი სიტყვით გამოვიდა გაეროს სხდომაზე, როცა იხილებოდა საკითხი აფრიკის ხალხთა შესახებ.

1962 წელს თბილისში აღორძინდა 1923 წელს დაფუძნებული საქართველოს მათემატი-კოსთა საზოგადოება. დამფუძნებელმა კრებამ ვიქტორ კუპრაძე საზოგადოების პრეზიდენტად აირჩია.

1963 წელს საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიაში დაარსდა მათემატიკისა და ფიზიკის განყოფილება. ვიქტორ კუპრაძე აირჩიეს ამ განყოფილების აკადემიკოს მდივნად. იგი ამ თანამდებობაზე 1981 წლამდე მუშაობდა.

ბატონი ვიქტორი აქტიურად იყო ჩაბმული საერთაშორისო სამეცნიერო ურთიერთობებში. 1976 წელს ვიქტორ კუპრაძე აირჩიეს სსრ კავშირის თეორიული და გამოყენებითი მექანიკის ნაციონალური კომიტეტის წევრად, ხოლო 1977 წელს — ახლად დაარსებული საერთაშორისო საზოგადოების — „მათემატიკის მეთოდები მექანი-

1954-1958 წლებში ვიქტორ კუპრაძე თსუ-ს რექტორი იყო

კაში“ პრეზიდიუმის წევრად. ამავე წლიდან იყო სსრ კავშირის მეცნიერებათა აკადემიის პლასტიკურობისა და სიმტკიცის სამეცნიერო საბჭოს ბიუროს წევრი. 1980 წელს ქართველი მეცნიერი აირჩიეს საბჭოთა მათემატიკოსების ნაციონალური კომიტეტის წევრად.

ვიქტორ კუპრაძის დიდი დამსახურება მოღვაწეობის სხვადასხვა სფეროში მრავალი ჯილდოთი აღინიშნა. მაგრამ ყველაზე დიდი ჯილდო, ალბათ, ის გულწრფელი სიყვარული და პატივისცემის გრძნობა იყო, რომელსაც სათუთად და გამორჩეულად გამოხატავდა ფართო ქართული საზოგადოება და მისი უამრავი კოლეგა, როგორც საქართველოში, ისე მის ფარგლებს გარეთ — უცხოეთში.

1985 წლის 25 აპრილს შეწყდა გამოჩენილი მეცნიერისა და დიდი მამულიშვილის მაჯისცემა. მართალია, მას შემდეგ 28 წელი გავიდა, მაგრამ მისი ნათელი და ქარიზმატული სახე, პიროვნული ხიბლი და უმაღლესი ინტელიგენტურობა დღესაც უდიდესი აღტაცებითა და სიმპატიით მოიხსენიება იმ პიროვნებათა წრეში, ვისაც ერთხელ მაინც ჰქონდა ბედნიერება შეხვედროდა და ესაუბრა ვიქტორ კუპრაძესთან.

საერთაშორისო სამეცნირო წრეებში დღესაც უდიდესი ინტერესის საგანს წარმოადგენს ვიქტორ კუპრაძის საკმარისად მდიდარი სამეცნიერო მემკვიდრეობა, რომლის გომოყენების სფერო უფრო და უფრო ფართოვდება როგორც ფუნდამენტური მეცნიერების, ისე გამოყენებითი საინჟინრო სფეროების მიმართულებით.

ეს სამეცნიერო მემკვიდრეობა პირობითად შეიძლება 6 დიდ ჯგუფად დაიყოს:

ზემოთაღნიშნული თეორიული საკითხები განხილული და გაანალიზებულია ვიქტორ კუპრაძის მრავალრიცხოვან შრომებში და მონოგრაფიებში, რომლებშიც შესწავლილია

- *ზომერფელდის გამოსხივების პირობების დაფუძნებასთან დაკავშირებული პრობლემები და სასაზღვრო ამოცანები ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის;*
- *ელექტრო-მაგნიტური ტალღების დიფრაქციისა და გაბნევის ამოცანები;*
- *დრეკადობის თეორიის სამგანზომილებიანი ამოცანები;*
- *პოტენციალთა მეთოდი, სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების თეორია და მათი გამოყენება მათემატიკური ფიზიკისა და უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მათემატიკურ მოდელებში;*
- *დრეკადობის თეორიის დაზუსტებული მოდელები;*
- *მათემატიკური ფიზიკის სასაზღვრო ამოცანების მიახლოებითი ამონახსნების აგება და რიცხვითი რეალიზაციის პრობლემები: ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი.*

რთული მრავალგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნადობის საკითხები პოტენციალთა მეთოდისა და სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების თეორიის გამოყენებით. მრავალი მათგანი ითარგმნა და გამოიცა ინგლისურ, გერმანულ და პოლონურ ენებზე.

ვიქტორ კუპრაძის პირველი მონოგრაფია „დიფრაქციის მათემატიკური თეორიის ძირითადი ამოცანები“, 1935 წელს გამოქვეყნდა რუსულ ენაზე ლენინგრადში. ეს მონოგრაფია 17 წლის შემდეგ, 1952 წელს, ინგლისურ ენაზე გამოსცა კალიფორნიის უნივერსიტეტმა და მას დღემდე არ დაუკარგავს აქტუალობა. ასევე დიდი მნიშვნელობა ენიჭება ვიქტორ კუპრაძის მეორე მონოგრაფიას „რხევის თეორიის სასაზღვრო ამოცანები და ინტეგრალური განტოლებები“, რომელიც რუსულ ენაზე 1950 წელს გამოიცა მოსკოვში, ხოლო გერმანულ ენაზე – 1956 წელს ბერლინში.

დრეკადობის თეორიას ვიქტორ კუპრაძემ რამდენიმე მონოგრაფია მიუძღვნა. მათ შორის უნდა აღინიშნოს: „პოტენციალის მეთოდები დრეკადობის თეორიაში“, რომელიც რუსულ ენაზე გამოიცა 1963 წელს მოსკოვში, ხოლო შემდეგ ითარგმნა ინგლისურად და იერუსალიმში გამოიცა 1965 წელს; 1963 წელს ინგლისურ ენაზე გამოიცა ვიქტორ კუპრაძის მონოგრაფია „დრეკადობის თეორიის დინამიკური ამოცანები“, რომელიც ცნობილი ჰოლანდიური ენციკლოპედიური გამოცემის რედაქტორების ი. სნედონის და რ. ჰილის თხოვნით დაიწერა.

განსაკუთრებული აღნიშვნის ღირსია ვიქტორ კუპრაძის მიერ თავის მოწაფეებთან თენგიზ გეგელიასთან, მიხეილ ბაშელეიშვილთან და თენგიზ ბურჭულაძესთან ერთად 1968 წელს დაწერილი ფუნდამენტური მონოგრაფია „დრეკადობის მათემატიკური თეორიის სამგანზომილებიანი ამოცანები“, რომელიც მიეძღვნა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის 50-ე წლისთავს. 1971 წელს ამ წიგნის ავტორებს მიენიჭათ საქართველოს სახელმწიფო პრემია მეცნიერების დარგში. 1976 წელს ამ მონოგრაფიის მეორე გაფართოებული გამოცემა სახელწოდებით „დრეკადობისა და თერმოდრეკადობის მათემატიკური თეორიის სამგანზომილებიანი ამოცანები“ განხორციელდა მოსკოვში, გამომცემლობა „ნაუკაში“, ხოლო 1979 წელს ითარგმნა ინგლისურად და გამოიცა ამსტერდამში. გამოცემისთანავე ამ მონოგრაფიამ ექსპერტთა უდიდესი ყურადღება მიიპყრო და დარგში მომუშავე მეცნიერებისთვის სამაგიდო წიგნად იქცა.

საერთაშორისო მასშტაბით განსაკუთრებული პოპულარობით სარგებლობს ვიქტორ კუპრაძის მიერ გასული საუკუნის სამოციან წლებში შემოთავაზებული სასაზღვრო ამოცანების მიახლოებითი ამონახსნების აგების კიდევ ერთი ფრიად ეფექტური მეთოდი, რომელსაც დღეს სამეცნიერო ლიტერატურაში ძირითადად „ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდს“ უწოდებენ. ამ მეთოდისადმი მიძღვნილ საერთაშორისო მათემატიკური ფორუმების მასალების პრე-

ამბულაში, უკლებლივ ყველგან ხაზგასმული და აღნიშნულია ვიქტორ კუპრაძისა და მერაბ ალექსიძის დამსახურება ამ მეთოდის შექმნაში და დაფუძნებაში. გამოთვლითი ტექნიკის განვითარების თანამედროვე დონემ კიდევ უფრო გაზარდა აღნიშნული მეთოდის გამოყენების სფეროები. ფრიად სასიხარულოა, რომ ამ მეთოდის გამოყენებით უაღრესად მნიშნელოვანი პარქტიკული შედეგებია მიღებული უცხოელი და ქართველი რადიოფიზიკოსების მიერ გამოყენებითი ელექტროდინამიკის თანამედროვე ამოცანების კვლევაში. ინტერნეტ სივრცეში არსებობს ამ ამოცანებისადმი მიძღვნილი 80 000-მდე ბმული, რომლებიც მოიცავს მრავალი ქვეყნის სამეცნიერო ჯგუფებში შექმნილ შრომებს. ეს მართლაც რეკორდული რაოდენობაა!

როგორც აღვნიშნეთ, უკვე 28 წელია გასული ბატონი ვიქტორის გარდაცვალებიდან, მაგრამ ზემოთ მოტანილი ფაქტებიდან ცხადად ჩანს, რომ მისი მეცნიერული მემკვიდრეობა და სამეცნიერო იდეები კვლავაც აქტიური გამოყენებისა და განვითარების პროცესშია მსოფლიოს მრავალ სამეცნიერო ცენტრში.

ეს უდიდესი, უფლის მიერ ბოძებული ჯილდოა მეცნიერისთვის!

ჰილბერტის პრობლემები

გია გიორგაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა
ფაკულტეტის ასოცირებული პროფესორი

მათემატიკოსები განვლილ ოთხ წელს აჯამებენ ხოლმე მათემატიკოსთა საერთაშორისო კონგრესზე. საერთაშორისო სამეცნიერო კომიტეტი, რომელიც სპეციალურად ირჩევა ყოველი კონგრესისათვის მსოფლიოს წამყვანი მათემატიკოსებისაგან, ადგენს სამეცნიერო მოხსენების და მომხსენებლების ნუსხას, განვლილ პერიოდში ყველაზე მნიშვნელოვანი გამოკვლევების ავტორებს.

მათემატიკოსთა პირველი კონგრესი 1897 წელს გაიმართა შვეიცარიაში, ციურიხში, ხოლო ბოლო 26-ე, კი 2010 წელს ჰაიდარაბათში, ინდოეთში. კონგრესის განუყოფელი და ამაღლებული ნაწილია (1936 წლიდან) 40-წლამდე მეცნიერთა დაჯილდოება უმაღლესი ჯილდოთი — ფილდსის ოქროს მედლით და პრემიით, განსაკუთრებული მიღწევისათვის მათემატიკაში.

მათემატიკის კონგრესების ისტორიაში განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს მათემატიკოსთა მე-2 კონგრესს, რომელსაც პარიზმა უმასპინძლა 1900 წელს. ამ კონგრესზე მათემატიკის სწავლების და მეთოდოლოგიის სექციაზე მოხსენებით წარსდგა იმ დროისათვის უკვე კარგად ცნობილი და სახელგათქმული, გამორჩეული შედეგების მქონე 38 წლის გერმანელი მათემატიკოსი გიოტინგენის უნივერსიტეტიდან დავით ჰილბერტი. თავის მოხსენებაში ჰილბერტმა ჩამოაყალიბა ზოგადმათემატიკური პრობლემები, რომლებსაც მისი აზრით განსაკუთრებული მნიშვნელობა მიენიჭებოდა მომდევნო, მე-20 ასწლეულში. დღეს ეს პრობლემები ჰილბერტის პრობლემების სახელწოდებითაა ცნობილი და ცალკეული პრობლემა მოიხსენიება იმ ნომრის მიხედვით, რა ქრონოლოგიითაც ჰილბერტმა დაალაგა ისინი. არც მანამდე და არც მის შემდეგ ერთი საუკუნის მანძილზე, არავის თავის თავზე არ აუღია პასუხისმგებლობა ანალოგიური განაცხადი გაეკეთებინა. თუმცა ყოველ ეპოქას თავისი გამორჩეული გმირები ჰყავს და 21-ე საუკუნე, ისევე როგორც მე-20, ახალი მათემატიკური პრობლემებით დაიწყო (ათასწლეულის შვიდი და სმეილის 18 პრობლემა). ჩვენთვის ძნელია მათი გავლენის შეფასება 21-ე საუკუნის მათემატიკურ მეცნიერებებზე (მათემატიკა, თეორიული ფიზიკა, ინფორმატიკა), მაშინ როდესაც ჰილბერტის პრობლემების გავლენა მეოცე საუკუნის მათემატიკურ აზროვნებაზე ფართო გაგებით გამორჩეული, უნიკალური და დღეს ცალკე კვლევის ობიექტია თავისი შედეგებით.

ჩვენ ვერ გავაშუქებთ ყველა მნიშვნელოვან ისტორიულ დეტალს, რომელიც ჰილბერტის პრობლემებთანაა დაკავშირებული მათი დასმიდან დღემდე. მსოფლიო სამეცნიერო ლიტერატურაში მას მრავალი გამოკვლევა ეძღვნება. მივუთითებთ მხოლოდ რამდენიმე ნაკლებად ცნობილ ფაქტზე.

ჰილბერტის მოხსენების შესავალი რომანტიკული ლიტერატურული ნაწარმოებივითაა. იგი იწყება სიტყვებით „რომელ თქვენთაგანს არ უნდა გადასწიოს ფარდა, რომლის მიღმა ჩვენი მომავალია დამალული, თუნდაც თვალის ერთი შევლებით შეიგრძნოს ჩვენი ცოდნით მიღწეული წარმატებები და უახლოეს ასწლეულში მისი განვითარების საიდუმლოებები? რა განსაკუთრებულ მიზნებს დაისახავენ მომდევნო თაობის წამყვანი მათემატიკოსები? რომელი ახალი მეთოდები განვითარდება და რა ახალ ფაქტებს აღმოაჩენენ ახალ ასწლეულში მათემატიკური აზრის ფართო და მდიდარ სამყაროში?". შესავლის შემდეგ ჰილბერტმა ჩამოაყალიბა 23 პრობლემა კომენტარებით. კომენტარები სტილითაც კი განსხვავებულია ერთმანეთისაგან. ისინი შეიცავენ პრობლემის მნიშვნელობას, ამოცანის ამოხსნის გზებს, მათ კავშირს მეცნიერების მომიჯნავე დარგებთან და სხვა. მაგრამ პრობლემე-

დავით ჰილბერტი (1862-1943), გენიალური გერმანელი მათემატიკოსი, რომელიც თანაბარი სიღრმით ფლობდა მათემატიკის ყველა დარგს. ითვლებოდა თავისი დროის ყველაზე დიდ ფიგურად მეცნიერებაში. მოღვაწეობდა გიოტინგენის უნივერსიტეტში, რომელიც ჰილბერტის იქ მოშაობის პერიოდში მსოფლიო მათემატიკურ ცენტრად იქცა. არამარტო ევროპელი, არამედ ამერიკელ მეცნიერთა დიდი უმრავლესობა თავს ვალდებულად თვლიდა მოხსენებით წარმსდგარიყო ჰილბერტის სემინარზე გიოტინგენში. გერმანიის ხელისუფლებაში ნაცისტების მოსვლის შემდეგ (1930 წ.) ჰილბერტი აქტიურ სამეცნიერო ცხოვრებას ჩამოშორდა. მასთან ერთად დიდება ჩამოშორდა გიოტინგენის უნივერსიტეტს. ნაცისტური გერმანიის თხუთმეტწლიანმა პოლიტიკურმა, ეკონომიკურმა და სამხედრო ძლიერებამ ვერ გადასწონა ჰილბერტის ავტორიტეტს. აქტუალობა დაკარგა გიოტინგენის უნივერსიტეტმა და გერმანულმა ენამაც კი, როგორც დომინანტმა სამეცნიერო ენამ. ჰილბერტის საფლავის ქვას, გიოტინგენში, მისივე სიტყვები აწერია: "ჩვენ უნდა ვიცოდეთ, ჩვენ გვეცოდინება".

ბი არჩეულია ერთიანი პრინციპით. ის პრინციპი, რომელსაც ყველა ამოცანა აკმაყოფილებს ჰილბერტის აზრით არის ა) გასაგები (ნათელი უნდა იყოს საიდან მოდის ამოცანა), ბ) საკმაოდ რთული იმისათვის, რომ ინტერესი გამოეწვია და გ) არც იმდენად რთული, რომ მისი ამოხსნა შეუძლებელი იყოს. ჰილბერტის მოხსენების ტექსტი, რომელიც მოგვიანებით გამოქვეყნდა, დაახლოებით 30 გვერდია. ყოველი პრობლემა ცალკე პარაგრაფითაა გამოყოფილი და დასათაურებულია. ზოგმა პრობლემამ სამეცნიერო-პოპულარულ ლიტერატურაში წლების მანძილზე სპეციალური სახელი შეიძინა, მათემატიკური თეორიის ამგვარ პოპულარულ გადმოცემას ჰილბერტი მიესალმებოდა კიდეც, რადგან მისი აზრით „მათემატიკური თეორია სრულყოფილად შეიძლება მაშინ ჩაითვალოს, თუ მას იმდენად ნათელს გახდი, რომ თანახმა ხარ იგი პირველსავე შემხვედრს უამბო“.

ქვემოთ მოგვყავს პრობლემების ჩამონათვალი, მცირე კომენტარებით, იმ სახით, რა სახითაც ისინი გამოქვეყნდა მოხსენებიდან ერთი წლის შემდეგ.

პრობლემა 1. კანტორის პრობლემა კონტინუუმის სიმძლავრის შესახებ.

პრობლემა 2. არითმეტიკული (არითმეტიკის) აქსიომების არაწინააღმდეგობრიობა.

პრობლემა 3. ტოლი ფუძის ფართობის და ტოლი სიმაღლის მქონე ტეტრაედრების მოცულობების ტოლობა.

ევკლიდეს დროიდან დაწყებული სამკუთხა პირამიდის მოცულობის გამოთვლის დროს გამოიყენება არც თუ ისე მარტივი ზღვარზე გადასვლის ოპერაცია. მაშინ, როდესაც ფართობის გამოთვლა პლანიმეტრიაში არ იყენებს ზღვარს. ამ „ზედმეტი“ პროცედურის გამოყენების აუცილებლობა არის პრობლემის არსი. ამრიგად, საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ შეუძლებელია ავაგოთ მრავალწახნაგა ფიგურების ფართობთა გამოთვლის თეორია ზღვარზე გადასვლის ოპერაციის გარეშე.

პრობლემა 4. წრფის, როგორც ორი წერტილის შემაერთებელი უმცირესი მანძილის პრობლემა.

ჩამოთვალეთ მეტრიკები, რომელთა მიმართ წრფეები გეოდეზიურები არიან — ასეთია პრობლემის თანამედროვე ფორმულირება.

პრობლემა 5. ლის უწყვეტი გარდაქმნების ჯგუფი, როდესაც ჯგუფის წარმომქმნელებს დიფერენცირებადობას არ მოვთხოვთ.

საჭიროა გავარკვიოთ, ყოველთვის არის თუ არა უწყვეტი (ტოპოლოგიური) ჯგუფი ლის ჯგუფის სტრუქტურის მატარებელი. პრობლემა ერთმანეთთან აკავშირებს ფელიქს კლაინის კონსტრუქციას სხვადასხვა გეომეტრიების წარმოდგენის შესახებ გარდაქმნების ჯგუფების ინვარიანტების საშუალებით და სოფუს ლის დიფერენციალური განტოლებების სიმეტრიის ჯგუფების თეორიას.

პრობლემა 6. ფიზიკის აქსიომების მათემატიკური ფორმულირება.

პრობლემა საკმაოდ ზოგადი სახითაა დასმული. ამ პრობლემის კომენტირებისას ჰილბერტი პირველი რიგის ამოცანად განიხილავს ალბათობის თეორიის დაფუძნებას აქსიომათა სისტემაზე. მისი აზრით ალბათობის თეორია არის ფიზიკის ნაწილი, რომელშიც მნიშვნელოვან როლს მათემატიკური მეთოდები ასრულებენ. დღეს ეს აზრი დომინანტური აღარ არის, ალბათობის თეორია მათემატიკურ დისციპლინათა რიცხვში განიხილება. ამასთან, დღევანდელი გაგებით ფიზიკური თეორიების აქსიომატიზაცია არ არის წმინდა მათემატიკური ამოცანა.

პრობლემა 7. ზოგიერთი რიცხვის ირაციონალურობა და ტრანსცენდენტულობა.

პრობლემა 8. მარტივი რიცხვების პრობლემა.

ეს პრობლემა შეიცავს შემდეგ საყოველთაოდ ცნობილ გოლდბახის ჰიპოთეზას (4-დან დაწყებული ყოველი ლუწი რიცხვი წარმოიდგინება ორი მარტივი რიცხვის ჯამად); რიმანის ჰიპოთეზას ς-ფუნქციის კომპლექსური ნულების განლაგების შესახებ და ჰიპოთეზას იმის შესახებ, რომ ტყუპი მარტივი რიცხვების რაოდენობა უსასრულოა.

პრობლემა 9. ნებისმიერი რიცხვითი ველისათვის თანაზიარობის ზოგადი კანონის დამტკიცება.

თანაზიარობის კვადრატული კანონის თანახმად $x^2+1\equiv 0(mod p)$*-ს აქვს ამონახსნი მხოლოდ მაშინ, როდესაც* $p \equiv 1(mod 4)$*, სადაც* p *მარტივი რიცხვია. ამოცანა მდგომარეობს ამ ტიპის დებულების ჩამოყალიბებასა და დამტკიცებაში ნებისმიერი რიცხვითი ველებისათვის. კერძოდ, საჭიროა ვაჩვენოთ ნებისმიერ რიცხვით ველში l-ური რიგის ხარისხოვანი ნაშთისათვის თანზიარობის კანონის სამართლიანობა.*

პრობლემა 10. დიოფანტური განტოლების ამოხსნადობის ამოცანა (არსებობს თუ არა ზოგადი ალგორითმი, რომელიც გაარკვევს, აქვს თუ არა დიოფანტურ განტოლებას ამონახსნი).

პრობლემა 11. კვადრატული ფორმები ნებისმიერი ალგებრული კოეფიციენტებით.

მოცემულია ნებისმიერი რაოდენობის უცნობების შემცველი კვადრატული განტოლება ალგებრული კოეფიციენტებით. ამოვხსნათ განტოლება მთელ ან რაციონალურ რიცხვებში, რომლებიც ეკუთვნიან კოეფიციენტებით განსაზღვრულ გარკვეულ ალგებრულ სტრუქტურას.

პრობლემა 12. აბელური ველებისათვის კრონეკერის თეორემის გავრცელება ალგებრულ რაციონალურობის არეებზე.

პრობლემა 13. მეშვიდე ხარისხის ზოგადი განტოლების ამოხსნის შეუძლებლობა ორ არგუმენტზე დამოკიდებული ფუნქციის საშუალებით.

გარკვეული (ჩირნგაუზენის) რადიკალის ტიპის გარდაქმნით მეშვიდე ხარისხის ზოგადი სახის ალგებრული განტოლება მიიყვანება უფრო მარტივი სახის განტოლებაზე. მაგალითად, მეშვიდე ხარისხის განტოლება დადის $f^7+xf^3+yf^2+z+1=0$ *განტოლებაზე. ამრიგად, ზოგადი მეშვიდე ხარისხის ალგებრული განტოლების ამონახსნი გამოისახება არითმეტიკული ოპერაციების სუპერპოზიციით, რადიკალებით და სამ* x,y,z *ცვლადებზე დამოკიდებული* f *ფუნქციით. ალგებრული გარდაქმნებით ამ განტოლების შემდგომი გამარტივება, სავარაუდოდ, შეუძლებელია. ამრიგად, საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ მეშვიდე ხარისხის ზოგადი სახის ალგებრული განტოლების ამონახსნი შეუძლებელია წარმოვადგინოთ ორი ცვლადის უწყვეტი ფუნქციების სუპერპოზიციით. ეს არის მე-13 პრობლემის ერთ-ერთი ინტერპრეტაცია. აღნიშნული პრობლემის სხვა ინტერპრეტაციაც არსებობს.*

პრობლემა 14. ფუნქციათა სრული სისტემის სასრულობის დამტკიცება.

პრობლემა მდგომარეობს წრფივი ალგებრული ჯგუფის ინვარიანტების ალგებრის სასრულად წარმომქნელობის დამტკიცებაში. დღეს ცნობილია, რომ წრფივი ჯგუფის ინვარიანტების ალგებრა არ არის სასრულად წარმოქმნილი. ამ თეორემიდან გამომდინარეობს დასმული ამოცანის კონტრმაგალითის არსებობა.

პრობლემა 15. შუბერტის აღრიცხვითი გეომეტრიის მკაცრი დაფუძნება.

პრობლემა 16. ალგებრული წირების და ზედაპირების ტოპოლოგიის პრობლემა.

პრობლემა 17. განსაზღვრული ფორმების წარმოდგენა კვადრატების ჯამად.

პრობლემა 18. კონგრუენტული მრავალწახნაგებისაგან სივრცის დაფარვა (შევსება).

პრობლემა 19. არიან თუ არა რეგულარული ვარიაციული ამოცანების ამონახსნები აუცილებლად ანალიზურები?

პრობლემა 20. ზოგადი ამოცანა სასაზღვრო პირობების შესახებ.

ეს პრობლემა გულისხმობს გაირკვეს, ამოხსნადია თუ არა გარკვეული სასაზღვრო პირობების მქონე ყველა ვარიაციული ამოცანა.

პრობლემა 21. მოცემული მონოდრომიის ჯგუფის მქონე წრფივი დიფერენციალური განტოლების არსებობის დამტკიცება (რიმან-ჰილბერტის მონოდრომიის ამოცანა).

პრობლემა 22. ანალიზური დამოკიდებულობების უნიფორმიზაცია ავტომორფული ფუნქციების საშუალებით.

პრობლემა 23. ვარიაციათა აღრიცხვის მეთოდების გაფართოება.

ამ პრობლემაში ლაპარაკი არ არის კონკრეტულ ამოცანაზე. იგულისხმება ვარიაციათა აღრიცხვის უნივერსალური ხასიათი სხვადასხვა ტიპის ექსტრემალური ამოცანების ამოსახსნელად. ჰილბერტის ოპტიმიზმი ამ ასპექტში გამართლდა, ამის საილუსტრაციოდ საკმარისია ოპტიმალური მართვის მათემატიკური თეორია.

მოყვანილ პრობლემათაგან ზოგი მალე ამოიხსნა, ზოგის ამოხსნას გამორჩეულ მათემატიკოსთა კოლექტივებმა ათეული წლები შეალიეს. მათ ამოსახსნელად დამუშავდა ახალი მეთოდები, დაზუსტდა ცნებები, შეიქმნა მეცნიერებათა ახალი დარგები და მიმართულებები. ზოგიერთი პრობლემა მოგვიანებით უფრო ზოგადი სახით დაისვა, ზოგიერთის ამოხსნა კი კერძო შემთხვევებში მოხერხდა.

ჰილბერტმა კონგრესზე თავისი მოხსენების დროს მიუთითა მათემატიკური დებულებების დამტკიცების სიმკაცრის აუცილებლობაზე — დიდი შეცდომა იქნება ვიფიქროთ — ამბობს იგი, რომ სიმკაცრე მტკიცებისას სიმარტივის მტერია. მრავალრიცხოვანი მაგალითები ამის საწინააღმდეგოში გვარწმუნებენ. მკაცრი მეთოდები ამავდროულად უფრო მარტივი და მისაწვდომნი არიან. მკაცრი დამტკიცების ძიებას მივყავართ მარტივი დამტკიცების აღმოჩენისკენ. ეს ძიება ახალი მეთოდების საფუძველს ქმნის, რომელიც ხშირად უფრო ნაყოფიერია, ვიდრე ნაკლებად მკაცრი დამტკიცების დროს გამოყენებული მეთოდები.

დღეს ითვლება, რომ ჩამოთვლილი 23 პრობლემიდან სრულად ამოხსნილია 16. ამოხსნილ პრობლემათა რიცხვში შედის აგრეთვე პრობლემები, რომლებსაც ე.წ. „უარყოფითი ამოხსნა" აქვთ (მე-10, მე-14, 21-ე,...) მაგალითად, მე-10 პრობლემა გულისხმობს ალგორითმის პოვნას და არა ასეთი ალგორითმის არსებობა — არარსებობის ჩვენებას. 21-ე კი გარკვეული სახის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის არსებობა-არარსებობის დამტკიცებას. დარჩენილი 7 დღეისათვის ამოუხსნელი პრობლემიდან ორი (მე-4 და მე-6) კორექტულად ჩამოყალიბებულ მათემატიკურ ამოცანებად არ ითვლება. მე-4 პრობლემა იმდენად ზოგადია, ძნელია იმის გარკვევა, ამოხსნილად ჩავთვალოთ იგი თუ არა. მე-6 პრობლემის სრულყოფილ ამოხსნას ალბათ 21-ე საუკუნეში უნდა ველოდოთ. მე-9, მე-15 და მე-16 პრობლემები კერძო შემთხვევებში არიან ამოხსნილები. ხოლო მე-8 და 12-ე დღემდე ამოუხსნელ ამოცანებად რჩებიან, მათ შორის მე-8, ე.წ. ათასწლეულის პრობლემათა ნუსხაშია.

ჰილბერტის პრობლემები მათემატიკის ყველა დარგს მოიცავს. კერძოდ, მათი გეოგრაფია ასეთია: მათემატიკის საფუძვლები (პრობლემები 1 და 2), ალგებრა (პროლემები 13, 14,17), რიცხვთა თეორია (პრობლემები 7,8,9,10,11,12), გეომეტრია (პრობლემები 3,4,18), ტოპოლოგია (პრობლემა 16), ალგებრული გეომეტრია (პრობლემები 12,13,14,15,16,22), ლის ჯგუფების თეორია (პრობლემები 5,14,18), ნამდვილი და კომპლექსური ანალიზი (პრობლემები 13, 22), დიფერენციალური განტოლებები (პრობლემები 16, 19, 20, 21), მათემატიკური ფიზიკა (პრობლემა 6), ალბათობის თეორია (პრობლემა 6), ვარიაციათა აღრიცხვა (პრობლემა 23). როგორც ვხედავთ, ზოგიერთი პრობლემა მათემატიკის რამდენიმე დარგს ერთდროულად მიეკუთვნება. ეს ბუნებრივიცაა: მათემატიკა ერთიანია და ერთიდაიგივე პრობლემის კვლევა მათემატიკის სხვადასახვა დარგების მეთოდებითაა შესაძლებელი. როგორც ჩანს, პრობლემის დასმის მოტივაციაც სხვადასახვა იყო. მაგალითად წერს, რომ როდესაც მან (რომელმაც ჰილბერტის მე-19 პრობლემა ამოხსნა) ჰილბერტს ჰკითხა, თუ რა ზოგადი მოტივი ამოძრავებდა მას, როდესაც ეს პრობლემა (იგულისხმება მე-19 პრობლემა) დასვა, ჰილბერტმა უპასუხა, რომ ყველა, ბუნებრივად დასმული ამოცანის ამონახსნი ანალიზური უნდა იყოსო. 21-ე პრობლემის კომენტირებისას კი ჰილბერტი ამბობს, რომ პასუხი დასმულ ამოცანაზე დასრულებულს გახდიდა ანალიზურ კოეფიციენტებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიას.

მე-20 საუკუნეში კიდევ ერთხელ იყო მათემატიკური პრობლემების ჩამოყალიბების მცდელობა. ასტერდამში, 1954 წელს მათემატიკოსთა საერთაშორისო კონგრესზე მოხსენებით „მათემატიკური პრობლემები" წარსდგა უნგრული წარმოშობის ამერიკელი მათემატიკოსი ჯონ ფონ ნეიმანი (1903-1957), რომელსაც მათემატიკის გარდა ეკუთვნის გენიალური გამოკვლევები, აგრეთვე, ინფორმატიკასა და ფიზიკაში. მან მოხსენების დროს აღნიშნა, რომ იგი არ ბაძავდა ჰილბერტს და მისი მოხსენების ამგვარი შინაარსი მხოლოდ მათემატიკოსთა საერთაშორისო კავშირის თხოვნით იყო განპირობებული. კონგრესის შრომათა კრებულში მისი მოხსენება არ დაიბეჭდა. როგორც ჩანს ნეიმანმა თავი შეიკავა პრობლემათა მისეული ნუსხა არსებულიყო ჰილბერტის პრობლემათა გვერდით. მე-20 საუკუნის ბოლოს (1998 წ.) მათემატიკოსთა საერთაშორისო კავშირის სახელით რუსმა მათემატიკოსმა ვ.არნოლდმა (1937-2010) მსოფლიოს წამყვან მათემატიკოსებს წერილობით მიმართა ჩამოეყალიბებინათ 21-ე საუკუნის პრობლემები. არნოლდის თხოვნას გამოეხმაურა ამერიკელი მათემატიკოსი ს.სმეილი, რომელმაც ჰილბერტის სტილში (პრობლემები კომენტარებით) ჩამოაყალიბა 18 პრობლემა. პრობლემათა ეს ნუსხა ცნობილია სმეილის პრობლემების სახელწოდებით და ათასწლეულის პრობლემებთან ერთად საპატიო ადგილი უჭირავს.

პირველი და მეორე პრობლემები
ს. ბერშტეინი (1880-1968)

კონტინუუმ-ჰიპოთეზა ჰილბერტის პირველი პრობლემაა სიმრავლეთა თეორიისა და მათემატიკის დაფუძნების სფეროდან. იგი დაკავშირებულია ისეთ ბუნებრივ კითხვებთან როგორებიცაა „რამდენი?", „მეტი თუ ნაკლები?" და ყველა მაღალი კლასის მოსწავლემ შეიძლება მისი არსი გაიგოს.

განვიხილოთ სხვადასხვა ხასიათის ნებისმიერ ობიექტთა ერთობლიობა და ვუწოდოთ მას სიმრავლე. სიმრავლის შემადგენელ ობიექტებს კი ელემენტები. სიმრავლეს ეწოდება სასრული, თუ მასში შემავალ ელემენტთა რაოდენობა სასრულია. წინააღმდეგ შემთხვევაში კი, ეწოდება უსასრულო. თუ სიმრავლეთა შორის ურთიერცალსახა თანადობის დამყარებაა შესაძლებელი, მაშინ ამბობენ, რომ ეს სიმრავლეები ერთმანეთის ექვივალენტურები, ან ტოლი სიმძლავრის არიან. ორი სასრული სიმრავლე ერთმანეთის ექვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ისინი ელემენტთა ერთიდაიგივე რაოდენობისაგან შედგება. ამიტომ, თუ ორი უსასრულო სიმრავლე ერთმანეთის ექვივალენტურია, ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ ისინი ელემენტთა თანაბარი „რაოდენობისაგან" შედგებიან. ექვივალენტურობის ამგვარ განმარტებას უსასრულო სიმრავლეებისათვის საკმაოდ მოულოდნელ შედეგამდე მივყავართ.

განვიხილოთ სასრული სიმრავლის საკუთრივი ქვესიმრავლე (ე.ი. ქვესიმრავლე რომელიც არაცარიელი და არ ემთხვევა მოცემულ სიმრავლეს), მაშინ ელემენტთა რაოდენობა ქვესირავლეში ნაკლები იქნება მოცემული სიმრავლის ელემენტების რაოდენობაზე. ე.ი. ნაწილი ნაკლებია მთელზე. ბუნებრივია დავსვათ კითხვა: აქვს თუ არა იგივე თვისება უსასრულო სიმრავლეს? ან აზრიანი თუ არა ასეთი ტიპის დებულება: ერთი უსასრულო სიმრავლე „ნაკლებია" მეორე უსასრულო სიმრავლეზე? ან შეიძლება გაგვიჩ-

ნდეს მოსაზრება, რომ ყველა უსასრულო სიმრავლე ერთმანეთის ექვივალენტურია.

ნატურალურ რიცხვთა N, მთელ რიცხვთა Z, რაციონალურ რიცხვთა Q და ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეებისათვის სამართლიანი შემდეგი ჩართვები: $N\subset Z\subset Q\subset R$. განვიხილოთ პირველი ჩართვა $N\subset Z$. ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი მთელია და ამიტომ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე „ნაკლებია" მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე, ამასთან, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე არის მთელ რიცხვთა სიმრავლის საკუთრივი ქვესიმრავლე, რადგან ყველა მთელი რიცხვი ნატურალური არ არის. მიუხედავად ამისა, ნატურალურ და მთელ რიცხვთა სიმრავლეები ექვივალენტურები არიან. ურთიერთცალსახა თანადობა მყარდება შემდეგი შესაბამისობით: ყოველ ლუწ ნატურალურ რიცხვს, რომელსაც აქვს სახე $2k$, შევუსაბამოთ მთელი რიცხვი k, ხოლო $2k+1$ სახის კენტ ნატურალურ რიცხვს შევუსაბამოთ $-k$ და ბოლოს, ნატურალურ რიცხვს 1 შევუსაბამოთ მთელი რიცხვი 0. ამრიგად, მთელი რიცხვები ჩვენ შეგვიძლია გადავნომროთ ნატურალური რიცხვებით. სიმრავლეს, რომლის ელემენტების გადანომრვა შესაძლებელია ნატურალური რიცხვებით, თვლადი სიმრავლე ეწოდება. ჩვენ უკვე ვაჩვენეთ, რომ მთელ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია, ოდნავ გართულებული მსჯელობაა საკმარისი რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის თვლადობის დასამტკიცებლად. სიმრავლეთა თეორიის ფუძემდებელმა, გერმანელმა მათემატიკოსმა გეორგ კანტორმა აჩვენა, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე თვლადი არ არის. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ R-ის სიმძლავრე ნატურალურ რიცხვთა სიმძლავრეს აღემატება. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე ამბობენ, რომ იგი კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

ამის შემდეგ შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ჰილბერტის პირველი პრობლემა:

კონტინუუმ-ჰიპოთეზა. ექვივალენტურობამდე სიზუსტით არსებობს მხოლოდ ორი ტიპის უსასრულო სიმრავლე: თვლადი და კონტინუუმი.

ამრიგად, ამოცანა ასე დგას: არსებობს თუ არა შუალედური სიმძლავრის ისეთი T სიმრავლე, რომელიც არც N-ის ექვივალენტურია და არც R-ის, ამასთან $N\subset T\subset R$.

კონტინუუმ-ჰიპოთეზა ჩამოაყალიბა კანტორმა და იგი წლების მანძილზე უშედეგოდ ცდილობდა მის დამტკიცებას. კანტორის თანამედროვეთა შორის ჰილბერტი იმ უმცირესობის წარმომადგენელი აღმოჩნდა, რომელიც მიხვდა სიმრავლეთა თეორიის უდიდეს მნიშვნელობას და ცდილობდა კონტინუუმ-ჰიპოთეზის დამტკიცებას თავის თანამშრომლებთან ერთად პრობლემათა რიცხვში მის შეტანამდე და მომდევნო წლებშიც.

მათემატიკური დებულების დამტკიცება ნიშნავს მის გამოყვანას თეორიაში დაშვებული წესებით აქსიომათა იმ სისტემიდან, რომელიც მოცემულ თეორიას საფუძვლად უდევს. აქსიომების არჩევის დროს არსებობს გარკვეული თავისუფლება, მაგრამ ყველა შემთხვევაში ისინი ბუნებრივად ჩნდებიან სინამდვილის შემეცნებიდან. სიმრავლეთა თეორია, რომლის ნაწილიცაა ზემოთ მოყვანილი მსჯელობები, აქსიომათა კონკრეტულ სისტემას ეყრდნობა. მას ცერმელო-ფრენკელის აქსიომათა სისტემა ეწოდება. კონტინუუმ-ჰიპოთეზის დამტკიცება ნიშნავს მის გამოყვანას აქსიომათა ამ სისტემიდან. მისი უარყოფა კი ნიშნავს იმას, რომ თუ აქსიომათა ამ სისტემას დავუმატებთ კონტინუუმ-ჰიპოთეზას როგორც აქსიომას, მიღებულ თეორიაში იარსებებს ერთმანეთის საწინააღმდეგო დებულებები.

აღმოჩნდა, რომ ჰილბერტის პირველ პრობლემას მოულოდნელი პასუხი აქვს. 1963 წელს ამერიკელმა მათემატიკოსმა და ლოგიკოსმა პაულ კოენმა აჩვენა, რომ ცერმელო-ფრენკელის აქსიომათა სისტემაში კონტინუუმ-ჰიპოთეზას ვერც დაამტკიცებ და ვერც უარყოფ. პოლ კოენს მათემატიკოსთა მე-15 კონგრესზე, მოსკოვში, 1966 წელს ფილდსის პრემია მიანიჭეს.

მითითება ისეთი ტიპის მათემატიკური დებულებების არსებობის შესახებ, რომლებსაც ვერც უარყოფ და ვერც დაამტკიცებ, პირველად ავსტრიული წარმოშობის ამერიკელმა ლოგიკოსმა კურტ გიოდელმა გააკეთა.

მე-19 საუკუნის ბოლოს დ.პიანომ (1858-1932) არითმეტიკა აქსიომებზე დააფუძნა, რითაც არითმეტიკა აქსიომატურ მეცნიერებად იქცა. თეორიის არაწინააღმდეგობრიობის ამოცანა კი, დედეკინდის (1831-1916) თანახმად, ნებისმიერი აქსიომატურ სისტემაზე დაფუძნებული თეორიისათვის ისმება. 1931 წელს გიოდელმა დაამტკიცა, რომ ნებისმიერ აქსიომათა სისტემის სისრულე შეუძლებელია დამტკიცდეს მოცემული აქსიომათა სისტემის ფარგლებში. დამტკიცებისათვის ან უარყოფისათვის საჭიროა დამატებითი აქსიომები. გიოდელის ამ თეორემას უწოდებენ თეორემას არასრულობის შესახებ. იგი იძლევა პასუხს ჰილბერტის მეორე პრობლემაზე.

ჰილბერტის პრობლემათა უმრავლესობას თითქოს დასასრული არ აქვს. მათი სხვადასხვა განზოგადებები ფუნდამენტური მათემატიკური დებულებებია. ამ მხრივ უმნიშვნელოვანესი ამოცანები აღმოჩნდნენ პირველი და მეორე პრობლემები. გიოდელის თეორემა ერთი შეხედვით წმინდა მათემატიკური დებულებაა და შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ იგი ჩვენ „არ გვეხება", მაგრამ ეს მხოლოდ ერთი შეხედვით ჩანს. ინგლისელი მათემატიკოსი და ფიზიკოსი როჯერ პენროუზი (დაიბადა 1931 წელს) ამტკიცებს, რომ გიოდელის თეორემა შესაძლებელია გამოყენებული იქნას ბუნებრივ და ხელოვნურ ინტელექტს შორის საზღვრის გასავლებლად. პენროუზი შემდეგნაირად მსჯელობს: კომპიუტერი მკაცრად შეზღუდულია აქსიომათა სისტემით. საზოგადოდ, მას არ შეუძლია განსაზღვროს დებულობის მცდარობა-ჭეშმარიტება. გიოდელის თეორემის თანახმად კი ასეთი დებულება არსებობს. ადამიანი კი, როდესაც ანალოგიურ პრობლემას გადააწყდება, ყოველდღიური გამოცდილებით მყისიერად იღებს გადაწყვეტილებას. ამიტომ არსებობს შემთხვევები, როდესაც ადამიანი ჭეშმარით გადაწყვეტილებათა მიღების თვალსაზრისით უპირატესობას ფლობს კომპიუტერთან

შედარებით. ადამიანის ტვინს შეუძლია შეიგრძნოს გიოდელის თეორემის მთელი სიღრმე, ხოლო კომპიუტერს კი არა — ასკვნის პენროუზი.

მანქანის და ადამიანის ინტელექტის საზღვრების კვლევა არის სმეილის მე-18 პრობლემა. პენროუზის მსჯელობას სმეილი მხოლოდ ნაწილობრივ ეთანხმება და აღნიშნავს, რომ მათემატიკა როგორც შემეცნების საშუალება გასაფართოებელია. მაგალითად, მას უნდა დაემატოს სწავლება, როგორც მათემატიკური თეორია — ამბობს სმეილი.

მე-7 პრობლემა

რიცხვს ეწოდება ალგებრული, თუ ის არის მთელკოეფიციენტებიანი პოლინომიალური განტოლების ფესვი. ცხადია, რომ რაციონალური რიცხვები ალგებრულია. შებრუნებული დებულება კი სამართლიანი არ არის, არსებობს ალგებრული რიცხვი, მაგალითად $\sqrt{2}$, რომელიც არ არის რაციონალური, მაგრამ არის ალგებრული, რადგან $x^2-2=0$ მთელკოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლების ამონახსნია. დიდი დროის მანძილზე ამოუხსნელი იყო ამოცანა: არსებობს თუ არა არაალგებრული ნამდვილი რიცხვი? ფრანგმა მათემატიკოსმა ჟ.ლიუვილმა (1809-1882) აჩვენა, რომ ასეთი ნამდვილი რიცხვები არსებობენ. მათ ტრანსცენდენტული რიცხვები ეწოდებათ. ტრანსცენდენტული რიცხვის არსებობის ლიუვილის თეორემიდან ვერ გავარკვევთ, არის თუ არა რაიმე რიცხვი ალგებრული, არა და ეს ძალზე მნიშვნელოვანია. მაგალითად, თუ გვეცოდინება, რომ π ტრანსცენდენტულია, მაშინ ადვილად იხსნება სამი ძველი ბერძნული ამოცანიდან (კუბის გაორმაგება, კუთხის ტრისექცია და წრის კვადრატურა) ერთი — წრის კვადრატურის ამოცანა. π-ს ტრანსცენდენტულობა 1882 წელს დაამტკიცა გერმანელმა მათემატიკოსმა კარლ ლინდემანმა (1852-1939).

ჰილბერტის მე-7 პრობლემა ყალიბდება შემდეგნაირად:

ვთქვათ a 1-საგან განსხვავებული დადებითი ალგებრული რიცხვია, b -კი ირაციონალური ალგებრული რიცხვი. ვაჩვენოთ, რომ a^b ტრანსცენდენტული რიცხვია.

ზემოთ მოყვანილი დებულების დამტკიცება (1934 წელი) ეკუთვნის რუს მათემატიკოს ალექსანდრე გელფონდს (1906-1968) და გერმანელ მეცნიერს თეოდორ შნაიდერს (1911-1988).

გელფონდ-შნაიდერის თეორემით ადვილად იხსნება შემდეგი ამოცანა:

ვთქვათ a და b ირაციონალური რიცხვებია. შესაძლებელია თუ არა a^b იყოს რაციონალური? $\sqrt{2}$ ირაციონალური და ალგებრულია, ამიტომ თეორემის თანახმად $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ტრანსცენდენტულია და აქედან ირაციონალურია. ამრიგად, გვაქვს ორი ირაციონალური რიცხვი $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ და $b=\sqrt{2}$. განვიხილოთ $a^b=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}=2$, მივიღეთ რაციონალური რიცხვი.

აქვე შევნიშნოთ, რომ ჩვენ იმაზე მეტი გავაკეთეთ, ვიდრე გვეკითხებოდნენ. ჩვენ არა მარტო ამოცანის პირობების დამაკმაყოფილებელი a და b ირაციონალური რიცხვების არსებობა დავამტკიცეთ, არამედ ცხადად დავწერეთ ისინი. ამაში გელფონდ-შნაიდერის თეორემა მოგვეხმარა, რომლის საშუალებითაც დავასკვენით, რომ $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ირაციონალურია. ამოცანაზე დამაკმაყოფილებელ პასუხს გავცემთ მაშინაც, როდესაც ცნობილი არ არის $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ რაციონალურია თუ არა მართლაც, თუ $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ რაციონალურია, მაშინ ამოცანა ამოხსნილია, თუ ირაციონალურია, მაშინ $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$ რაციონალურია და ამრიგად, არსებობა დამტკიცებულია.

მე-10 პრობლემა

ბერძენი მათემატიკოსი დიოფანტე ცდილობდა ამოეხსნა ამოცანა:

მოცემულია მთელკოეციეციენტებიანი განტოლება. აქვს თუ არა მას ამონახსნი მთელ რიცხვებში.

მაგალითად,

$$x^2+y^2=z^2$$

მთელკოეფიციენტებიან განტოლება შესანიშნავი თვისების მატარებელია. თუ (x_0, y_0, z_0) სამეული ამ განტოლებას აკმაყოფილებს, მაშინ x_0 , y_0 და z_0-ის ტოლი მონაკვეთებისაგან შესაძლებელია ავაგოთ მართი კუთხე. ამ განტოლებას აკმაყოფილებს (3, 4, 5) მთელი რიცხვები. ადვილად აღიწერება აგრეთვე განტოლების ყველა ნატურალური ამონახსნი:

$$x = (m^2 - n^2)\, l,\ (m < n);$$

$$y = 2mnl;$$

$$z = (m^2 + n^2)\, l\ .$$

აგრეთვე x-ის და z-ის ადგილების შეცვლით მიღებული რიცხვები ამოწურავენ განტოლების ყველა ნატურალურ ამონახსნს, სადაც m, n და l ნებისმიერი ნატურალური რიცხვებია.

ზემოთ მოყვანილი განტოლების ბუნებრივი განზოგადებაა

$$x^n + y^n = z^n,\ \ n \in N$$

ფერმას განტოლება. ფერმას დიდი თეორემის თანახმად, ამ განტოლებას, როდესაც $n > 2$ ამონახსნი არ აქვს მთელ რიცხვებში. ბოლო ორი განტოლება, ფორმალურად, ერთმანეთისაგან თითქოს უმნიშვნელოდ განსხვავდებიან, მაგრამ აღმოჩნდა, რომ უკანასკნელი ძალზე რთული ამოცანაა. მაგალითად, განტოლებას

$$x^n + y^n = 2z^n,\ \ n \in N,$$

რომელიც ფერმას განტოლებაზე უფრო რთული ჩანს, ნებისმიერი $n \in N$-სათვის უამრავი ამონახსნი აქვს: $x = y = z = k,\ k \in N$. საუკუნეების მანძილზე ფერმას დიდი თეორემის დამტკიცებას ცდილობდა თავისი დროის თითქმის ყველა დიდი მათემატიკოსი და არა მარტო მათემატიკოსები, არამედ

მოყვარულთა მთელი არმია. ასეთი ენთუზიაზმი შესაძლოა იმ პრემიითაც (ასი ათასი მარკა) იყო განპირობებული, რომელიც, მოგვიანებით, 1907 წელს გერმანელმა მოყვარულმა ვოლფსკელმა დააწესა. ფაქტი ისაა, რომ ფერმას დიდი თეორემა ჰილბერტმა პრობლემათა ნუსხაში არ შეიტანა. რა მოტივით სარგებლობდა ჰილბერტი, დღეს ძნელია ახსნა, როდესაც მან პრობლემა ნომრით 10, ჩამოაყალიბა შემდეგნაირად:

ვიპოვოთ მეთოდი, რომელიც სასრულ ნაბიჯში გაარკვევს, არის თუ არა ამოხსნადი მთელ რიცხვებში დიოფანტური განტოლება.

ჰილბერტი ხმარობს მათემატიკის თვალსაზრისით ბუნდოვან სიტყვას „მეთოდი". ამიტომ პრობლემის მათემატიკურად გამართულ დასმას წლები დასჭირდა. მეოცე საუკუნის 30-იან წლებში სიტყვა მეთოდი „ალგორითმით" შეიცვალა. ინგლისელმა მათემატიკოსმა და ლოგიკოსმა, ალან ტიურინგმა (1912-1954), თავის ერთ-ერთ ნაშრომში, რომელიც ჰილბერტის მე-2 პრობლემის ანალიზს მიუძღვნა, შემოიტანა ალგორითმის მკაცრი განმარტება. ამიტომ თანამედროვე გაგებით ჰილბერტის მე-10 პრობლემა შედგება თვლადი რაოდენობის ქვეამოცანათა ერთობლიობისაგან (ე.ი. მოცემულია კონკრეტული დიოფანტური განტოლება), რომელთაგან თითოეულის ამოხსნა გულისხმობს ვუპასუხოთ კითხვას, არსებობს ალგორითმი თუ არა (იხსნება თუ არა განტოლება მთელ რიცხვებში). ასეთი ტიპის ამოცანის ამოხსნა კი გულისხმობს ისეთი ალგორითმის აგებას, რომელიც ყოველი საწყისი მონაცემებისათვის, რომელიც ინდივიდუალურ ამოცანას განსაზღვრავს, გვაძლევს სასურველ პასუხს. ჰილბერტს ასეთი ალგორითმის არსებობის სჯეროდა. ფერმას განტოლება ინდივიდუალურ განტოლებათა რიცხვში არ შედის, მაგრამ განტოლების გადაწერა შესაძლებელია მისი ექვივალენტური ფორმით იმგვარად, რომ მისი ამოხსნა გამომდინარეობდეს ჰილბერტის მე-10 პრობლემიდან. ეს მხოლოდ მაშინ, თუ ჰილბერტის პრობლემაზე პასუხი დადებითია, ანუ თუ ალგორითმი არსებობს. 1970 წელს რუსმა მათემატიკოსმა ი.მატიასევიჩმა (დაიბადა 1947 წელს) აჩვენა, რომ ასეთი ალგორითმი არ არსებობს, და ამრიგად, ჰილბერტის ოპტიმიზმი არ გამართლდა. ამის შემდეგ, ბუნებრივია, ფერმას დიდი თეორემა მისი შედეგი ველარ იქნებოდა.

21-ე პრობლემა

მსოფლიოში არ არსებობს არც ერთი მეტნაკლებად ცნობილი მათემატიკური სკოლა, რომელსაც მე-20 საუკუნის რაიმე პერიოდში ჰილბერტის რომელიმე პრობლემის ამოხსნისაკენ არ მიემართოს ძალისხმევა. ამ მხრივ გამონაკლისი არც ქართული მათემატიკური სკოლა ყოფილა. ნ. მუსხელიშვილმა და მისმა თანამოაზრეებმა სრულად ამოხსნეს რიმან-ჰილბერტის სასაზღვრო ამოცანა, რომელიც გულისხმობს ისეთ ანალიზურ ფუნქციათა წყვილის აგებას, რომლებიც უწყვეტად გაგრძელებადნი არიან თავიანთი განსაზღვრის არის საზღვრამდე და

ჯოზეფ პლემელი (1873-1967),
სლოვენიელი მათემატიკოსი. ვენის უნივერსიტეტის დამთავრების შემდეგ გადავიდა გეოტინგენის უნივერსიტეტში, სადაც გახდა დ.ჰილბერტისა და ფ.კლაინის მოწაფე და მიმდევარი. ავსტრო-უნგრეთის მონარქიული სახელმწიფოს დაშლის შემდეგ, 1919 საცხოვრებლად გადავიდა სლოვენიაში, სადაც ლიუბლიანის უნივერსიტეტის პროფესორი იყო გარდაცვალებამდე. იგი იყო სერბეთის, ბავარიის და სლოვენიის მეცნიერებათა აკადემიების წევრი.

საზღვარზე აკმაყოფილებენ წინასწარ მოცემულ პირობას. ეს ამოცანა არ შედის ჰილბერტის პრობლემების ნუსხაში, მაგრამ ჰილბერტი, ისევე როგორც რიმანი (1826-1866), რომელმაც პირველმა დასვა ამოცანა (რომელზედაც ქვემოთ გვექნება საუბარი), ზემოთ მოყვანილ სასაზღვრო ამოცანას თვლიდნენ ძირითადი ამოცანის ამოხსნის ერთ-ერთ ყველაზე რეალურ დამხმარე ამოცანად.

მივყვეთ პრობლემის ისტორიას ქრონოლოგიურად, რადგან ეს „დრამატული" ისტორია თითქმის მთელ მე-20 საუკუნეს მოიცავს და მათემატიკური აზრის განვითარების რამდენიმე გარდამტეხ მოვლენას ეხმიანება.

ამრიგად, ჰილბერტის 21-ე პრობლემა გულიხმობს ისეთი მერომორფულ კოეფიციენტებიანი წრფივი განტოლებათა სისტემის აგებას, რომელსაც ექნება წინასწარ მოცემულ წერტილებში პირველი რიგის პოლუსები და წინასწარ მოცემული მონოდრომიის ჯგუფი. ქვემოთ მოყვანილი მსჯელობა არ საჭიროებს ამ პრობლემაში მითითებული მათემატიკური ცნებების ზუსტ ფორმულირებას, მასზე ზერელე წარმოდგენა, ან თუნდაც ტერმინის დამახსოვრებაც კი სრულიად საკმარისია ჩვენი მიზნის მისაღწევად.

ჰილბერტის 21-ე პრობლემაში მითითებული ამოცანა რიმანმა დასვა თავის ერთ-ერთ დაუმთავრებელ ნაშრომში. მან, როგორც აღვნიშნეთ, ამოცანის ამოხსნის ერთ-ერთ გზად მიიჩნია სპეციალური სახის სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნისაგან მონოდრომიული ამოცანის ამონახსნის

აგება. ჰილბერტმა, რიმანის მიერ შემოთავაზებული მეთოდით მართლაც ამოხსნა ამოცანა, მხოლოდ კერძო შემთხვევისათვის. ზოგადი ამოცანა კი შეიტანა თავის პრობლემათა ნუსხაში.

აქვე შევნიშნოთ, რომ ა. პუანკარემ (1854-1912) n-ური რიგის სკალარული განტოლების შემთხვევაში ამოცანის ამომწურავი ანალიზი გააკეთა და მიუთითა გარკვეულ ფენომენზე, რომელიც ამოცანას ახასიათებდა სკალარული განტოლებისათვის.

ჟ. პლემელი გაჰყვა რიმანის და ჰილბერტის შემოთავაზებულ მეთოდს: ჯერ სასაზღვრო ამოცანა ამოხსნა, ხოლო შემდეგ კი მისი საშუალებით ჰილბერტის 21-ე პრობლემა. მაშინდელმა მათემატიკურმა საზოგადოებამ და როგორც ჩანს ჰილბერტმაც, მიიღო პლემელის დამტკიცება და ჰილბერტის 21-ე პრობლემა ამოხსნილად ჩაითვალა (1908 წ.). პლემელის ნაშრომი ორი ნაწილისაგან შედგება: ა) რიმან-ჰილბერტის სასაზღვრო ამოცანა და ბ) რიმან-ჰილბერტის მონოდრომიული ამოცანა. პლემელის შემდეგ ეს ამოცანები მათემატიკის დამოუკიდებელ დარგებად განიხილებოდა და მათი კვლევა ხდებოდა სხვადასხვა დასმით, რადგან ორივე ამოცანამ მრავალმხრივი გამოყენება ჰპოვა. დღეს რიმან-ჰილბერტის ამოცანის მეთოდით ცნობილია კომპლექსური ანალიზის ის მიმართულება, რომელიც მათემატიკური ფიზიკის არაწრფივი განტოლებების, კომპიუტერული ალგებრის დიფერენციალური განტოლებების კვადრატურებში ინტეგრებადობის, თეორიული ფიზიკის ზუსტად ამოხსნადი მოდელების და გაბნების შებრუნებული ამოცანის კვლევის ერთ-ერთი ძირითადი ინსტრუმენტია.

რიმან-ჰილბერტის სასაზღვრო ამოცანის კვლევის სფეროში ქართული მატემატიკური სკოლა ნიკოლოზ მუსხელიშვილის ხელმძღვანელობით მე-20 საუკუნის 40-იანი წლებიდან მოყოლებული ლიდერი სამეცნიერო სკოლა გახდა. მონოდრომიულ ამოცანას კი მრავალი ქვეყნის ელიტარული სამეცნიერო კოლექტივები ამუშავებდენ სხვადასხვა განზოგადებული დასმით. 70-იან წლებში რუსმა და ფრანგმა მათემატიკოსებმა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად შენიშნეს, რომ პლემელისეული მონოდრომიული ამოცანის ამოხსნა გარკვეულ ხარვეზებს შეიცავდა. კერძოდ, ყოველთვის ვერ ხერხდებოდა განტოლებათა სისტემის მიყვანა პირველი რიგის პოლუსების მქონე დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაზე. მიუხედავად ამისა, პლემელის საბოლოო შედეგის მართებულობაში ეჭვი არავის შეუტანია მანამ, სანამ 1990 წელს რუსმა მათემატიკოსმა ანდრეი ბოლიბრუხმა (1950-2013) კონტრმაგალითი არ ააგო. მან აჩვენა, რომ სიბრტყეზე წერტილთა ნებისმიერი კონფიგურაციისათვის არსებობს გადაუგვარებელ მატრიცთა ჯგუფის ქვეჯგუფი, რომელიც არ რეალიზდება როგორც პირველი რიგის პოლუსების მქონე დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის მონოდრომიის ჯგუფი! ამრიგად, ჰილბერტის 21-ე პრობლემას, ისევე როგორც მე-10-ს და მე-14-ს უარყოფითი პასუხი აქვს. პლემელის შეცდომა და როგორც ჩანს მისი შეუმჩნევლობაც, გამოწვეული იყო ამოცანის ამოხსნისადმი არასათანადო, გაუმჭვირვალე მათემატიკური აპარატის გამოყენებით. ა. ბოლიბრუხმა ამოცანის ანალიზი გერმანელი მათემატიკოსის ჰ.რიორლის (დაიბ.1927 წ.) მიდგომით მოახდინა. რაც გულისხმობდა ამოცანის შესწავლას ალგებრული ტოპოლოგიის მეთოდებით. მე-20 საუკუნის 60-იან წლებში ალგებრულმა ტოპოლოგიამ მათემატიკური ანალიზის მრავალ ამოცანაში შეიტანა სიცხადე. ამ პერიოდში დამტკიცდა ატია-ზინგერის ცნობილი თეორემა ინდექსის შესახებ, რომელიც მათემატიკურ დისციპლინათა ერთიანობის კლასიკური ნიმუშია. ვერც რიორლმა და შემდგომ ვერც პიერ დელინმა (დაიბ. 1944 წ.), რომელმაც დიფერენციალური განტოლებების გლობალური თეორია დააფუძნა ალგებრული ტოპოლოგიის მეთოდებით, პლემელის მტკიცებაში უზუსტობა ვერ შენიშნეს, თუმცა მათ მიზნად პირველი რიგის პოლუსების მქონე სისტემის აგების მცდელობა არც ჰქონიათ. ისინი შემოიფარგლნენ განტოლებათა უფრო ფართო კლასით, რომელიც რეგულარულ განტოლებათა სისტემის სახელითაა ცნობილი. სისტემათა ამ კლასისათვის სამართლიანი პლემელის შედეგიც.

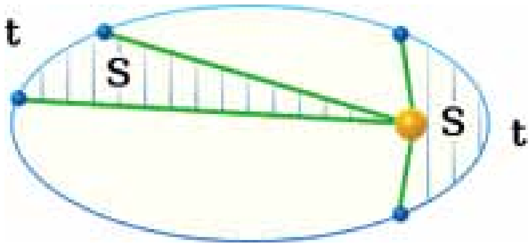
პლემელის ნაშრომზე დაყრდნობით ნ. მუსხელიშვილმა რიმან-ჰილბერტის სასაზღვრო ამოცანისათვის შემოიტანა ე.წ. კერძო ინდექსები და მიუთითა, რომ ამ ინვარიანტის გარეშე, რომელიც პლემელის არ ჰქონდა, ამოცანის ამოხსნა სრულყოფილად ვერ ჩაითვლებოდა. როგორც ჩანს, ნ.მუსხელიშვილმა პლემელის მსჯელობაში ხარვეზები შენიშნა, ეს იგრძნობა მისი ცნობილი მონოგრაფიის „სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების" პირველ გამოცემაში გაკეთებული დელიკატური შენიშვნებიდან, თუმცა ამის შესახებ იგი ცხადად არსად არ აღნიშნავს. ხოლო რაც შეეხება მონოგრაფიის მესამე გამოცემას, აქ იგი საბოლოოდ უარს ამბობს გაჰყვეს პლემელის მსჯელობას ნაწილობრივადაც კი და რიმან-ჰილბერტის სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის პლემელისაგან განსხვავებულ ორიგინალურ გზას გვთავაზობს. მოგვიანებით გაირკვა, რომ კერძო ინდექსებს აქვთ ალგებრულ-ტოპოლოგიური ინტერპრეტაცია და მისი საშუალებით დგინდება ჰილბერტის მონოდრომიული ამოცანის ამოხსნის საკმარისი პირობა. როგორც ა. ბოლიბრუხმა აჩვენა, ჰილბერტის 21-ე პრობლემის ამოხსნადობის საკმარისი პირობაა შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანის კერძო ინდექსების ნულთან ტოლობა.

დღემდე ცნობილი არ არის სად გადის საზღვარი ჰილბერტის 21-ე პრობლემის უარყოფით პასუხსა და მატრიცულ რიმან-ჰილბერტის სასაზღვრო ამოცანის სრულ ანალიზს შორის. ანუ, ცნობილი არ არის, რატომ არ ახდენს გავლენას ჰილბერტის 21-ე პრობლემის უარყოფითი პასუხი რიმან-ჰილბერტის სასაზღვრო ამოცანის მუსხელიშვილისეულ ამოხსნაზე. მანამ, სანამ პასუხი არ გვაქვს კითხვაზე, თეორიაში რაღაც არ გვესმის — ასეთი იყო ჰილბერტის დამოკიდებულება პრობლემების მიმართ.

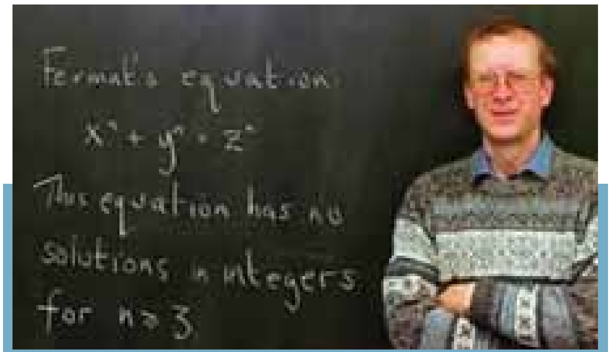
ჩანართები

სინგულარული (განსაკუთრებული) წერტილი

ფუნქციის განსაკუთრებულ (სინგულარულ) წერტილად ითვლება ის წერტილი ფუნქციის განსაზღვის არედან, სადაც ფუნქციის ყოფაქცევა თვისობრივად განსხვავდება „წერტილთა უმრავლესობაში“ ფუნქციის თვისებებისაგან. წერტილთა ამ უმრავლესობას ზოგად წერტილებს უწოდებენ. ამრიგად, განსაკუთრებული წერტილში ფუნქციის ზოგადი თვისება ირღვევა.



მზის სისტემაში შემავალი პლანეტები მოძრაობენ მზის მიზიდულობის ძალის გავლენით. მათთვის სამართლიანია კეპლერის კანონები. კეპლერის პირველი კანონის თანახმად პლანეტები მოძრაობენ ელიფსურ (რომლის ერთ ფოკუსში მზეა მოთავსებული) ტრაექტორიაზე. მზის სისტემის პლანეტებისათვის მზე „განსაკუთრებული წერტილია“ იმ თვალსაზრისით, რომ პლანეტის დინამიკური თვისებები არსებულთან შედარებით განსხვავებულია, როდესაც პლანეტა მზეს მიუახლოვდება.



ენდრიუ უაილსი
დაიბადა 1953 წელს კემბრიჯში, დიდ ბრიტანეთში. მათემატიკური განათლება მიიღო ოქსფორდის უნივერსიტეტში. 1982 წლიდან ცხოვრობს აშშ-ში, ამჟამად არის პრინსტონის უნივერსიტეტის პროფესორი. ფერმას თეორემის დამტკიცებას უაილსი ჯერ კიდევ სკოლაში სწავლისას ცდილობდა ელემენტარული მათემატიკის მეთოდებით. საუნივერსიტეტო განათლების შემდეგ, 1986 წელს იგი კვლავ დაუბრუნდა ფერმას თეორემის დამტკიცების მცდელობას. ამ დროს ცნობილი გახდა ფერმას თეორემის კავშირი ელიფსურ წირებსა და მოდულარულ ფუნქციებთან, რაც უაილსის მტკიცების ძირითადი ინსტრუმენტი გახდა. ენდროუ უაილსი მრავალი სამეცნიერო პრემიის მფლობელია. მათ შორისაა ვოლფის პრემია, აშშ ნაციონალური აკადემიის ჯილდო, მაკარტურის სტიპენდია და სხვა. ენდროუ უაილსი ატარებს სერის ტიტულს.

ფერმას დიდი თეორემა

ფერმას დიდი თეორემის სახელწოდებით ცნობილი თეორემა მოდის ძველი ბერძენი მათემატიკოსის დიოფანტეს (დაახ. მე-3 საუკუნე ჩვენს წელთაღრიცხვამდე) ნაშრომიდან „არითმეტიკა". დიოფანტეს ეს ნაშრომი 13 წიგნისაგან შედგება და ამ ტრაქტატის ერთ-ერთი გვერდის ველზე, ფრანგმა მათემატიკოსმა პიერ ფერმამ (1601-1665) მიაწერა თეორემა: $x^n + y^n = z^n$ დიოფანტურ განტოლებას არ აქვს ამონახსნი მთელ რიცხვებში, როდესაც n>2. ამასთან, იქვე მიუთითა, რომ მის მიერ მოფიქრებული ჭკუამახვილური დამტკიცებისათვის საკმარისი არ იყო გვერდის ველი, რის გამოც ვერ მოიყვანდა თეორემის სრულ დამტკიცებას. ამრიგად, ჩვენამდე მოაღწია დებულებამ დამტკიცების გარეშე, რომელიც დღეს სამეცნიერო ლიტერატურაში ფერმას დიდი, ან ფერმას უკანასკნელი თეორემის სახელით მოიხსენიებენ. თეორემის ჩამოყალიბებიდან თითქმის სამი საუკუნის შემდეგ ინგლისელმა მათემატიკოსმა ენდრიუ უაილსმა დაამტკიცა ეს თეორემა 1994 წელს. თეორემის დამტკიცება 129 საჟურნალო გვერდია.

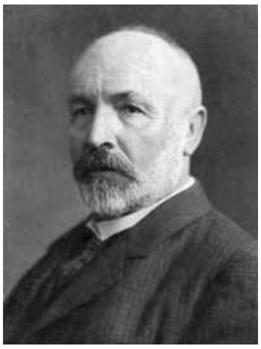
კანტორი — ბურბაკი — გროთენდიკი

კანტორმა აღმოაჩინა მინიმალურ ფუნდამენტურ იდეათა სია, რომლის გამოყენებითაც შესაძლებელია შევქმნათ არაჩვეულებრივად ღრმა მათემატიკა. ეს არის სიმრავლეთა თეორია, რომელზედაც ჰილბერტმა თქვა: „ჩვენ ვერავინ გამოგვაძევებს იმ სამოთხიდან, რომელიც კანტორმა შექმნა". კანტორის აზრის შემდგომი განვითარებაა ბურბაკის სტრუქტურა. ბურბაკი ცდილობდა მათემატიკის ყველა დარგისათვის, რომელიც არ უნდა ყოფილიყო იგი -ალგებრა, გეომეტრია, ალბათობის თეორია თუ ტოპოლოგია, ერთიანი ენა შეექმნა. ბურბაკის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი დამსახურება ისაა, რომ მან ეს მოახერხა. უნივერსალური ენის საფუძველი გახდა სტრუქტურა. *ბურბაკის შემდეგ ნებისმიერი მათემატიკური ობიექტი არის სიმრავლე დამატებითი მონაცემებით, რაც კვლავ სიმრავლურ ენაზე ყალიბდება. მაგალითად, ჯგუფი არის სიმრავლე და კომპოზიციის კანონი და ა.შ.*

არც კანტორი და შემდგომ არც ბურბაკი, გულგრილნი არ იყვნენ ფიზიკის მიმართ. ისინი გრძნობდნენ, რომ მათემატიკის მათეული საფუძ-

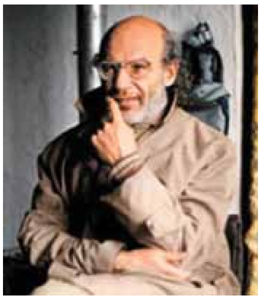
ნიკოლა ბურბაკი

ფრანგ მათემატიკოსთა ჯგუფი, რომელიც ბურბაკის ფსევდონიმით მოღვაწეობდა (1935 წლიდან) და მიზნად ისახავდა მთელი მათემატიკური ცოდნის ერთიანი მათემატიკური ენით გადმოცემას. მათი ამბიციური განზრახვის შედეგია მრავალტომიანი ზოგადმათემატიკური ტრაქტატი. ბურბაკის შესახებ მრავალი ლეგენდა არსებობს. ბურბაკის მანიფესტი შეიცავდა ჯგუფის ქცევის წესებს და მიზნებს. ჯგუფი მე-20 საუკუნის 80-იან წლებში დაიშალა. ამჟამად ბურბაკის სახელს ატარებს გამორჩეული სტილის სემინარი სორბონის უნივერსიტეტში. სემინარზე გაკეთებული მოხსენებები პერიოდულად ქვეყნდება.



გეორგ კანტორი (1845-1918)

გერმანელი მათემატიკოსი, სიმრავლეთა თეორიის ფუძემდებელი. მისი ინიციატივით ჩატარდა მათემატიკოსთა პირველი საერთაშორისო კონგრესი ციურიხში 1897 წელს. გარდაიცვალა ფსიქიკურად დაავადებულთა კლინიკაში. მეცნიერების ისტორიკოსები მიუთითებენ, რომ მისი ფსიქიური აშლილობა მოჰყვა იმ მძიმე დეპრესიებს, რაც გამოწვეული იყო კანტორის შვილის გარდაცვალებით, კონტინუუმ-ჰიპოთეზის დამტკიცების რამდენჯერმე წარუმატებელი მცდელობით, კოლეგების მიერ მისი თეორიის მიუღებლობით და მწვავე, შეურაცხმყოფელი კრიტიკით.



ალექსანდ გროთენდიკი (დ. 1928 წ.)

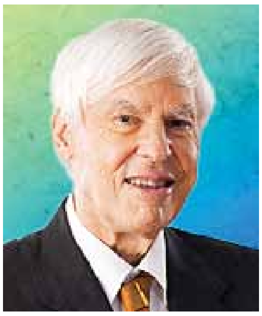
ფრანგი მათემატიკოსი, ფილდსის პრემიის ლაურეატი (1966 წ.). გამორჩეულად ერუდირებული მათემატიკოსი, მაღალი მოქალაქეობრივი გრძნობის და არაორდინალური ქცევის მეცნიერი. საბჭოთა კავშირში ადამიანის უფლებების დარღვევის და მეორე მსოფლიო ომის შემდეგ აღმოსავლეთ ევროპის ქვეყნების მიმართ საბჭოთა საგარეო პოლიტიკის მკაცრი კრიტიკოსი. მან შეგნებულად უარი თქვა მონაწილეობა მიიღო მათემატიკოსთა საერთაშორისო კონგრესის მუშაობაში მოსკოვში, 1966 წელს, სადაც მისთვის ფილდსის ოქროს მედალი უნდა გადაეცათ. კონგრესის მუშაობის პერიოდში იგი გაემგზავრა ვიეტნამში, რომლის წინააღმდეგაც ამერიკის შეერთებული შტატები აგრესიულ ომს აწარმოებდა და ჰანოის უნივერსიტეტის სტუდენტებისათვის წაიკითხა ლექციები ეტალურ კოჰომოლოგიაში. რამდენიმე ათეული წელია გროთენდიკი ჩამოშორდა აქტიურ პედაგოგიურ და სამეცნერო მოღვაწეობას და განმარტოებით ცხოვრობს საფრანგეთის ერთ-ერთ პროვინციულ ქალაქში. მისი უკანასკნელი სამეცნიერო ნაშრომები და ავტობიოგრაფიული ესსე ხელნაწერის სახით გავრცელდა.

კურტ გიოდელი

დაიბადა 1906 წელს ჩეხეთში, ქალაქ ბრნოში, რომელიც იმ დროს ავსტრო-უნგრეთის იმპერიაშის შედიოდა. დაამთავრა ვენის უნივერსიტეტი. 1940 წელს საცხოვრებლად გადავიდა აშშ-ში და მუშაობდა პრინსტონის უნივერსიტეტის პერსპექტიული კვლევების ინსტიტუტში. გარდაიცვალა პრინსტონში 1978 წელს. დაჯილდოვებულია აშშ-ის ეროვნული სამეცნიერო მედლით (19974 წ.) და ალბერტ აინშტაიანის პრიზით (1951 წ.)

ფილდსის ოქროს მედალი და პრემია

უმაღლესი სამეცნიერო ჯილდო მათემატიკაში. მედალი ატარებს კანადელი მათემატიკოსის ჯონ ფილდსის სახელს, რომლის ინიციატივითაც 1924 წელს ტორონტოში მიმდინარე მათემატიკოსთა მე-7 საერთაშორისო კონგრესზე იქნა მიღებული პრემიისა და მედლის დაწესება ახალგაზრდა მათემატიკოსებისათვის (ასაკი არ აღემატება 40 წელს პრემიის გადაცემის მომენტში) მათემატიკაში შეტანილი განსაკუთრებული წვლილის აღიარების ნიშნად. პრემიისა და მედლის გადაცემა ხდება 4 წელიწადში ერთხელ მათემატიკოსთა საერთაშორისო კონგრესზე. პირველი პრემია გაიცა 1935 წელს. პრემირებულ მათემატიკოსთა მაქსიმალური რაოდენობა, პრემიის დებულებით, 1966 წლამდე ორი იყო, ხოლო 1966 წლიდან კი ოთხია. ითვლება, რომ ნობელის პრემიის ექვივალენტი მათემატიკოსებისათვის (ნობელის პრემია მათემატიკაში, ნობელის ანდერძის თანახმად, არ გაიცემა) არის ფილდსის პრემია, თუმცა ფინანსურად იგი 10-ჯერ ნაკლებია ნობელის პრემიაზე. ფინანსური თვალსაზრისით ნობელის პრემიასთან მიახლოებულია (1.2 მილიონი აშშ დოლარი) აბელის პრემია, რომელიც 2006 წლიდან გაიცემა და არ აქვს ასაკობრივი შეზღუდვა. ფილდსის მედალი მზადდება 14-კარატიანი ოქროსაგან, რომლის ერთ მხარეს გამოსახულია არქიმედე. მედლის ამ მხარეს აქვს წარწერა ლათინურად „თრანსირე სუუმ პეცტუს მუნდოქუე პოტირი“ (გადააჭარბე ადამიანურ სისუსტეებს და დაიპყარი სამყარო), ხოლო მეორე მხარეს კი აწერია „*Congregati ex toto orbe mathematici ob scripta insignia tribuere*“ (მთელი სამყაროს აქ შეკრებილი მათემატიკოსები გაჯიდოვებენ გამორჩეული სამეცნიერო ნაშრომებისათვის). მსოფლიოში, პრემიის დაარსებიდან დღემდე, ფილდსის პრემიის ლაურეატია 50 მათემატიკოსი.



სტივენ სმეილი (დაიბადა 1930 წელს)

ამერიკელი მათემატიკოსი, ფილდსის (1966 წ.) და ვოლფის (2007 წ.) პრემიების ლაურეატი, ამერიკის შეერთებული შტატების ნაციონალური სამეცნიერო მედლის (1996 წ.) მფლობელი. კალიფორნიის უნივერსიტეტის პროფესორი 1960-1961 და 1964-2005 წლებში, ამჟამად ემერიტუს-პროფესორი (ბერკლი) და ჰონ კონგის უნივერსიტეტის პროფესორი. დიფერენციალურ ტოპოლოგიაში, დინამიურ სისტემების და გამოთვლების სირთულის თეორიებში სმეილის სახელს ატარებს 20-მდე თეორემა, ცნება და კონსტრუქცია. 21-ე საუკუნის პრობლემები გამოაქვეყნა 1998 წელს. იმ 18 პრობლემიდან, რომელიც სმეილის პრობლემების სახელითაა ცნობილი, 3 შესულია ათასწლეულის პრობლემათა რიცხვში. სმეილი არის აშშ-ის ნაციონალური აკადემიის წევრი.

ვლები ფიზიკას უნდა გამოეყენებინა და ამრიგად მათში უნდა ყოფილიყო რაღაც ფიზიკური. არაცხადად, ასეთი ფიზიკურობა მათში მართლაც არის, რაც მოგვიანებით, 70-იან, 80-იან წლებში გამოჩნდა, როდესაც ფიზიკიდან წამოსული მათემატიკური იდეების და ჰიპოთეზების დაზუსტება დაიწყეს მათემატიკოსებმა კატეგორიათა თეორიის ფარგლებში ჰომოლოგიური ალგებრის აპარატით. ა. გროთენდიკი იყო ის პირველაღმომჩენი, რომელმაც ბურბაკის შემდეგ ერთიანი ენის შექმნის ზოგადმათემატიკური იდეა დააგვირგვინა კატეგორიათა (ტოპოსი) თეორიით.

ათასწლეულის პრობლემები

P და NP კლასების ტოლობა;

ჰოჯის ჰიპოთეზა;

პუანკარეს ჰიპოთეზა;

რიმანის ჰიპოთეზა;

იანგ-მილსის თეორია;

ნავიე-სტოქსის განტოლების ამონახსნის არსებობა და სიგლუვე;

ბიორჩ-სვინერტონ-დაიერის ჰიპოთეზა.

ავტორის ელექტრონული მისამართი
gia.giorgadze@tsu.ge

პირობითი ალბათობის ცნება და მისი გამოყენებები

ომარ ფურთუხია

ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა კანდიდატი, ასოცირებული პროფესორი, მათემატიკის დეპარტამენტის ხელმძღვანელი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ალბათობის თეორიაში, ხდომილების ალბათობის ცნებასთან ერთად, ბუნებრივად შემოდის ე.წ. პირობითი ალბათობის ცნება. მისი შემოღების აუცილებლობა ნაკარნახევია იმ გარემოებით, რომ ხდომილების ალბათობის მნიშვნელობა შესაძლებელია შეიცვალოს, როდესაც ჩვენ ვღებულობთ დამატებითი ინფორმაციას. მაგალითად, ფილტვების კიბოთი დაავადების ალბათობა მწეველებში უფრო მაღალია ვიდრე არამწეველებში. თუ თქვენ დაგავიწყდათ ტელეფონის ორი ციფრი, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აკრეფილი ორი ციფრი შეგაერთებთ სასურველ აბონენტთან არის 1/100, მაშინ როდესაც, თუ თქვენ გაგახსენდათ, რომ ეს ციფრები იყო განსხვავებული, იგივე ხდომილების ალბათობა იქნება უკვე 1/90.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ წესიერი სათამაშო კამათლის ერთხელ გაგორებისას მოვა 3-ის ჯერადი ქულა, თუ ცნობილია, რომ მოვიდა ლუწი ქულა.

ამოხსნა. ამოცანის პირობებში, ყველა შესაძლო შემთხვევათა რაოდენობა არის ლუწი ქულების რაოდენობა 1-დან 6-მდე, ანუ 3, რომლებიც ერთნაირად მოსალოდნელია და აქედან მხოლოდ ერთი (2, 4 და 6-დან 6) არის ხელშემწყობი. შესაბამისად, ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად, საძიებელი ალბათობა იქნება 1/3.

განმარტება. A ხდომილების პირობითი ალბათობა, პირობაში, რომ ადგილი ჰქონდა (მოხდა) B ხდომილება, აღინიშნება სიმბოლოთი $P(A|B)$ და განიმარტება შემდეგნაირად:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\ \text{თუ}\ P(B)>0.$$

შენიშვნა. თუ ალბათობის კლასიკურ განმარტებას $P(A)=N(A)/N(\Omega)$ გადავწერთ შემდეგნაირად $P(A)=N(A\cap\Omega)/N(\Omega)$, მაშინ ბუნებრივი იქნებოდა პირობითი ალბათობის შემდეგი სახით განმარტება $P(A|B)=N(A\cap B)/N(B)$, საიდანაც ადვილად მივიღებთ პირობითი ალბათობის ზემოთმოყვანილ განმარტებას, თუ წილადის მრიცხველსა და მნიშვნელს გავყოფთ $N(\Omega)$-ზე და ვისარგებლებთ ალბათობის კლასიკური განმარტებით:

$$P(A|B)=\frac{N(A\cap B)}{N(B)}=\frac{N(A\cap B)/N(\Omega)}{N(B)/N(\Omega)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

მაგალითი 2. თქვენ იცით, რომ თქვენს ახალ მეზობელს ჰყავს 2 შვილი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მას ჰყავს 2 ქალიშვილი, თუ ცნობილია, რომ მას ჰყავს სულ ცოტა ერთი ქალიშვილი?

ამოხსნა. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეა $\Omega=\{bb, bg, gb, gg\}$, სადაც ბიჭი ($b$) და გოგო ($g$) დალაგებულია დაბადების თარიღის მიხედვით. თუ ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ბიჭისა და გოგოს დაბადება ერთნაირადშესაძლებელია და სხვადასხვა ბავშვის სქესი დამოუკიდებელია, მაშინ თითოეული ელემენტარული ხდომილების ალბათობაა 1/4. საძიებელი პირობითი ალბათობა იქნება

$$P(gg\,|\,bg,gb,gg)=\frac{P(gg)}{P(bg,gb,gg)}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}.$$

მაგალითი 3. თქვენ იცით, რომ თქვენს ახალ მეზობელს ჰყავს 2 შვილი. ერთ დღეს თქვენ დაინახეთ, რომ მეზობელი სეირნობდა თავის გოგონასთან ერთად. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მეზობლის მეორე შვილიც გოგონაა?

ამოხსნა. ერთი შეხედვით ეს მაგალითი მაგალით 2-ის მსგავსია. თქვენმა დაკვირვებამ გამორიცხა 2 ბიჭის შემთხვევა bb და პირობითი ალბათობა, მეორე რომ გოგონაა უნდა იყოს, 1/3-ია. მეორეს მხრივ, ვინაიდან ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ სხვადასხვა ბავშვის სქესი დამოუკიდებელია, ალბათობა უნდა იყოს 1/2.

ავხსნათ რაშია აქ საქმე. პირველი ამოხსნა არასწორია. 1/3 არის ალბათობა იმისა, რომ მეზობელს ჰყავს 2 გოგონა, როცა ცნობილია, რომ მას ჰყავს სულ ცოტა ერთი გოგონა. ხოლო უკანასკნელ შემთხვევაში ჩვენ არ ვფლობთ ანალოგიურ ინფორმაციას. ჩვენ მხოლოდ იმას დავაკვირდით, რომ მეზობელი სეირნობდა კონკრეტულ გოგონასთან. ეს განსხვავება ძალიან მნიშვნელოვანი და არსებითია და მოითხოვს გავაფართოოთ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე, რათა გვქონდეს შესაძლებლობა, აღვწეროთ როგორ ირჩევს მეზობელი, თუ რომელ ბავშვთან ერთად წავა სასეირნოდ. ამ მიზნით, ბავშვს, რომელიც მიდის მშობელთან ერთად სასეირნოდ გავუკეთოთ ზედა ინდექსად ვარსკვლავი. მაშინ ახალი ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება

$$\Omega = \{b^*b,\ bb^*,\ b^*g,\ bg^*,\ g^*b,\ gb^*,\ g^*g,\ gg^*\},$$

სადაც, მაგალითად, b^*g ნიშნავს, რომ უფროსი შვილი ბიჭია, ხოლო უმცროსი — გოგონა და მშობელი სეირნობს ბიჭთან ერთად. თუ მშობელი ბავშვს ირჩევს შემთხვევით, მაშინ ყველა ელემენტარულ ხდომილებას აქვს 1/8-ის ტოლი ალბათობა. ახლა ადვილი დასანახია, რომ 4 ელემენტარული ხდომილების დროს სეირნობს მშობელი გოგონასთან და აქედან ორ შემთხვევაში მეორე ბავშვი აგრეთვე გოგონაა. შესაბამისად, საძიებელი პირობითი ალბათობა არის ისევ 2/4=1/2.

ახლა შევეხოთ პირობითი ალბათობის გამოყენების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ასპექტს. ძირითადი იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ როდესაც ალბათობის გამოთვლა პირდაპირი გზით საკმაოდ ძნელია, მაშინ შესაძლებელია პრობლემის გაყოფა ისეთ კერძო შემთხვევებად, სადაც პირობითი ალბათობები ადვილი გამოსათვლელია. მაგალითად, დავუშვათ, რომ თქვენ ყიდულობთ მეორად ავტომობილს ქალაქში, სადაც ქუჩების დატბორვა თავსხმა წვიმების შემთხვევაში ჩვეულებრივი პრობლემაა. თქვენ იცით, რომ მეორადი ავტომობილების დაახლოებით 5% ადრე დაზიანებული იყო წყალდიდობის გამო და სპეციალისტების შეფასებით ასეთი ავტომობილების 80%-ს მომავალში ექნება ძრავის სერიოზული პრობლემები, ხოლო, თუ მეორადი ავტომობილები ადრე არ იყო დაზიანებული წყალდიდობის გამო, მაშინ ამ ავტომობილების მხოლოდ 10%-ს შეიძლება შეექმნას ანალოგიური პრობლემები. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თქვენ ავტომობილს მოგვიანებით შეექმნება ძრავის პრობლემები?

პირველ რიგში შევხედოთ ამ ამოცანას პროპორციის თვალსაზრისით. ყოველი გაყიდული 1000 ავტომობილიდან 50 არის ადრე წყალდიდობით დაზინებული და მათი 80%-ს, ანუ 40 ავტომობილს მომავალში ექნება ძრავის სერიოზული პრობლემები. 950 ავტომობილი ადრე არ იყო წყალდიდობით დაზიანებული და მათ 10%-ს ანუ 95 ავტომობილს შეიძლება შეექმნას ანალოგიური პრობლემები. შესაბამისად, ჩვენ ვღებულობთ სულ 40 + 95 = 135 ავტომობილს 1000-დან და ალბათობა იმისა, რომ მომავალში ავტომობილს შეექმნება პრობლემები იქნება 135 : 1000 = 0.135.

თუ შემოვიღებთ ხდომილებებს: B = {წყალდიდობით დაზიანებული} და A = {ავტომობილს შეექმნება პრობლემები}, მაშინ ჩვენ ვნახეთ, რომ $P(A) = 0.135$. მეორეს მხრივ, ცხადია, რომ რომ $P(B) = 0.05$, $P(\overline{B}) = 0.95$, $P(A\,|\,B) = 0.8$ და $P(A\,|\,\overline{B}) = 0.1$ და ჩვენს მიერ გამოთვლილი ალბათობა ფაქტიურად არის $0.8\times0.05+0.1\times0.95 = 0.135$. როგორც ვხედავთ, საძიებელი ალბათობა წარმოადგენს ორი განსხვავებული შემთხვევის (წყალდიდობით დაზიანებული და დაუზიანებელი) ალბათობების შეწონილ საშუალოს, სადაც წონები არის ამ შემთხვევების შესაბამისი ალბათობები. ეს მაგალითი ახდენს სრული ალბათობის ძალიან მნიშვნელოვანი ფორმულის გამოყენების ილუსტრირებას, რომელსაც კერძო შემთხვევაში აქვს შემდეგი სახე:

$$P(A) = P(B)P(A\,|\,B) + P(\overline{B})P(A\,|\,\overline{B})\,.$$

მაგალითი 4. სიტყვიდან „სამშობლო“ შემთხვევით ვიღებთ ორ ასოს და შემდეგ შემთხვევით ვდებთ უკან ამ ასოებს ცარიელ ადგილებზე. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ისევ მივიღებთ სიტყვას „სამშობლო“.

ამოხსნა. განვიხილოთ ორი განსხვავებული შემთხვევა: 1) ამოღებულია ორივე „ო“, რომელ შემთხვევაშიც ნებისმიერი დაბრუნებისას მიიღება სიტყვა „სამშობლო“ და 2) ამოღებულია სხვადასხვა ასო, რომელ შემთხვევაშიც სიტყვა „სამშობლო“ მიიღება თუ ასოების დაბრუნება მოხდება მათ საწყის მდებარეობაზე. ცხადია, რომ ეს ორი შემთხვევა გამორიცხავს ერთმანეთს და ამოწურავს ყველა შესაძლებლობებს. შესაბამისად, სრული ალბათობის ფორმულის გამოყენება შესაძლებელია. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ზუსტად აღწერის გარეშე ჩვენ შეგვიძლია განვმარტოთ ხდომილებები:

A = {მიიღება სიტყვა „სამშობლო“} და B ={ორივე ასოა „ო“}.

ცხადია, რომ $P(A|B)=1$. თუ ასოები განსხვავებულია, მაშინ ისინი თავიანთ მდებარეობას დაუბრუნდებიან ალბათობით 1/2, ანუ $P(A|\overline{B})=1/2$. ორი ასოს შერჩევა 8-დან შესაძლებელია $C_8^2=28$ -ნაირად, რომელთა შორის მხოლოდ ერთ (ფორმალურად $C_2^2=1$) შემთხვევაში შეგვხვდება ორი „ო". შესაბამისად, $P(B)=1/28$ და $P(\overline{B})=27/28$ (შედეგი არ შეიცვლება, თუ ასოების ამოღებისა და დაბრუნების რიგს გავითვალისწინებთ: $P(B)=A_2^2/A_8^2=1/28$). ამიტომ, საბოლოოდ გვექნება:

$$P(A)=\frac{1}{28}\times 1+\frac{27}{28}\times\frac{1}{2}=\frac{29}{56}.$$

მჯელობის ეს გზა ხშირად საკმარისია ამოცანის ამოსხსნელად და, იმავდროულად, იგი თავიდან გვაცილებს ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ზუსტად აგების პროცედურას.

ამოცანა „ბედნიერ" ბილეთებზე. 25 საგამოცდო ბილეთიდან 5 „ბედნიერია", ხოლო დანარჩენი 20 — „არა ბედნიერი". რომელ სტუდენტს აქვს „ბედნიერი" ბილეთის აღების მეტი ალბათობა: ვინც პირველი იღებს ბილეთს, თუ ვინც მეორე იღებს ბილეთს?

ამოხსნა. ამ ამოცანის ამოხსნა შესაძლებელია ალბათობის კლასიკური განმარტების გამოყენებით. თუ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეს შემოვიღებთ შემდეგნაირად: $\Omega=\{1, 2 ..., 25\}$ — I სტუდენტისათვის და $\Omega=\{(i, j) : i, j=1, 2 ..., 25; i\neq j\}$ — II სტუდენტისათვის (დაასრულეთ!). ამოვხსნათ ახლა იგი ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ახლებური შემოტანითა და სრული ალბათობის ფორმულის გამოყენებით. შემოვიღოთ შემდეგი ხდომილებები: A იყოს ხდომილება, რომ პირველმა სტუდენტმა აიღო „ბედნიერი" ბილეთი, ხოლო B იყოს ხდომილება, რომ მეორე სტუდენტმა აიღო „ბედნიერი" ბილეთი. მაშინ ცხადია, რომ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება ოთხი ხდომილებისაგან

$$\Omega=\{A\cap B, A\cap\overline{B}, \overline{A}\cap B, \overline{A}\cap\overline{B}\}.$$

ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად $P(A)=5/25=1/25$, ხოლო $P(\overline{A})=20/25=4/5$. მეორეს მხრივ, ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე, თუ ცნობილია, რომ პირველმა სტუდენტმა აიღო „ბედნიერი" ბილეთი, მაშინ ალბათობა იმისა რომ მეორე სტუდენტი აიღებს „ბედნიერ" ბილეთს ისევ შეიძლება გამოვითვალოთ ალბათობის კლასიკური განმარტებით: ამ შემთხვევაში ყველა შესაძლო შედეგთა რაოდენობაა 24, ხოლო ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა კი მხოლოდ 4 (რადგან ერთი „ბედნიერი" ბილეთი უკვე აღებულია) და შესაბამისად, $P(B\,|\,A)=4/24=1/6$.

ანალოგიურად, $P(B|\overline{A})=5/24=5/24$ და ამიტომ სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$P(B)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{24}=\frac{1}{30}+\frac{1}{6}=\frac{1}{5}\ (=P(A)).$$

მაგალითი 5. გაქვთ ორი ყუთი და ათ-ათი ცალი შავი და თეთრი ბურთი. როგორ უნდა გადაანაწილოთ ბურთები ყუთებში ისე, რომ მაქსიმალური იყოს ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ყუთიდან შემთხვევით ამოღებული ბურთი რომ იქნება თეთრი.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A = {ამოღებულია თეთრი ბურთი}, B = {შერჩეულია I ყუთი}. ბურთების გადანაწილების შემდეგ ალბათობას გამოვითვლით სრული ალბათობის ფორმულით: $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$, სადაც $P(B)=P(\overline{B})=1/2$.

განვიხილოთ სამი შესაძლო შემთხვევა:

1) ერთ ყუთში ჩავდოთ ოცივე ბურთი, მაშინ სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად მივიღებთ, რომ:

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{20}+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{4};$$

2) თითოეულ ყუთში განვათავსოთ 10 ბურთი. ერთ ყუთში ჩავდოთ n თეთრი ბურთი ($0\leq n\leq 10$), ხოლო მეორეში კი $10-n$ თეთრი ბურთი. მაშინ სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად:

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{10}+\frac{10-n}{10}\right)=\frac{1}{2};$$

3) ერთ ყუთში ჩავდოთ $10+k$ ($1\leq k\leq 9$) ბურთი, ხოლო მეორეში კი $10-k$ ბურთი. პირველ ყუთში ჩავდოთ $k+n$ ($1\leq k\leq 10$) თეთრი ბურთი, ხოლო მეორეში კი $10-k-n$ თეთრი ბურთი. მაშინ სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$P(A)=\frac{1}{2}\left(\frac{k+n}{10+k}+\frac{10-k-n}{10-k}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{k}{10+k}+1+\frac{n}{10+k}-\frac{n}{10-k}\right)\geq\frac{1}{2}\left(\frac{k}{10+k}+1\right),$$

სადაც უკანასკნელი უტოლობა მიიღება იმ ფაქტიდან, რომ

$$\frac{n}{10+k}-\frac{n}{10-k}\leq 0.$$

თუ ახლა ვისარგებლებთ თანაფარდობით $\max\limits_{1\le k\le 9}\frac{k}{10+k}=\frac{9}{19}$, მაშინ დავინახავთ, რომ აღნიშნულ შემთხვევაში $P(A)$ ალბათობის უდიდესი მნიშვნელობა იქნება

$$\frac{1}{2}\cdot(\frac{9}{19}+1)=\frac{14}{19}\ .$$

ყოველივე ზემოთთქმულიდან გამომდინარე, ვასკვნით, რომ საძიებელი ალბათობა მაქსიმალური იქნება, როცა ერთ ყუთში მოვათავსებთ 19 ბურთს, რომელთა შორის 9 არის თეთრი, ხოლო მეორეში კი შესაბამისად მხოლოდ ერთ თეთრ ბურთს.

შევნიშნოთ, რომ ეს ალბათობა მინიმალური იქნება, როცა ოცივე ბურთს მოვათავსებთ ერთ ყუთში.

ქვემოთ ჩვენ მოვიყვანთ ერთ მარტივ მაგალითს სათამაშო კამათლებზე, რომელშიც, ერთი შეხედვით, თქვენ არ უნდა გქონდეთ უპირატესობა, მაგრამ სინამდვილეში ეს ასეა.

მაგალითი 6. განვიხილოთ სამი სათამაშო კამათელი A, B და C, რომელთა წახნაგებზე შესაბამისად წერია:

$$\text{კამათელი } A : 1, 1, 5, 5, 5, 5$$
$$\text{კამათელი } B : 3, 3, 3, 4, 4, 4$$
$$\text{კამათელი } C : 2, 2, 2, 2, 6, 6$$

თამაში მიმდინარეობს შემდეგნაირად: თქვენ და თქვენი მოწინააღმდეგე დებთ თითო-თითო ლარს და თქვენ თავაზობთ მოწინააღმდეგეს აირჩიოს სათამაშო კამათელი და გააგოროს იგი. შემდგომ თქვენ ირჩევთ ერთ-ერთს დარჩენილი კამათლებიდან და აგორებთ მას. მოგებულია ის, ვისაც მოუვა უფრო მაღალი ქულა. თითქოს თქვენს მოწინააღმდეგეს გააჩნია უპირატესობა, ვინაიდან იგი პირველი ირჩევს კამათელს. მაგრამ, რამდენადაც თქვენთვის ცნობილია მისი არჩევანი, თქვენ ყოველთვის შეგიძლიათ ისე შეარჩიოთ თქვენი მოგების ალბათობა, რომ ის მეტი იყოს 1/2-ზე. ეს აიხსნება შემდეგი გარემოებით: სათამაშო კამათლები ისეთია, რომ A კამათელზე საშუალოდ მეტი ქულა მოდის, ვიდრე B კამათელზე; B კამათელზე საშუალოდ მეტი ქულა მოდის, ვიდრე C კამათელზე და C კამათელზე საშუალოდ მეტი ქულა მოდის, ვიდრე A კამათელზე. მართლაც, თუ აღვნიშნავთ სათამაშო კამათლებზე მოსულ ქულებს, შესაბამისად, იმავე A, B და C ასოებით, მაშინ ცხადია, რომ

$$P\ (A > B) = P\ (A = 5) = 4/6 = 2/3\ ,$$

$$P\ (B > C) = P\ (C = 2) = 4/6 = 2/3\ ,$$

ხოლო მესამე შემთხვევისათვის ვისარგებლოთ სრული ალბათობის ფორმულით:

$$P(C>A)=P(C>A\,|\,A=1)P(A=1)+P(C>A\,|\,A=5)P(A=5)=$$

$$=1\times\frac{2}{6}+P(C=6)\times\frac{4}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{9}.$$

როგორც ვხედავთ, ყველა ეს ალბათობა ნახევარზე მეტია. გასაგებია რა იქნება მეორე გამგორებლის სტრატეგია: ა) თუ პირველი აირჩევს A კამათელს, მაშინ მეორემ უნდა არჩიოს C კამათელი; ბ) თუ პირველი აირჩევს B კამათელს, მაშინ მეორემ უნდა არჩიოს A კამათელი; გ) თუ პირველი აირჩევს C კამათელს, მაშინ მეორემ უნდა არჩიოს B კამათელი. *მართალია, თითქოს თქვენ ძალიან გულუხვი ხართ თქვენი ოპონენტის მიმართ, აძლევთ რა მას უფლებას გააკეთოს პირველი არჩევანი, მაგრამ სწორედ მისი არჩევანის ცოდნა გაძლევთ თქვენ უპირატესობას.*

ზოგჯერ ჩვენ გვჭირდება მრავალჯერადი პირობითობა. მაგალითად, $P(A\,|\,B)$ პირობითი ალბათობის გამოსათვლელად შეიძლება მომავალში საჭირო გახდეს გარკვეული C ხდომილების პირობაში მუშაობა. ვინაიდან პირობითი ალბათობა აგრეთვე ალბათობაა, აქ ახალი არაფერია, მაგრამ შესაბამისი სრული ალბათობის ფორმულა უფრო რთულად გამოიყურება. კერძოდ, ადგილი აქვს თანაფარდობას:

$$P(A\,|\,B)=P(A\,|\,B\cap C)P(C\,|\,B)+P(A\,|\,B\cap\overline{C})P(\overline{C}\,|\,B)\ .$$

სიმპსონის პარადოქსი. ბერკლის უნივერსიტეტის გენდერული ტიპის კვლევებში შენიშნულ იქნა, რომ კაცები უფრო მეტად ხვდებიან დოქტორანტურაში, ვიდრე ქალები. ერთი წლის შემდეგ დოქტორანტურაში მიღებულ იქნა მამაკაცების 45% და ქალების 30%. შემდგომი კვლევებისათვის შეირჩა 6 დიდი უნივერსიტეტი და დოქტორანტურა დაიყო ორ კატეგორიად: „მარტივი“ და „რთული“, იმის მიხედვით, სად უფრო ადვილია და სად უფრო ძნელი დოქტორანტურაში მოხვედრა. აღმოჩნდა, რომ „რთულ“ კატეგორიაში ჩაირიცხა მამამაკაცებისა და ქალების დაახლოებით ერთი და იგივე

— 26–26%. ამიტომ გადახრა კაცების სასარგებლოდ, ცხადია, უნდა ყოფილიყო მეორე ("მარტივ") კატეგორიაში. მაგრამ „მარტივ" კატეგორიაში ჩარიცხულ იქნა ქალების 80 % და კაცების მხოლოდ 62%. შესაბამისად, სადღაც უნდა იყოს შეცდომა. ქვემოთ მოყვანილია დოქტორანტურის კონკურსში მონაწილე (ფრჩხილებში) და ჩარიცხული კაცებისა და ქალების რიცხვი კატეგორიების მიხედვით:

	კაცი	ქალი
„მარტივი"	864 (1385)	106 (133)
„რთული"	334 (1306)	451 (1702)
ჯამი	(2691)	(1835)

განვიხილოთ შემთხვევით შერჩეული კონკურსანტი. A იყოს ხდომილება რომ კონკურსანტი ჩაირიცხება დოქტორანტურაში, ხოლო M და W — შესაბამისად, კონკურსანტი კაცია, თუ ქალია. „რთული" და „მარტივი" კატეგორიები აღვნიშნოთ შესაბამისად D და E-თი. ცნობილია, რომ $P(A|M)$=45/100=0.45 და $P(A|M)$=30/100=0.3. ზემოთმოყვანილი ცხრილიდან ჩანს, რომ:

$$P(A\,|\,M\cap D)=334/1306\approx 0.26 \text{ , ხოლო } P(A\,|\,M\cap E)=864/1385\approx 0.62\,;$$

$$P(A\,|\,W\cap D)=451/1702\approx 0.26 \text{ , ხოლო } P(A\,|\,W\cap E)=106/133\approx 0.80\,.$$

როგორც ვხედავთ,

$$P(A\,|\,M\cap D)=P(A\,|\,W\cap D) \text{ და } P(A\,|\,M\cap E)<P(A\,|\,W\cap E)\,,$$

მაგრამ $P\ (A\ |\ M) > P\ (A\ |\ W)$, ანუ ჩარიცხვის პირობითი ალბათობები ქალებისათვის ორივე კატეგორიაშია იგივეა, ან უფრო მაღალია ვიდრე კაცებისათვის, მაშინ როდესაც კატეგორიების გარეშე ჩარიცხვის პირობითი ალბათობები ქალებისათვის უფრო დაბალია. ნათელია, რომ აქ შეცდომა არ არის, მაგრამ ეს ჯერ კიდევ გამოიყურება პარადოქსალურად. ამ ფაქტის ასახსნელად ვისარგებლოთ სრული ალბათობის ფორმულით პირობითი ალბათობისათვის, რომლის თანახმად:

$$P(A\,|\,W)=P(A\,|\,W\cap D)P(D\,|\,W)+P(A\,|\,W\cap E)P(E\,|\,W)\,,$$

$$P(A\,|\,M)=P(A\,|\,M\cap D)P(D\,|\,M)+P(A\,|\,M\cap E)P(E\,|\,M)$$

და ჩვენ ვხვდებით, რომ „წინააღმდეგობის" საფუძველია პირობითი ალბათობები — $P(D\ |\ W)$, $P(E\ |\ W)$, $P(D\ |\ M)$ და $P(E\ |\ M)$, რომლებიც ასახავენ, თუ როგორ ირჩევენ კაცები და ქალები თავიანთ კატეგორიებს. ალბათობა იმისა, რომ კაცი აირჩევს „რთულ" და „მარტივ" კატეგორიას არის შესაბამისად:

$$P(D\,|\,M)=1306\,/\,2691\approx 0.49 \text{ და } P(E\,|\,M)\approx 0.51\,,$$

ხოლო ქალებისათვის შესაბამისი ალბათობები იქნება:

$$P(D\,|\,W)=1702\,/\,1835\approx 0.93 \text{ და } P(E\,|\,W)\approx 0.07\,.$$

ამგვარად, ქალები თითქმის ყოველთვის ირჩევენ „რთულ" კატეგორიას, მაშინ როდესაც კაცები დაახლოებით ერთნაირად ირჩევენ „რთულ" და „მარტივ" კატეგორიებს და სწორედ ამაში მდგომარეობს პარადოქსის ამოხსნა.

ახლა განვიხილოთ სიტუაცია, როცა ცნობილია პირობითი ალბათობები ერთი მიმართულებით და გამოსათვლელია „შებრუნებული" პირობითი ალბათობები. შესაბამის შედეგს წარმოადგენს ბაიესის ფორმულა, რომელიც მიიღება ნამრავლის ალბათობისა და სრული ალბათობის ფორმულის გამოყენებით და რომელსაც კერძო შემთხვევაში აქვს სახე:

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A\,|\,B)}{P(B)P(A\,|\,B)+P(\overline{B})P(A\,|\,\overline{B})}\,.$$

მაგალითი 7. სიცრუის დეტექტორი (პოლიგრაფი) 95 % შემთხვევაში იძლევა ზუსტ პასუხს. ცნობილია რომ საშუალოდ ყოველი ათასი ადამიანიდან ერთი ცრუობს. განვიხილოთ შემთხვევით შერჩეული ადამიანი, რომელიც გადის ტესტირებას დეტექტორზე და რომელსაც გადაწყვეტილი აქვს იცრუოს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ დეტექტორი აღმოაჩენს, რომ ის ცრუობს?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: L = {ადამიანი ცრუობს}, L_p = {დეტექტორმა დაადგინა, რომ ადამიანი ცრუობს}. პირობის თანახმად $P\ (L)$ = 1/1000 = 0.001 და $P(L_p\,|\,L)=P(\overline{L_p}\,|\,\overline{L})=95/100=0.95$. საძიებელია პირობითი ალბათობა $P\ (L\,|\,L_p)$, რომელიც ბაიესის ფორმულის თანახმად იქნება:

$$P(L \mid L_P) = \frac{P(L)P(L_P \mid L)}{P(L)P(L_P \mid L) + P(\overline{L})P(L_P \mid \overline{L})} = \frac{0.95 \times 0.001}{0.95 \times 0.001 + 0.05 \times 0.999} \approx 0.02 .$$

ამოცანა კეთილ გამომცდელზე I. ვთქვათ, ჩვენ ჩასაბარებელი გვაქვს გამოცდა და შეგვიძლია ავირჩიოთ ნებისმიერი სამი გამომცდელიდან. დავუშვათ, ჩვენთვის ცნობილია, რომ ერთ-ერთი სამი გამომცდელიდან (უცნობია რომელი) — „კეთილია" და ალბათობა იმისა, რომ მასთან ჩააბარო გამოცდა ტოლია 0.4–ის, ხოლო დანარჩენი ორი გამომცდელი „ავია" და მათთან გამოცდის ჩაბარების ალბათობა ტოლია 0.1-ის. ჩვენ შემთხვევით ავირჩიეთ გამომცდელი და წარმატებით ჩავაბარეთ გამოცდა. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ჩვენ ავირჩიეთ „კეთილი" გამომცდელი?

ამოხსნა. შემოვიღოთ შემდეგი ხდომილებები: A — ამორჩეული გამომცდელი „კეთილია" (მაშინ $\overline{A}$ — იქნება ხდომილება, რომ ამორჩეული გამომცდელი „ავია") და B — გამოცდა ჩაბარებულია (შესაბამისად, $\overline{B}$ — გამოცდა არაა ჩაბარებული). ამოცანის პირობებში გვაქვს:

$$P(A) = 1/3 ,\ P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 2/3 ;$$
$$P(B \mid A) = 0.4 ,\ P(\overline{B} \mid A) = 1 - P(B \mid A) = 0.6 ;$$
$$P(B \mid \overline{A}) = 0.1 ,\ P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 1 - P(B \mid \overline{A}) = 0.9 .$$

ცნობილია, რომ მოხდა B ხდომილება და გამოსათვლელია პირობითი ალბათობა $P(A \mid B)$. ვინაიდან, A და $\overline{A}$ ხდომილებები ქმნიან სრულ სისტემას, ბაიესის ფორმულის თანახმად საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A})} = \frac{2}{3} .$$

ამოცანა კეთილ გამომცდელზე II. დავუშვათ, რომ გამომცდელთან, რომელთანაც წარმატებით ჩაიარა გამოცდამ, გამოსაცდელად რიგ-რიგობით მივიდა კიდევ ორი მოსწავლე. ჯერ გამოცდა ვერ ჩააბარა მეორე მოსწავლემ, შემდეგ მივიდა მესამე და მანაც ვერ ჩააბარა გამოცდა. ამ ფაქტის შემდეგ რომელი ჰიპოთეზაა უფრო დასაჯერებელი: ეს გამომცდელი „კეთილია" თუ „ავი"?

ამოხსნა. ავღნიშნოთ $P_i(A)$ (შესაბამისად, $P_i(\overline{A})$) სიმბოლოთი ალბათობა (აპოსტერიორული) იმისა, რომ ეს გამომცდელი „კეთილია" (შესაბამისად, „ავია") მას შემდეგ რაც გამოცდილ იქნა i-ური სტუდენტი, $i = 1, 2, 3$. ჩვენ უკვე დავადგინეთ, რომ $P_1(A) = 2/3$. შესაბამისად,

$$P_1(\overline{A}) = 1 - P_1(A) = 1/3 .$$

მეორე მოსწავლის თვალსაზრისით ეს ალბათობები წარმოადგენენ ორი შესაძლო ჰიპოთეზის აპრიორულ ალბათობებს. ამიტომ, ბაიესის ფორმულის თანახმად, მეორე სტუდენტის ჩაჭრის შემდეგ აპოსტერიორული ალბათობები იქნება:

$$P_2(A) = \frac{P(\overline{B} \mid A)P_1(A)}{P(\overline{B} \mid A)P_1(A) + P(\overline{B} \mid \overline{A})P_1(\overline{A})} = \frac{4}{7} \text{ და } P_2(\overline{A}) = 1 - P_2(A) = \frac{3}{7} .$$

ანალოგიურად, ახლა მიღებული ალბათობები უკვე იქნება აპრიორული ალბათობები მესამე მოსწავლისათვის, და ამიტომ საძიებელი აპოსტერიორული ალბათობები, მას შემდეგ რაც მესამე მოსწავლემ ვერ ჩააბარა გამოცდა, გამოითვლება ისევ ბაიესის ფორმულით:

$$P_3(A) = \frac{P(\overline{B} \mid A)P_2(A)}{P(\overline{B} \mid A)P_2(A) + P(\overline{B} \mid \overline{A})P_2(\overline{A})} = \frac{8}{17} \text{ და } P_3(\overline{A}) = 1 - P_3(A) = \frac{9}{17} > P_3(A) .$$

როგორც ვხედავთ, ექსპერიმენტის (გამოცდის) დაწყების წინ აპრიორული ალბათობა იმისა, რომ არჩეული გამომცდელი „კეთილია", ტოლი იყო 1/3-ის. ექსპერიმენტების შემდეგ ამ ხდომილების აპოსტერიორული ალბათობა გაიზარდა და გახდა 8/17. მიუხედავად ამისა, თუ სამი ექსპერიმენტის შემდეგ მისაღებია გადაწყვეტილება ამ გამომცდელის შესახებ, მაშინ უფრო სარწმუნოა ჩავთვალოთ იგი „ავად" (ვინაიდან, $P_3(\overline{A}) > P_3(A)$).

ალბათობის თეორია ხშირად გამოიყენება სამართალწარმოებაში, განსაკუთრებით, როცა მტკიცებეულებებში ფიგურირებს ადამიანის „დნმ". განვიხილოთ ე. წ. კუნძულის ამოცანა.

კუნძულის ამოცანა. კუნძულზე მოკლეს ადამიანი და მკვლელი უნდა იყოს კუნძულის დარჩენი მცხოვრებიდან ერთერთი. დანაშაულის ადგილის შესწავლისას გაკეთებულმა „დნმ"-ს ანალიზმა აჩვენა, რომ მკვლელს გააჩნია განსაკუთრებული გენოტიპი, რომელიც ცნობილია, რომ მთელ მოსახლეობაში გვხვდება p პროპორციით. ვიგულისხმოთ, რომ კუნძულის მცხოვრებთა გენოტიპები დამოუკიდებელია. გამომძიებელმა დაიწყო კუნძულის მცხოვრებთა გენოტიპების შემოწმება. პირველი, ვინც შეამოწმეს იყო ბატონი ზეზვა და მას აღმოაჩნდა მკვლელის გენოტიპი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ბატონი ზეზვა დამნაშავეა?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილობები: C ={ბატონი ზეზვა დამნაშავეა} და D ={ბატონი ზეზვას გენოტიპი აღმოჩენილია მკვლელობის ადგილზე}. საძიებელია პირობითი ალბათობა $P(C \mid D)$, რომლის გამოსათვლელად უნდა ვისარგებლოთ ბაიესის ფორმულით, სადაც დაგვჭირდება როგორც

$P(C)$-ს, ისე „პირდაპირი" პირობითი ალბათობების ცოდნა. $P(C)$ არის ალბათობა იმისა, რომ ბატონი ზეზვა დამნაშავეა მანამ, სანამ გენოტიპების შემოწმება დაწყებულა, და თუ ჩვენ დავუშვებთ, რომ არანაირი მიზეზი არ არსებობს იმისა, რომ რომელიმე პერსონაში მეტი ეჭვი შევიტანოთ, ვიდრე სხვა რომელიმეში, მაშინ ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ $P(C) = 1/n$. თუ ბატონი ზეზვა დამნაშავეა, მაშინ მისი გენოტიპი აუცილებლად აღმოჩ-ნდება დანაშაულის ადგილზე და შესაბამისად, $P(D|C) = 1$. თუკი ბატონი ზეზვა უდანაშაულოა, მაშინ მისი გენოტიპი ისევ შეიძლება აღმოჩნდეს დანაშაულის ადგილზე იმ ალბათობით, რა პროპორციითაც გვხვდება აღნიშნული გენეტიპი საზოგადოდ ადამიანთა პოპულაციაში, ანუ $P(D|\overline{C}) = p$. შესაბამისად,

$$P(C|D) = \frac{1\times(1/n)}{1\times(1/n) + p\times(1-1/n)} = \frac{1}{1+(n-1)p}.$$

შემდეგი მაგალითი გვიჩვენებს, რომ სხვადასხვა მიდგომამ შეიძლება სხვადასხვა პასუხამდე მიგვიყვანოს.

მაგალითი 8. თქვენ იცით რომ თქვენს ახალ მეზობელს ჰყავს ორი შვილი. ერთ ღამეს თქვენ ფანჯარას ესროლეს ქვა და თქვენ დაინახეთ ბავშვი, რომელმაც თქვენი ბაღიდან შეირბინა მეზობლის სახლში. სიბნელე იყო და თქვენ მხოლოდ ის გაარჩიეთ, რომ ბავშვი ბიჭი იყო. მეორე დღეს თქვენ დარეკეთ მეზობლის კარებზე და კარი გაგიღოთ ბიჭმა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს ბიჭი დამნაშავეა?

ამოხსნა. ამოვხსნათ ეს ამოცანა ორი გზით. პირველი მიდგომა: თუ მეზობლის მეორე შვილი გოგოა, მაშინ თქვენ იცით, რომ დამნაშავე ბიჭია, ხოლო თუ მეზობლის მეორე შვილიც ბიჭია, მაშინ ბიჭი, რომელმაც კარი გაგიღოთ თანაბარი ალბათობებით შეიძლება იყოს დამნაშავეც და უდანაშაულოც. ამიტომ, თუ შემოვიღებთ ხდომილებას C = {ბავშვი, რომელმაც გააღო კარი, დამნაშავეა}, მაშინ, სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად, მივიღებთ, რომ:

$$P(C) = P(\text{ბიჭი})\,P(C|\text{ბიჭი}) + P(\text{გოგო})\,P(C|\text{გოგო}) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 1 = \frac{3}{4}.$$

მეორე მიდგომა: შევნიშნოთ, რომ ეს ამოცანა ანალოგიურია ე. წ. კუნძულის ამოცანის, სადაც გენოტიპი შეცვლილია სქესით, ხოლო ბატონი ზეზვა კი ბავშვით, რომელმაც კარი გააღო. ამ შემთხვევაში ჩვენ გვაქვს: $n = 2$ და $p = 1/2$ და, შესაბამისად,

$$P(C) = \frac{1}{1+(n-1)p} = \frac{1}{1+(2-1)\times(1/2)} = \frac{2}{3}.$$

განსხვავებულმა მიდგომებმა მოგვცა განსხვავებული შედეგები! როგორც წესი, საჭიროა ძალიან დიდი სიფრთხილე პირობაში მდგომი ხდომილებების შერჩევისას. დავუშვათ, რომ ნებისმიერი ბავშვი ერთნაირი ალბათობით წყვეტს გავიდეს თავისი ეზოდან და ქვა ესროლოს თქვენს ფანჯარას და ნებისმიერი ბავშვი ერთნაირი ალბათობით აღებს კარს. ორი ბავშვის სქესის ნებისმიერი კომბინაციისათვის, ჩვენ შეგვიძლია შემთხვევით ისე შევარჩიოთ, ვინ დამნაშავეა და ვინ აღებს კარს, რომ სქესის ნებისმიერი კომბინაცია დაიყოს ოთხ ერთნაირად შესაძლებელ შემთხვევად. ბიჭი და გოგო აღვნიშნოთ შესაბამისად b და g ასოებით, ბავშვი რომელმაც გააღო კარი აღვნიშნოთ ქვედა ინდექსით d, ხოლო ბავშვი რომელიც დამნაშავეა –– ზედა ინდექსით c. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება 16 ერთნაირად-შესაძლებელი ელემენტარული ხდომილებისაგან:

$$\Omega = \{b_d^c b, b_d b^c, b^c b_d, bb_d^c, b_d^c g, b_d g^c, b^c g_d, bg_d^c, g_d^c b, g_d b^c, g^c b_d, gb_d^c, g_d^c g, g_d g^c, g^c g_d, gg_d^c\}$$

და ხდომილება –– ბავშვი, რომელმაც კარი გააღო დამნაშავეა არის:

$$C = \{b_d^c b, bb_d^c, b_d^c g, bg_d^c, g_d^c b, gb_d^c, g_d^c g, gg_d^c\}.$$

რომელი ხდომილება უნდა განვიხილოთ პირობაში? ჩვენ ვიცით ორი რამ: დამნაშავე ბავშვი ბიჭია და ბიჭმა გააღო კარი. ეს ხდომილებებია შესაბამისად:

$$A = \{b_d^c b, b_d b^c, b^c b_d, bb_d^c, b_d^c g, b^c g_d, g_d b^c, gb_d^c\},$$

$$B = \{b_d^c b, b_d b^c, b^c b_d, bb_d^c, b_d^c g, b_d g^c, g^c b_d, gb_d^c\}$$

და პირობაში ჩვენ უნდა განვიხილოთ მათი თანაკვეთა:

$$A\cap B = \{b_d^c b, b_d b^c, b^c b_d, bb_d^c, b_d^c g, gb_d^c\}.$$

ვინაიდან ოთხი ამ 6 ელემენტარული ხდომილებიდან არის C-ში და Ω-ს ყველა ელემენტარული ხდომილება ერთნაირად მოსალოდნელია, ამიტომ:

$$P\,\{\text{ბავშვი, რომელმაც გააღო კარი, დამნაშავეა}\} = P(C|A\cap B) = 2/3,$$

რაც შესაბამისობაშია ე.წ. კუნძულის ამოცანასთან.

გამოდის, რომ პირველი მიდგომა გვაძლევს მცდარ ამოხსნას. ისმის კითხვა –– რატომ? როცა ჩვენ ვითვლიდით ალბათობებს P (ბიჭი) და P (გოგო), ჩვენ არაცხადად ვიხილავდით პირობაში B ხდომილებას, მაგრამ დაგვავიწყდა A პირობა. ალბათობა P (ბიჭი) ჩვენ უნდა გამოგვეთვალა როგორც

$$P\,(\text{მეორე ბავშვი ბიჭია} \mid \mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{2}{3}$$

და არა 1/2. როგორც ვხედავთ, პირობითი ალბათობა იმისა, რომ მეორე ბავშვი ბიჭია უფრო მაღალია ახლა, როცა ჩვენ აგრეთვე ვიცით, რომ დამნაშავე ბავშვი ბიჭია. *პირობის დადგენა საკმაოდ ფაქიზი საკითხია და საჭიროა, რომ პირობა იყოს არსებული ინფორმაციის სრულიად ადექვატური, არც მეტი და არც ნაკლები.* ახლა ჩვენ ჩამოვაყალიბებთ პირველი ამოხსნის კორექტულ ვერსიას –– ყველაფერი უნდა გამოითვალოს $A \cap B$ ხდომილების პირობაში და გვექნება:

$$P(C) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

მაგალითი 9. მოქალაქემ იპოვა სხვისი საკრედიტო ბარათი, რომლის კოდი ოთხციფრიანია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მოქალაქეს ეყოფა ორი მცდელობა კოდის გამოსაცნობად (მეტ შესაძლებლობას ბანკომატი არ იძლევა).

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A_i $(i = 1, 2)$ –– მოქალაქემ პირველად კოდი გამოიცნო i-ური მცდელობისას. მაშინ საძიებელი ხდომილება იქნება $A = A_1 \cup (\overline{A_1} \cap A_2)$. ვინაიდან A_1 და $\overline{A_1}$ ხდომილებები არათავსებადია, მითუმეტეს, არათავსებადი იქნება ხდომილებები A_1 და $\overline{A_1} \cap A_2$. ამიტომ, ხდომილებათა ჯამისა და ნამრავლის ალბათობების ფორმულების თანახმად, გვაქვს:

$$P(A) = P(A_1) + P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2 \mid \overline{A_1}),$$

სადაც

$$P(A_1) = 1/10^4,\ P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - 1/10^4,\ P(A_2 \mid \overline{A_1}) = 1/(10^4 - 1).$$

შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა იქნება

$$P(A) = 1/10^4 + (1 - 1/10^4)\cdot[1/(10^4 - 1)] = 2/10^4.$$

ამოცანა მოთამაშის გაკოტრებაზე. განვიხილოთ ე. წ. „გერბი-საფასურის“ თამაში: თუ მონეტის აგდებისას მოვა მოთამაშის მიერ წინასწარ დასახელებული მონეტის მხარე, მაშინ იგი იგებს 1 ლარს, წინააღმდეგ შემთხვევაში, აგებს 1 ლარს. ვთქვათ, მოთამაშის საწყისი კაპიტალი შეადგენს x ლარს და მისი მიზანია მიიყვანოს ეს თანხა a ლარამდე. თამაში გრძელდება მანამ, სანამ მოთამაშე არ მიიყვანს თავის თანხას წინასწარ განსაზღრულ a ლარამდე, ან იგი არ გაკოტრდება (ანუ წააგებს მის ხელთ არსებულ მთელ x ლარს). როგორია ალბათობა იმისა, რომ მოთამაშე გაკოტრდება?

ამოხსნა. ეს ალბათობა დამოკიდებული იქნება საწყის x კაპიტალზე. აღვნიშნოთ იგი $p\,(x)$ სიმბოლოთი. ცხადია, რომ იგი განმარტებულია ნებისმიერი $0 \le x \le a$ და, ამასთანავე, $P\,(0) = 1$ და $P(a) = 0$. შემოვიღოთ ხდომილებები:

A_1 = {მოთამაშემ მოიგო პირველ ნაბიჯზე},

B ={მოთამაშე, რომელსაც გააჩნია საწყისი კაპიტალი x, გაკოტრდება}.

ამოცანის პირობებში გვაქვს:

$$P(A_1) = P(\overline{A_1}) = 1/2,\ P(B \mid A_1) = p(x+1)\ \text{და}\ P(B \mid \overline{A_1}) = p(x-1)\ (1 \le x \le a-1).$$

ვინაიდან, A_1 და $\overline{A_1}$ ხდომილებათა სრული სისტემაა, ამიტომ სრული ალბათობის ფორმულა $p\,(x)$ ალბათობისათვის გვაძლევს შემდეგ განტოლებას:

$$p(x) = \frac{1}{2}p(x+1) + \frac{1}{2}p(x-1),\ 1 \le x \le a-1.$$

შეიძლება შემოწმდეს, რომ ამ განტოლების ამოხსნას აქვს სახე:

$$p\,(x) = bx + c,$$

სადაც b და c — ნებისმიერი მუდმივებია. ამ კოეფიციენტების მოსაძებნად უნდა ვისარგებლოთ სასაზღვრო პირობებით $P\,(0) = 1$ და $P\,(a) = 0$. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$c = 1 \text{ და } ab + c = 0,$$

საიდანაც, $b = -1/a$ და საბოლოოდ $p(x) = 1 - x/a$, $0 \le x \le a$.

სავარჯიშო. დავუშვათ, რომ შესამოწმებელი ჯგუფის 1% ავადმყოფია, ხოლო დანარჩენი 99% კი ჯანმრთელია. ადამიანების შერჩევა ხდება შემთხვევით და ამიტომ

$$P\text{ (ავადმყოფი)} = 1\% = 0.01 \text{ და } P\text{ (ჯანმრთელი)} = 99\% = 0.99.$$

ვიგულისხმოთ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა ტესტირება უტარდება ადამიანს, რომელსაც არა აქვს ავადმყოფობა, მაშინ 1%-ია ალბათობა იმისა, რომ მივილოთ მცდარი დადებითი შედეგი, ე.ი.

$$P\text{ (დადებითი | ჯანმრთელი)} = 1\% \text{ და } P\text{ (უარყოფითი | ჯანმრთელი)} = 99\%.$$

იმ შემთხვევაში, როცა ტესტირება უტარდება ავადმყოფ ადამიანს, მაშინ 1%-ია ალბათობა იმისა, რომ მივილოთ მცდარი უარყოფითი შედეგი, ე.ი.

$$P\text{ (უარყოფითი | ავადმყოფი)} = 1\% \text{ და } P\text{ (დადებითი | ავადმყოფი)} = 99\%.$$

გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ადამიანი ჯანმრთელია, ხოლო ტესტმა აჩვენა უარყოფითი შედეგი; ბ) ადამიანი ავადმყოფია, ხოლო ტესტმა აჩვენა დადებითი შედეგი; გ) ადამიანი ჯანმრთელია, ხოლო ტესტმა აჩვენა დადებითი შედეგი; დ) ადამიანი ავადმყოფია, ხოლო ტესტმა აჩვენა უარყოფითი შედეგი.

განვიხილოთ რეალური სიტუაცია, რომელიც გვიჩვენებს ერთი შეხედვით მოულოდნელ განსხვავებას $P(A|B)$ და $P(B|A)$ პირობით ალბათობებს შორის: იმისათვის, რომ გამოვავლინოთ სერიოზული ავადმყოფობის მქონე ადამიანები ადრეულ სტადიაზე, ხდება ადამიანების დიდი ჯგუფის ტესტირება. მიუხედავად წინასწარი შემოწმების სარგებლობისა, ამ მიდგომას გააჩნია უარყოფითი მხარე: თუ ადამიანს სინამდვილეში არ გააჩნია ავადმყოფობა და საწყისმა ტესტმა აჩვენა დადებითი შედეგი (დაუდგინა ავადმყოფობა), ის იქნება სტრესულ მდგომარეობაში (რაც თავის მხრივ უარყოფითად მოქმედებს მის ცხოვრებაზე) სანამ უფრო წარმატებული ტესტი არ აჩვენებს, რომ ის ჯანმრთელია. ამ პრობლემის მნიშვნელობა შესაძლებელია კარგად გავიგოთ პირობითი ალბათობების ტერმინებში.

წინა სავარჯიშოს მონაცემებში გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ ტესტი აჩვენებს დადებით შედეგს. სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად:

$$P\text{ (დადებითი)} = P\text{ (ჯანმრთელი) } P\text{ (დადებითი | ჯანმრთელი)} +$$
$$+ P\text{ (ავადმყოფი) } P\text{ (დადებითი | ავადმყოფი)} = 0.99 \cdot 0.1 + 0.01 \cdot 0.99 = 0.0198.$$

სავარჯიშოს პირობებში P (დადებითი | ავადმყოფი) = 99%. გამოვთვალოთ ახლა შებრუნებული პირობითი ალბათობა, რისთვისაც ვისარგებლოთ პირობითი ალბათობის განმარტებითა და ნამრავლის ალბათობის ფორმულებით. მაშინ ზემოთ მიღებული შედეგის თანახმად:

$$P\text{ (ავადმყოფი | დადებითი)} = \frac{P(\text{ავადმყოფი} \cap \text{დადებითი})}{P(\text{დადებითი})} =$$
$$= \frac{P(\text{ავადმყოფი})\, P(\text{დადებითი}|\text{ავადმყოფი})}{1.98\%} = \frac{1\% \cdot 99\%}{1.98\%} = 50\%.$$

როგორც ვხედავთ, პირობითი ალბათობა იმისა რომ ტესტი მოგვცემს დადებით შედეგს, პირობაში, რომ ადამიანი ავადმყოფია, ტოლია 99%-ის, მაშინ, როდესაც პირობითი ალბათობა იმისა რომ ადამიანი ავადმყოფია, პირობაში რომ ტესტმა მოგვცა დადებითი შედეგი არის მხოლოდ 50%. აქ შერჩეული მონაცემების შემთხვევაში უკანასკნელი შედეგი შეიძლება ჩაითვალოს მიუღებელად: *ნახევარი ადამიანების, რომელთა ტესტირებამ აჩვენა დადებითი შედეგი, ფაქტიურად არის ჯანმრთელი.*

მონტი ჰოლის პარადოქსი: წარმოიდგინეთ, რომ თქვენ მონაწილეობთ თამაშში, რომელშიც თქვენ იმყოფებით სამი კარის წინ. წამყვანი, რომლის შესახებაც ცნობილია, რომ ის პატიოსანია, შემთხვევით ათავსებს ერთი კარის უკან ავტომობილს, ხოლო დანარჩენი ორი კარის უკან თითო ველოსიპედს. წამყვანი გეუბნებათ: „თავიდან თქვენ ირჩევთ ერთ კარს, მერე მე გაგიღებთ დარჩენილი ორიდან ერთ კარს, რომლის უკან დგას ველოსიპედი. შემდეგ თქვენ შეგიძლიათ თავიდან გააკეთოთ კარის არჩევანი: ან აირჩიოთ სხვა კარი, ან არ შეცვალოთ პირვანდელი არჩევანი. ამის შემდეგ წამყვანი აღებს თქვენს მიერ საბოლოოდ შერჩეულ კარს და იგებთ იმას, რაც ამ კარის უკანაა". გაიზრდება თუ არა თქვენი შანსი მოიგოთ ავტომობილი, თუ შეცვლით პირვანდელ არჩევანს?

თავიდან ალბათობა იმისა, რომ თქვენ აირჩევთ კარს, რომლის უკან დგას ავტომობილი არის 1/3. მას შემდეგ რაც წამყვანი გააღებს კარს, რომელშიც დგას ველოსიპედი, ადამიანების უმრავლესობა თვლის, რომ ავტომობილის მოგების ალბათობა 1/2-ია, მაგრამ ეს ასე არ არის. წამყვანმა იცის, სად დგას ავტომობილი და ამიტომ არ აღებს იმ კარს, სადაც დგას ავტომობილი.

სწორი პასუხია: დიახ, ავტომობილის მოგების შანსები ორჯერ გაიზრდება, თუ მოთამაშე შეცვლის პირვანდელ არჩევანს. ამის ყველაზე მარტივი ახსნა შემდეგში მდგომარეობს: იმისათვის, რომ მოიგოთ ავტომობილი პირვანდელი არჩევანის შეცვლის გარეშე, თქვენ თავიდანვე უნდა გამოიცნოთ ის კარი რომლის უკან დგას ავტომობილი. ამის ალბათობა 1/3-ია. თუკი თქვენ თავიდან აირჩევთ იმ კარს, რომლის უკანაც დგას ველოსიპედი (ამის ალბათობაა 2/3, რადგანაც არის ორი ველოსიპედი და ერთი ავტომობილი), მაშინ პირვანდელი არჩევანის შეცვლის შემთხვევაში თქვენ ცალსახად მოიგებთ ავტომობილს, რადგანაც დარჩენილი იქნებოდა ავტომობილი და ერთი ველოსიპედი და წამყვანმა გაალო ის კარი, რომლის უკანაც იდგა ველოსიპედი.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A_i — ავტომობილი დგას i-ური კარის უკან (i = 1, 2, 3); C — მოთამაშის პირვანდელი არჩევანია კარი 1; D — წამყვანმა გაალო კარი 3, სადაც აღმოჩნდა ველოსიპედი; B — მოთამაშის პირვანდელი არჩევანია კარი 1, ხოლო წამყვანმა გაალო კარი 3, სადაც აღმოჩნდა ველოსიპედი. ცხადია, რომ $B = C \cap D$.

პირობითი ალბათობის განმარტებიდან გამომდინარე, ცხადია, რომ:

$$P(B \mid A_i) = P(C \cap D \mid A_i) = P(D \mid C \cap A_i) P(C \mid A_i).$$

ამიტომ ბაიესის ფორმულა შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(D \mid C \cap A_i) P(C \mid A_i) P(A_i)}{\sum_{j=1}^{3} P(D \mid C \cap A_j) P(C \mid A_j) P(A_j)}.$$

მოთამაშის პირვანდელი არჩევანი არაა დამოკიდებული, თუ რომელი კარის უკან დგას სინამდვილეში ავტომობილი (მან არ იცის სად დგას ავტომობილი), ანუ C და A_i (i = 1, 2, 3) დამოუკიდებელი ხდომილებებია. შესაბამისად, $P(C \mid A_1) = P(C \mid A_2) = P(C \mid A_2) = P(C)$. ამ ფაქტის გათვალისწინებით, წილადის $P(C)$-ზე შეკვეცის შემდეგ, ბაიესის ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(D \mid C \cap A_i) P(A_i)}{\sum_{j=1}^{3} P(D \mid C \cap A_j) P(A_j)}.$$

თუ მოთამაშემ აირჩია კარი 1, ხოლო ავტომობილი დგას კარი 2-ის უკან, მაშინ წამყვანი ვალდებულია გააღოს (აუცილებლად გააღებს) კარი 3, ანუ $P(D \mid C \cap A_2) = 1$. თუ მოთამაშემ აირჩია კარი 1, ხოლო ავტომობილი დგას კარი 3-ის უკან, მაშინ წამყვანს არ შეუძლია გააღოს (არ გააღებს) კარი 3, ანუ $P(D \mid C \cap A_3) = 0$. თუ მოთამაშემ აირჩია კარი 1და ავტომობილი დგას ამ კარის უკან, მაშინ უნდა ჩავთვალოთ, რომ წამყვანი ვალდებულია შემთხვევით (ანუ თანაბარი ალბათობით) გააღოს ერთ-ერთი 2 და 3 კარიდან, ანუ $P(D \mid C \cap A_1) = 1/2$ (სწორედ ამაში გამოიხატება წამყვანის „პატიოსნება“). გარდა ამისა, ითვლება, რომ ავტომობილი თანაბარი ალბათობით დგას ნებისმიერი კარის უკან, ანუ $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$. უკანასკნელი დაშვების შემდეგ ბაიესის ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(D \mid C \cap A_i)}{\sum_{j=1}^{3} P(D \mid C \cap A_j)}.$$

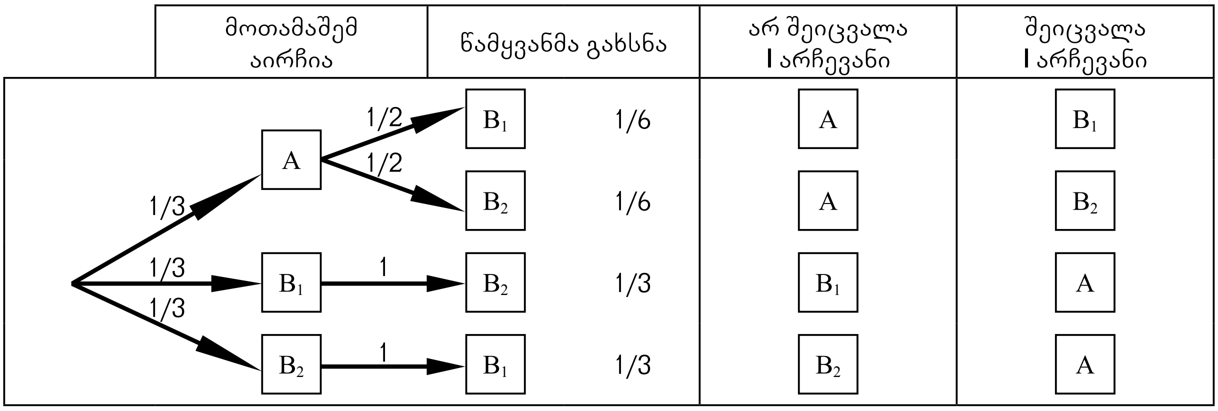
ამიტომ საბოლოოდ გვექნება:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(D \mid C \cap A_1)}{\sum_{j=1}^{3} P(D \mid C \cap A_j)} = \frac{1/2}{1/2 + 1 + 0} = 1/3,$$

$$P(A_2 \mid B) = \frac{P(D \mid C \cap A_2)}{\sum_{j=1}^{3} P(D \mid C \cap A_j)} = \frac{1}{1/2 + 1 + 0} = 2/3,$$

$$P(A_3 \mid B) = \frac{P(D \mid C \cap A_3)}{\sum_{j=1}^{3} P(D \mid C \cap A_j)} = \frac{0}{1/2 + 1 + 0} = 0.$$

იგივე შედეგამდე ჩვენ შეგვიძლია მივიდეთ დენდროგრამების გამოყენებით (ქვემოთ, იხ. სქემა1, სიმბოლოთი A აღნიშნულია ავტომობილი, ხოლო სიმბოლოებით B_1, B_2 კი — შესაბამისად I და II ველოსიპედი):



სქემა 1.

იმ შემთხვევაში, როცა მოთამაშე თავიდან ირჩევს ავტომობილს, პირვანდელი არჩევანის შეცვლა იწვევს ავტომობილის წაგებას, ხოლო თუ თავიდან არჩეულ იქნა ველოსიპედი, მაშინ არჩევანის შეცვლა იწვევს ავტომობილის მოგებას. ჯამური ალბათობა იმისა, რომ პირვანდელი არჩევანის შეცვლა მიგვიყვანს ავტომობილის მოგებამდე ტოლია:

$$\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{2}{3},$$

ხოლო ალბათობა იმისა, რომ პირვანდელი არჩევანის არ შეცვლა მიგვიყვანს ავტომობილის მოგებამდე ტოლია:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

ავტორის ელექტრონული მისამართი:
omar.purtukhia@tsu.ge
o.purtukhia@gmail.com

მარტივი რიცხვები

ქეთევან შავგულიძე

ფიზიკა მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასოცირებული პროფესორი. ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მარტივ რიცხვთა განაწილება

ერთისაგან განსხვავებულ ნატურალურ რიცხვს, რომელსაც მხოლოდ ორი დადებითი გამყოფი აქვს, ერთიანი და თავის თავი, მარტივი რიცხვი ეწოდება.მარტივ რიცხვთა მიმდევრობა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეშისაკმაოდ რთული კანონზომიერებით ხასიათდება.მაგალითად, ნატურალურ რიცხვთა პირველ ასეულში გვაქვს 25 მარტივი რიცხვი: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. ხოლო 1000000-დან 1000100-მდე ასეულში მხოლოდ 6 მარტივი რიცხვია: 1000003, 1000033, 1000037, 1000039, 1000081, 1000099. მარტივ რიცხვთა განსაკუთრებულ მნიშვნელობაზე მიუთითებს ის ფაქტიც, რომ ყოველი ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვი იშლება მარტივ რიცხვთა ნამრავლად (არითმეტიკის ძირითადი თეორემა).

ევკლიდემ ჯერ კიდევ ჩვენს წელთაღრიცხვამდე წინააღმდეგობის დაშვების გზით დაამტკიცა, რომ მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. მოვიყვანოთ ეს დამტკიცება:

დავუშვათ საწინააღმდეგო,ვთქვათ, რომ მარტივ რიცხვთა სიმრავლე სასრულია და ამოვწეროთ ყველა მარტივი რიცხვი: $P_1,P_2, \dots P_n$, მაშინ ამ რიცხვებიდან განსხვავებული ყველა სხვა რიცხვი (გარდა 1-იანისა)შედგენილი იქნება და მაშასადამე, უნდა გაიყოს $P_1, P_2,\dots, P_n$ რიცხვებიდან ერთ-ერთზე მაინც. განვიხილოთ $P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_n+1$ რიცხვი, ეს რიცხვი ყველა მარტივ რიცხვზე მეტია და ამიტომ მარტივი არ არის, ამასთანავე არც შედგენილია, რადგან ვერც ერთ მარტივ P_i რიცხვზე ვერ გაიყოფა (P_i-ზე გაყოფისას ნაშთი ერთია), ე.ი. მივიღეთ წინააღმდეგობა, ანუ დაშვება, რომ მარტივ რიცხვთა სიმრავლე სასრულია, არ ყოფილა სწორი.

თუ განვიხილავთ ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობას 1-დან n-მდე, შევამჩნევთ, რომ n-ის ზრდასთან ერთად მარტივი რიცხვები საშუალოდ უფრო იშვიათად გვხვდება. თუმცა ხშირადგვხვდება მარტივი რიცხვები, რომელთა შორის სხვაობაც 2-ის ტოლია (მაგალითად 5 და 7, 11 და 13, 17 და 19, 29 და 31, ...), მარტივ რიცხვთა ასეთ წყვილებს „ტყუპი მარტივი რიცხვები“ ეწოდება და მათი რაოდენობა სასრულია, თუ უსასრულო ჯერჯერობით დაუდგენელია. ამასთანავე, რიცხვით მწკრივში არსებობს ნებისმიერი სიგრძის მონაკვეთი, რომელთა შორისაც არც ერთი მარტივი რიცხვი არ არის, მაგალითად, $n-1$ რაოდენობის თანმიმდევრობით აღებული ნატურალური რიცხვები: $n!+2; n!+3; \dots ; n!+n$ ნებისმიერი $n \geq 2$-სთვის არის შედგენილი.

ცხრილი იმ მარტივი რიცხვებისა, რომლებიც მოცემულ n რიცხვს არ აღემატება, შემდეგნაირად შეიძლება შევადგინოთ: დავწეროთ თანმიმდევრობით ყველა ნატურალური რიცხვი 2-დან n-მდე, 2-იანი დავტოვოთ და ამოვშალოთ ყოველი მეორე, შემდეგ დავტოვოთ ამოუშლელი შემდეგი რიცხვი 3-იანი და ამოვშალოთ ყოველი მესამე,

შემდეგ დავტოვოთ ამოუშლელი შემდეგი რიცხვი 5-იანი და ამოვშალოთ ყოველი მეხუთედა ა.შ. ვიდრე ყველა შედგენილი რიცხვი არ ამოიშლება. ეს მეთოდი ცნობილია ე.წ. „ერატოსთენეს საცერის“ სახელწოდებით და იძლევა საშუალებას შევადგინოთ მარტივ რიცხვთა ცხრილი ნებისმიერ n რიცხვამდე. სასურველია გავითვალისწინოთ, რომ მას შემდეგ, რაც ამოშლილია მარტივი p რიცხვის ჯერადი რიცხვები, შემდეგი ამოშლა უნდა დავიწყოთ p^2 რიცხვიდან, რომელიც ცხრილშია დარჩენილი, ამასთანავე, მარტივ რიცხვთა ცხრილის შედგენა n-მდე დამთავრებული იქნება, თუ ამოვშლით ჯერადებს, ყველა იმ მარტივი რიცხვისას, რომელიც არ აღემატება $\sqrt{n}$-ს. ასე შედგენილი ცხრილი არის ვრცელი ემპირიული მასალა, რომელზე დაყრდნობითაც შეიძლება გამოითქვას მთელი რიგი უაღრესად სარწმუნო ჰიპოტებები, ასეთი ჰიპოთეზების დამტკიცება კი ხშირად მეტისმეტად რთულდება.

განვიხილოთ მარტივ რიცხვთა განაწილებასთან დაკავშირებული ამოცანები.ვთქვათ, $\pi(x)$-ით აღნიშნულია ყველა იმ მარტივ რიცხვთა რაოდენობა, რომელიც x-ს არ აღემატება. მარტივ რიცხვთა განაწილების კანონზომიერება, ანუ $\pi(x)$ ფუნქციის ცვალებადობა ნატურალურ რიცხვთა სასრულ მონაკვეთზე კარგად ვერ მჟღავნდება, ამიტომ დაისვა ამოცანა ცნობილ ფუნქციათა კლასში ვიპოვოთ ისეთი, რომელიც წარმოადგენს $\pi(x)$ ფუნქციის ყველაზე უკეთეს მიახლოებას (სათანადო აზრით). ლეჟანდრმა (1808 წელს), პირველმა მიიღო ემპირიული ფორმულა $\pi(x)$ ფუნქციის მიახლოებით წარმოდგენისათვის. სახელდობრ, მან დაუშვა, რომ x-ის დიდი მნიშვნელობებისათვის $\pi(x)$ დაახლოებით უდრის $\frac{x}{\ln x - B}$ ფუნქციას, სადაც B მუდმივია. ლეჟანდრისაგან დამოუკიდებლად, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში მარტივ რიცხვთა რაოდენობის უშუალო დათვლის შედეგად, გერმანელი მათემატიკოსი კარლ ფრიდრიხ გაუსი იმ დასკვნამდე მივიდა, რომ $\frac{\pi(x)}{x}$ ფარდობა მიახლოებით უდრის $\frac{1}{\ln x}$ და რომ ამ მიახლოების საზუსტე, x-ის ზრდასთან ერთად უკეთესდება. ამგვარ ემპირიულ ჭეშმარიტებაზე დაყრდნობით გაუსმა გამოთქვა მოსაზრება, რომ $\frac{\pi(x)}{x}$ ფარდობა „ასიმპტოტურად ტოლია“ $\frac{1}{\ln x}$ ფარდობის, ანუ

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi(x)}{x}\right):\left(\frac{1}{\ln x}\right)=1, \text{ ანუ } \lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}=1, \pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}$$

(ამ ტოლობით გამოთქმულ დებულებას ეწოდება მარტივ რიცხვთა განაწილების კანონი), მანვე ივარაუდა, რომ $\pi(x)$ ფუნქციას უფრო „ზუსტად“ უახლოვდება ფუნქცია

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \mathrm{li}\,x - C,$$

ვიდრე ფუნქცია $\frac{x}{\ln x}$, სადაც

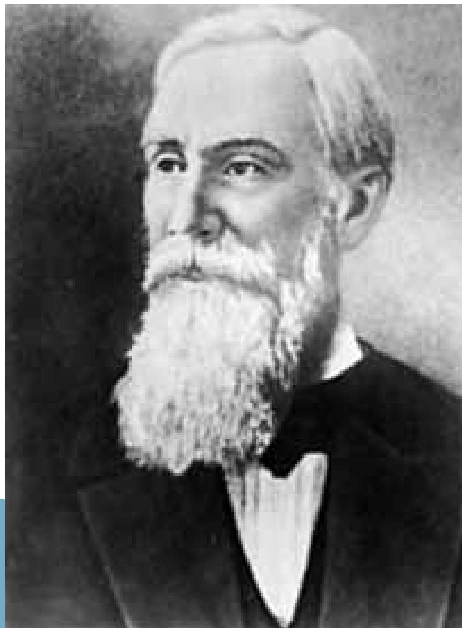
$$\mathrm{li}\,x = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dt}{\ln t}+\int_{1+\varepsilon}^{x}\frac{dt}{\ln t}\right), C=\mathrm{li}\,2=1{,}04\dots.$$

თითქმის ასი წლის განმავლობაში (1896 წლამდე) ამ ტოლობის დამტკიცება წარმოადგენდა მათემატიკის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს და ძნელ პრობლემას.

ზუსტი შედეგები ამ მიმართულებით პირველად მიიღო ჩებიშევმა 1851-52 წლებში. მან დაამტკიცა, რომ:

1) თუ $\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$ შეფარდებას აქვს ზღვარი, როცა $x\to\infty$, მაშინ ეს ზღვარი უდრის 1-ს;

2) შეფარდება $\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$, საკმაოდ დიდი x-ისათვის, შემოსაზღვრულია ორი დადებითი მუდმივით, $c_1 < \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} < c_2$ სადაც c_1 = 0,92129, c_1 =1,0555..., მაგრამ ზღვრის არსებობის დამტკიცება ფუნქციათა თეორიის მეთოდების გარეშე დიდი ხნის მანძილზე არ ხერხდებოდა და მხ-



პ. ჩებიშევი

ოლოდ 1896 წელს ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად ადამარმა (J. Hadamard) პარიზში და ვალე-პუსენმა (Ch. La ValleePoussin) ლუვენში შეძლეს ამ თეორემის დამტკიცება. კერძოდ, ვალე-პუსენმა დაამტკიცა კიდევ უფრო ზუსტი თანაფარდობა, რომ

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + R(x),$$

სადაც

$$\left|R(x)\right| < c_1 x e^{-c_2\sqrt{\ln x}},$$

ე.ი. ცდომილება ნაკლებია ვიდრე $\frac{x}{(\ln x)^A}$, A-ს ნებისმიერი რა გინდ დიდი მუდმივი მნიშვნელობისათვის.

მოგვიანებით, 1948 წელს ელემენტარული მეთოდებით, კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის მეთოდების გარეშე, ეს შედეგები მიღებულ იქნა სელბერგისა (Selberg) და ერდოშის (Erdős) მიერ.

სხვადასხვა მეთოდების გამოყენებით ხდებოდა და კვლავაც ხდება ვალე-პუსენის შეფასებაში ცდომილება $R(x)$-ის კიდევ უფრო გაუმჯობესება, კერძოდ შეფასების მაღალი სიზუსტე იქნა მიღწეული ვეილის მეთოდით ლიტლვუდის (Littlewood) მიერ (1921 წ.), ხოლო უფრო ძლიერი ტრიგონომეტრიულ მწკრივთა მეთოდით ვინოგრადოვის მიერ (1935 წ.).

მარტივი რიცხვის ფორმულა და თვისებები

ეძებდნენ რა ფორმულებს, რომლებიც მოგვცემდნენ მხოლოდ მარტივ რიცხვებს, ეილერმა დაწერა რამდენიმე მთელკოეფიციენტებიანი პოლინომი, რომლებიც x-ის საწყისი მთელი მნიშვნელობისათვის გვაძლევდნენ მარტივ რიცხვებს, მაგალითად:

$x^2 + x + 17$; $x = 0,1,2,\ldots 16$-სთვის მარტივია,
ხოლო $x = 17$-სთვის უკვე შედგენილია,

$2x^2 + 29$; $x = 0,1,2,\ldots 28$-სთვის მარტივია,
ხოლო $x = 29$-სთვის შედგენილია,

$x^2 + x + 41$; $x = 0,1,2,\ldots 40$-სთვის მარტივია,
ხოლო $x = 41$-სთვის შედგენილია,

ჟ. ადამარი

$x^2 - 79x + 1601$; $x = 0,1,2,\ldots 79$-სთვის მარტივია,
ხოლო $x = 80$-სთვისშედგენილია

და მანვე დაამტკიცა შემდეგი

თეორემა 1. არ არსებობს მთელკოეფიციენტებიანი პოლინომი

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

რომელიც x-ის ყველა მთელი მნიშვნელობებისათვის გვაძლევს მხოლოდ მარტივ რიცხვებს.

დამტკიცება. ვთქვათ, $x = x_0$-სათვის მიიღება მარტივი რიცხვი, ანუ $f(x_0) = p$, სადაც p მარტივი რიცხვია. ადვილი საჩვენებელია, რომ $f(x_0+py)$-ის მნიშვნელობა ნებისმიერი y-ისათვის იყოფა p-ზე, რადგან $f(x_0+py) = f(x_0)+pg(y) = p+pg(y) = p(1+g(y))$, სადაც $g(y)$ მთელკოეფიციენტებიანი პოლინომია y-ის მიმართ და $1+g(y)$ არის 1-საგან განსხვავებული მამრავლი.

მოვიყვანოთ რამდენიმე თეორემა მარტივი რიცხვების შესახებ, რომელიც რიცხვის მარტივობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა. მაგრამ, სამწუხაროდ, ამ თეორემებს პრაქტიკული ღირებულება მარტივ რიცხვთა აგების თვალსაზრისით არ გააჩნია:

თეორემა 2. n მარტივია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ

$$\sum_{m\geq 1}\left(\left[\frac{n}{m}\right]-\left[\frac{n-1}{m}\right]\right)=2.$$

აქ და შემდეგში აღნიშნავს მთელ ნაწილს.

დამტკიცება.მართლაც, შესაკრები არის 1-ის ტოლი, თუ m ყოფს n-ს, და არის ნული სხვა შემთხვევაში, ე.ი. მოცემული ჯამი არის $\tau(n)$, ანუ n-ის გამყოფთა რაოდენობა და ტოლობა $\tau(n)=2$ ახასიათებს მხოლოდ მარტივ რიცხვს.

თეორემა 3. ვილსონის თეორემა ([1] გვ. 62), რომელიც დაამტკიცა ვარინგმა 1770 წელს: ნატურალური $n > 1$ რიცხვი მარტივია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$(n-1)! + 1$ იყოფა n-ზე (ანუ $(n-1)! + 1 \equiv 0\ (mod\ n)$).

ვილსონის თეორემის საფუძველზე კლემენტის მიერ დამტკიცებული იქნა ([2, გვ. 30])

თეორემა 4. რიცხვები n და $n+2$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის ტყუპი მარტივი რიცხვები, როცა

$$4(\,(n-1)! + 1) + n \equiv 0\ (mod\ n(n+1)\,)$$

(ანუ $4(\,(n-1)! + 1) + n$ იყოფა $n(n+1)$-ზე).

თეორემა 5. იმისათვის რომ n იყოს მარტივი, აუცილებელი დასაკმარისია C_n^k იყოფოდეს n-ზე, ნებისმიერი $k = 1,2,\ldots\ (n-1)$-სთვის, სადაც C_n^k არის ჯუფთებათა რაოდენობა n ელემენტიდან k ელემენტად.

დამტკიცება. აუცილებლობა, ვთქვათ $n=p$ მარტივი რიცხვია, მაშინ ცხადია p ყოფს $C_p^k=\dfrac{p!}{(p-k)!k!}$ მთელ რიცხვს.

საკმარისობა. ვთქვათ, n ყოფს C_n^k-ს, ნებისმიერი $k = 1,2,\ldots\ (n-1)$-სთვის, ვაჩვენოთ, რომ n მარტივია. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ n შედგენილია, ანუ $n = qn_1$, სადაც q არის n-ის უმცირესი მარტივი გამყოფი, ვაჩვენოთ, რომ n ვერ გაყოფს C_n^q-ს, მართლაც, $C_n^q=\dfrac{n!}{q!(n-q)!}=\dfrac{(qn_1)!}{q!(qn_1-q)!}=\dfrac{(qn_1)!}{q!(q(n_1-1))!}$, აქ მრიცხველში მარტივი q რიცხვი გვხვდება თანამამრავლად n_1-ჯერ, მნიშვნელში: $q!$-ში — ერთხელ, $(q(n_1-1))!$-ში — (n_1-1)-ჯერ, ე.ი. მნიშვნელშიც მარტივი q რიცხვი გვხვდება თანამამრავლად ზუსტად n_1-ჯერ, ანუ C_n^q არ იყოფა q-ზე, შესაბამისად არც n-ზე. ჩვენი დაშვება, რომ n შედგენილია არ ყოფილა სწორი.

თეორემა 6. (ეილერის კრიტერიუმი) ყოველი კენტი რიცხვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის მარტივი, როცა ის ერთადერთი გზით წარმოიდგინება კვადრატების სხვაობად.

დამტკიცება. ვთქვათ, $n=p$ კენტი მარტივი რიცხვია, მაშინ წარმოდგენიდან $n=p=x^2-y^2=(x-y)(x+y)$, გამომდინარეობს, რომ $x-y=1$ და $x+y=n=p$ საიდანაც, $x=\dfrac{p+1}{2}$ და $y=\dfrac{p-1}{2}$, ამგვარად, $p=\left(\dfrac{p+1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2$.

ვთქვათ, ახლა $n = ab\ (1 < a < n,\ 1 < b < n)$ კენტი შედგენილი რიცხვია, მაშინ $n=ab=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$ და აგრეთვე $n=\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{n-1}{2}\right)^2$, გვაქვს ორი მაინც განსხვავებული წარმოდგენა.

თეორემა 7. ყოველი $4n+1$ სახის კენტი რიცხვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის მარტივი, როცა ის ერთადერთი სახით იშლება ორი (ურთიერთმარტივი) კვადრატის ჯამად. არც ერთი $4n+3$ სახის მარტივი რიცხვი არ იშლება ორი კვადრატის ჯამად. ეს თეორემა პრიველად ჩამოაყალიბა ფერმამ და დაამტკიცა ეილერმა ([2, გვ. 37]).

თეორემა 8. თუ არსებობს ისეთი რიცხვი, თანამარტივი n-თან, რომ $a^{(n-1)} \equiv 1(mod\ n)$, მაგრამ $a^{\frac{n-1}{p}} \not\equiv 1(mod\ n)$, $n-1$-ის ყოველი p მარტივი გამყოფისათვის, მაშინ n მარტივია ([2, გვ. 32]).

მათემატიკოსებმა მინაკმა (Minac) და ვილანსმა (Willans) მიიღეს n-ური მარტივი რიცხვის p_n-ის ფორმულა ([3, გვ. 25]), რომელიც უფრო თეორიულადაა საინტერესო, ვიდრე პრაქტიკული გამოყენებისთვის და მას აქვს სახე:

ვალე პუსენი

ი. ბერტრანი

$$p_n = 2 + \sum_{m=2}^{2^n} \left[\left[\frac{n}{1+\sum_{j=2}^{m}\left[\frac{(j-1)!+1}{j} - \left[\frac{(j-1)!}{j}\right]\right]} \right]^{\frac{1}{n}} \right].$$

ვილსონის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $\left[\frac{(j-1)!+1}{j} - \left[\frac{(j-1)!}{j}\right]\right] = \begin{cases} 1, \text{ თუ } j \text{ მარტივია} \\ 0, \text{ თუ } j \text{ შედგენილია} \end{cases}$

ე.ი. $\sum_{j=2}^{m}\left[\frac{(j-1)!+1}{j} - \left[\frac{(j-1)!}{j}\right]\right] = \pi(m)$, ახლა საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$p_n = 2 + \sum_{m=2}^{2^n} \left[\left[\frac{n}{1+\pi(m)} \right]^{\frac{1}{n}} \right],$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\left[\left[\frac{n}{1+\pi(m)} \right]^{\frac{1}{n}} \right] = \begin{cases} 1 \text{ ,თუ } \pi(m) \le n-1 \\ 0, \text{ სხვა შემთხვევაში.} \end{cases}$$

როცა m იცვლება 2-დან 2^n-მდე, მაშინ უტოლობა $\pi(m) \le n-1$ სრულდება $m = 2,3,4,\dots p_n-1$-სთვის, ე.ი. სულ არის p_{n-2} ერთიანი, ანუ

$$2 + \sum_{m=2}^{2^n} \left[\left[\frac{n}{1+\pi(m)} \right]^{\frac{1}{n}} \right] = 2 + p_n - 2 = p_n.$$

დღეისათვის ყველაზე დიდი მარტივი რიცხვი, რომელიც ცნობილია (დაადგინეს ლოს- ანჯელესის კალიფორნიის უნივერსიტეტში 2013 წლის თებერვალში) არის მერსენის $M_{57885161} = 2^{57885161} - 1$ რიცხვი, რომელიც შეიცავს 17 425 170 ციფრს.

1845 წელს ფრანგმა მათემატიკოსმა ბერტრანმა (Bertrand) ერთი მნიშვნელოვანი თეორემის დამტკიცებისას გამოიყენა შემდეგი, რომ ნებისმიერი მთელი n>1-სთვის n-სა და $2n$-ს შორის ყოველთვის არსებობს ერთი მაინც მარტივი რიცხვი. მარტივ რიცხვთა ეს თვისება, რომელიც ლიტერატურაში მოიხსენება, როგორც ბერტრანის პოსტულატი, 1852 წელს საკმაოდ გონებამახვილური და ელემენტარული გზით დაამტკიცა ჩებიშევმა.

ბროიშმა (Breusch) დაამტკიცა, რომ x≥48-სთვის x-სა და $\frac{9x}{8}$-ს შორის ყოველთვის არსებობს მარტივი რიცხვი. ინგამმა (Ingham) დაამტკიცა, რომ საკმაოდ დიდი x-სთვის x^3-სა და $(x+1)^3$-ს შორის არის ერთი მაინც მარტივი რიცხვი, სამართლიანია თუ არა ეს თვისება x^2-ის და $(x+1)^2$-სთვის ჯერჯერობით დადგენილი არ არის. ცხრილის მიხედვით თუ ვიმსჯელებთ, ამ კითხვაზე ალბათ დადებითი პასუხი უნდა იყოს, მაგრამ დამტკიცების არ არსებობის გამო საკითხი ღიად რჩება. ამ შენიშვნასთან დაკავშირებით მოვიყვანთ ერთ საინტერესო ფაქტს: ფერმას პრობლემაზე მუშაობისას ($x^n + y^n = z^n$ განტოლების მთელი ამონახსნების არსებობის საკითხი, როცა $n > 2$), ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანაა $(2^{p-1}-1)$-ის p^2-ზე გაყოფადობა, როცა p მარტივი რიცხვია. ცნობილმა მათემატიკოსმა გრავემ (Grawe) 1913 წელს, შეამოწმა რა ეს თვისება ყველა მარტივი რიცხვისთვის 1-დან 1000-მდე, გამოთქვა მოსაზრება, რომ რიცხვი $(2^{p-1}-1)$, მარტივი p-სთვის არასდროს არ იყოფა p^2-ზე. სულ მალე აღმოჩნდა, რომ p = 1093-სთვის $2^{1092}-1$ იყოფა 1093^2-ზე. ამრიგად ემპირიულად მიღებული დასკვნები, ზოგჯერ შეიძლება მცდარი აღმოჩნდეს.

იშიკავას (Ishikawa) მიერ დადგენილია ([2, გვ. 72-74]), რომ

ა) $\pi(xy) > \pi(x) + \pi(y)$, ყოველი $y \ge 2$, $x \ge 6$, $x \ge y$.

ბ) $p_n + p_{n+1} > p_{n+2}$,

გ) $p_n p_m > p_{n+m}$,

დ) $p_{n+1} < \left(\prod_{k=1}^{n} p_k\right)^{\frac{2}{n}}$,

სადაც p_n არის მე-n-ე მარტივი რიცხვი.

არითმეტიკული პროგრესია და მარტივი რიცხვები

ყოველი 3-ზე მეტი მარტივი რიცხვი 6-ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევს 1-ს ან 5-ს (წინააღმდეგ შემთხვევაში, თუ ნაშთი იქნებოდა 2, 3 ან 4, მაშინ ეს რიცხვი გაიყოფოდა 2-ზე ან 3-ზე), ე. ი. 3-ზე მეტ მარტივ რიცხვს აქვს სახე: $6m+1$ ან $6m-1$. დავამტკიცოთშემდეგი

თეორემა. $6m$-1 სახის რიცხვებში არის უსასრულო სიმრავლე მარტივი რიცხვებისა.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ ასეთი სახის მარტივი რიცხვები სასრულია და არის სულ k ცალი, ესენია: $p_1, p_2,...p_k$, განვიხილოთ $A = 6p_1p_2...p_k-1$ რიცხვი. შესაძლებელია ორი რამ, ან A რიცხვი მარტივია (შეუძლებელია, რადგან A-საც აქვს $6m-1$ სახე და თითოეულ ასეთი სახის p_i რიცხვზე მეტია), ან შედგენილია და იშლება მარტივ მამრავლებად, რომელთაგან არც ერთი არ არის $6m-1$ სახის (რადგან $6m-1$ სახის ყველა მარტივი რიცხვი შედის $A+1$-ის დაშლაში და A და $A+1$ კი თანამარტივია, მათ საერთო გამყოფი 1-ის გარდა არ გააჩნიათ), თუ A შედგენილია, მაშინ იშლება $6m+1$ სახის მარტივ მამრავლებად და შესაბამისად არის $6m+1$ ტიპის, რაც ეწინააღმდეგება A-ს სახეს. ე.ი. ჩვენი დაშვება არასწორია და $6m-1$ სახის მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. ასევე შეიძლება დამტკიცდეს $4m-1$ სახის მარტივ რიცხვთა სიმრავლის უსასრულობა.

ლ. დირიხლე

ამ საკითხის განზოგადებაა თეორემა მარტივი რიცხვების შესახებ არითმეტიკულ პროგრესიაში, რომელიც 1788 წელს ჩამოაყალიბა ფრანგმა მათემატიკოსმა ლეჟანდრმა და რომელიც 1837 წელს ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის გამოყენებით დაამტკიცა გერმანელმა მათემატიკოსმა დირიხლემ (Peter Gustav Lejeune Dirichlet).

დირიხლეს თეორემა არითმეტიკული პროგრესიის შესახებ: ყოველი არითმეტიკული პროგრესია $a+nd$, სადაც პირველი წევრი a და სხვაობა d თანამარტივია $(a,d)=1$, შეიცავს მარტივ რიცხვთა უსასრულო სიმრავლეს.

დიდი ხნის მანძილზე ცდილობდნენ ამ თეორემის დამტკიცებას ელემენტარული გზით, რაც 1949 წელს მოახერხა დანიელმა მათემატიკოსმა სელბერგმა, რომელსაც რიცხვთა თეორიის არაერთი საკმაოდ რთული პრობლემა აქვს დამტკიცებული ელემენტარული მეთოდებით.

ცნობილია აგრეთვე გრინ ტაოს თეორემა (Green–Tao theorem): ყოველი k-სათვის არსებობს a და d რიცხვების წყვილი, ისეთი, რომ $a+nd$ მარტივი რიცხვია ყველა n-სთვის 0-დან $k-1$-მდე. საუკეთესო შედეგი ასეთი k-სთვის ჯერჯერობით არის $k = 26$ (ნაპოვნია ანდერსენის მიერ 2010 წელს) $43142746595714191 + 5283234035979900n$ არის მარტივი ყველა n-სთვის 0-დან 25-მდე.

გოლდბახის პრობლემა

პეტერბურგის აკადემიის წევრმა მათემატიკოსმა გოლდბახმა ეილერისადმი გაგზავნილ წერილებში (1742 წლის 7 ივნისი) გამოთქვა შემდეგი ორი ჰიპოთეზა: ა) ყოველი ლუწი რიცხვი ≥6, არის ორი კენტი მარტივი რიცხვის ჯამი; ბ) ყოველი კენტი რიცხვი ≥9, არის სამი კენტი მარტივი რიცხვის ჯამი.

ა) $2n = p_1+p_2$ ($n \geq 3$, p_1, p_1 — კენტი მარტივი რიცხვებია).

ბ) $2n+1 = p_1+p_2+p_3$ ($n \geq 4$, p_1, p_2, p_3 — კენტი მარტივი რიცხვებია).

ცხადია, რომ ა) შეიცავს ბ)-ს, ე.ი. თუ მართებულია ა), მართებულია ბ)-ც. მართლაც, თუ $2n+1 \geq 9$ $(n \geq 4)$, მაშინ, ა)-ს თანახმად, გვაქვს

$$2n+1 = (2n-2)+3 = p_1+p_2+3 = p_1+p_2+p_3 \ (p_3=3).$$

ამ ჰიპოთეზათა მართებულობის დამტკიცების ამოცანას ეწოდება გოლდბახის პრობლემა.

მიუხედავად იმისა, რომ ამ პრობლემაზე მრავალი სახელგანთქმული მათემატიკოსი მუშაობდა, დიდი ხნის მანძილზე არაფერი არსებითი არ გაკეთებულა.

რიცხვთა თეორიის ერთ-ერთმა უდიდესმა სპეციალისტმა ედმუნდ ლანდაუმ 1912 წელს კემბრიჯში, მათემატიკოსთა მეხუთე საერთაშორისო კონგრესზე, განაცხადა, რომ გოლდბახის პრობლემა აღემატება თანამედროვე მათემატიკის შესაძლებლობებს.

გოლდბახის პრობლემის შესახებ ყველაზე ძლიერი შედეგი მიიღო ვინოგრადოვმა. 1937 წლის მაისში მან დაამტკიცა გოლდბახის ბ) ჰიპოთეზის მართებულობა. ზუსტად მისი ეს შედეგი ასე ჩამოყალიბდება: ყოველი, საკმარისად დიდი კენტი ნატურალური რიცხვი სამი მარტივი რიცხვის ჯამია. ლუწი რიცხვებისათვის ვინოგრადოვის ამ თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი: ყოველი, საკმარისად დიდი ლუწი ნატურალური რიცხვი ოთხი მარტივი რიცხვის ჯამია.

ვინოგრადოვმა შექმნა ფრიად მძლავრი მეთოდი რიცხვთა ადიციურ თეორიაში. ამ მეთოდის იდეის სიღრმეზე მეტყველებს, კერძოდ, ის ფაქტიც, რომ მისი გამოყენებით ამოხსნილ იქნა, მთლიანად, ან ნაწილობრივ, მრავალი რთული პრობლემა, მიღწეულ იქნა სხვადასხვა სიდიდეთა შეფასების არსებითი გაუმჯობესება.

ლანდაუს მიერ მათემატიკოსთა მეხუთე საერთაშორისო კონგრესზე, დასმული იყო აგრეთვე მარტივ რიცხვებთან დაკავშირებული რამდენიმე პრობლემა, რომელთაგან არცერთი არ არის დღემდე ამოხსნილი:

1. სასრული თუ უსასრულო „ტყუპ მარტივ რიცხვთა" სიმრავლე (მარტივი რიცხვები, რომელთა შორის სხვაობაც 2-ის ტოლია). 2013 წელს მათემატიკოსმა იტან ჩანგმა (Yitang Zhang) ნიუ ჰემპშირის უნივერსიტეტიდან დაამტკიცა, რომ არსებობს უსასრულო სიმრავლე მარტივი რიცხვებისა, რომელთა შორის მანძილი არ აღემატება 70 მილიონს, რისთვისაც მან 2014 წელს მიიღო ფრანკ ნელსონ კოლის პრემია თეორიაში.

ქ. გოლდბახი

2. ლეჟანდრის ჰიპოთეზა: სამართლიანია თუ არა, რომ ყოველი ნატურალური n-სათვის n^2-სა და $(n+1)^2$-ს შორის არის ერთი მაინც მარტივი რიცხვი.

3. სასრულია თუ უსასრულო n^2+1 ტიპის მარტივი რიცხვები, სადაც n ნატურალურია. მაგალითად $17 = 4^2+1$; $37 = 6^2+1$ და ა.შ.

დაუდგენელია აგრეთვე, უსასრულო რაოდენობის მარტივ რიცხვებს შეიცავენ თუ არა სხვადასხვა რიცხვითი მიმდევრობები, მაგალითად ფიბონაჩის რიცხვები, ფერმას რიცხვები და სხვა.

აღსანიშნავია აგრეთვე, რომ გასული საუკუნის ბოლოს და XXI საუკუნის დასაწყისში მარტივ რიცხვებს უდიდესი გამოყენება აქვს ინფორმატიკაში, კერძოდ ინფორმაციის შენახვისა და გადაცემის უსაფრთხოებისათვის, სიმეტრიული და ასიმეტრიული კრიპტოსისტემებისთვის იყენებენ ალგორითმებს, რომელთა საშუალებითაც მოწმდება რიცხვი მარტივია თუ არა, მარტივი რიცხვების აგების ალგორითმებს, რიცხვის მამრავლებად დაშლის ალგორითმებს და სხვა.

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. პ.კოლონია, ა.ლურსმანაშვილი, რიცხვთა თეორიის კურსი, „განათლება", თბილისი, 1967.

2. E. Trost, Primzahlen, VerlagBirkhauser, Basel-Stuttgart, (თარგმანი რუსულად) 1959.

3. J. De Koninck, A. Mercier, 1001 Problems in Classical Number Theory, AMS, 2007.

ავტორის ელექტრონული მისამართი:
ketevanshavgulidze@@yahoo.com

მათემატიკა

ბაბილონური ხელწერა (Plimpton 322
მათემატიკა) ჩვენს წელთაღრიცხვამდე 1900
წელი, უძველესი მათემატიკური ტექსტი

პროგნოზირება

ომარ ღლონტი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი. ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

1. ადამიანი ცხოვრობს და მოღვაწეობს მრავალფეროვან მოვლენათა გარემოში. იგი აკვირდება და სწავლობს ამ მოვლენებს, აანალიზებს მათს ცვალებადობას დროში. მოვლენის დროში წინასწარმეტყველება და განჭვრეტა მნიშვნელოვანი პრობლემაა. ის ყოველთვის დიდ ყურადღებას იმსახურებდა, ვინაიდან, ვინც ფლობდა წინასწარმეტყველების უკეთეს მეთოდსა და უნარს, იგი უფრო წარმატებულად ართმევდა თავს საქმიანობას. სწორედ მოვლენის ევოლუციის განჭვრეტის პროცესი წარმოადგენს **პროგნოზირებას**.

კაცობრიობის ისტორია მდიდარია პროგნოზირების ინსტიტუტების არსებობით. ასეთი ცენტრი, ბერძნული წყაროების მიხედვით, იყო დელფოში, სადაც ორაკული წინასწარმეტყველებდა, თუ როგორ განვითარდებოდა გარკვეული მნიშვნელოვანი მოვლენა. ნოსტრადამუსის წინასწარმეტყველებას დღესაც ცდილობენ მისცენ ინტერპრეტაცია. ამიტომ ხშირად მსჯელობენ მათზე ჟურნალისტები და სენსაციის მოყვარულები. ბულგარელი ვანგას მისნობა და ექსტრასენს ჯუნა დავითაშვილის ფენომენი მეცნიერების გამოკვლევის საგნადაც კი იქცა. უამრავი სხვა მაგალითის მოყვანაც შეიძლება: ასტროლოგების ცენტრები, ექსტრასენსები და სხვ.

ცხადია, იმის ვარაუდი, რომ ეს ყველაფერი შარლატანობაა და მისნობაა და არავითარ რეალურ საფუძველს არ ეყრდნობა, მთლად სამართლიანი არ არის. ბევრი რამ ბუნებაში მეორდება, ხოლო მოვლენების დეტალური შესწავლა, სტატისტიკის საწყისები და სხვ. ზოგიერთებს აძლევდა საკმარის ცოდნას, რომ მოვლენათა საშუალო ტენდენცია ეწინასწარმეტყველა. ის კი რომ, როგორც მისნებს უნდათ ახსნან თავიანთი გრძნეულობა, თითქოს ყველა მოვლენა დედამიწაზე უკვე მომხდარია და მათ აქვთ უნარი დაინახონ ის, რაც აინტერესებთ, ცხადია, უფრო ფანტაზიის ნაყოფია. პროგნოზირების აუცილებლობას ოდითგან იწვევდა რეალობა — ამინდი, პლანეტების გადაადგილება, ვულკანების ამოფრქვევა, მიწისძვრები და ბევრი სხვა კაცობრიობისათვის მნიშვნელოვანი მოვლენა. მან გამოიწვია პროგნოზირების მეცნიერული მეთოდების განვითარება, რაც გადაჯაჭვულია მთლიანად მეცნიერების განვითარებასთან. აღმოჩდა, რომ პროგნოზირების საწყის ეტაპად უნდა მივიჩნიოთ მოვლენის მოდელის შექმნა და შემდეგ ამ მოდელისათვის მკაცრი პროგნოზირების მეთოდების შემუშავება. ზოგიერთი ჩამოთვლილი პრობლემა კარგად ექვემდებარება პროგნოზს, ზოგიერთის პროგნოზი კი თითქმის შეუძლებელია. დღეს ამ მიმართულებით მრავალი მეცნიერული სკოლა მუშაობს, შექმნილია ამ საკითხის შემსწავლელი სპეციალური ინსტიტუტები.

ისეთი მეცნიერ-კორიფეები, როგორებიცაა ნორბერტ ვინერი და ანდრეი კოლმოგოროვი იყვნენ ყველაზე წარმატებულები. მათ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ჩაუყარეს საფუძველი პროგნოზირების დღევანდელ თეორიას. ამოსავალი პოსტულატი იყო ის, რომ, ძირითადად, **პროგნოზირებისათვის საინტერესო მოვლენები შემთხვევითი ხასიათისაა**. პროგნოზირების ზუსტი მათემატიკური თეორია ეფუძნება სწორედ ალბათობის თეორიის ისეთ განხრას, როგორიცაა შემთხვევითი (სტოქასტური) პროცესების თეორია. ეს ბუნებრივია, ვინაიდან შემთხვევითი პროცესი წარმოადგენს დროზე დამოკიდებულ შემთხვევით სიდიდეთა ერთობლიობას, მათ შორის, სპეციალური კავშირებით. მეცნიერები ინტენსიურად სწავლობენ რეალური პროცესების ადეკვატური სტოქასტური პროცესების კლასებს. მეტად მნიშვნელოვანია სტაციონარული პროცესების კვლევა. სწორედ პროცესების ასეთ კლასებს უძღვნეს თავისი პიონერული გამოკვლევები ვინერმა და კოლმოგოროვმა. მათ პროგნოზირებაში ტერმინოლოგიაც დაამკვიდრეს და აჩვენეს, რომ პროგნოზირებისა და ფილტრაციის (სიგნალისათვის ხმაურის მოცილება) პრობლემები ერთობლიობაში იხსნება.

ამოცანის ნათელი წარმოდგენა შეიძლება შემდეგი ნაწილობრივ დაკვირვებადი სქემის ფარგ-

ლებში: ვიხილავთ ორკომპონენტიან შემთხვევით პროცესს, პირველი კომპონენტის დაკვირვების საშუალება არა გვაქვს, ხოლო მეორეს ვაკვირდებით. საუკეთესო პროგნოზისა და საუკეთესო ფილტრის ასაგებად უნდა გამოვიყენოთ ის ინფორმაცია (მონაცემები დაკვირვებად კომპონენტზე), რომელიც გაგვაჩნია, ე.ი. უნდა დავეყრდნოთ წარსულს იმის ვარაუდით, რომ შემდეგი ყოფაქცევაც თითქმის ანალოგიური იქნება.

ფილტრაციისა და პროგნოზირების თეორიაში ახალი მნიშვნელოვანი ეტაპი იყო კალმანბიუსის შემოთავაზებული ალგორითმი მოხერხებული კომპიუტერული გათვლებისათვის. ათიათასობით ნაშრომი იყო შესრულებული ამ მიმართულებით და გამოყენებული საინჟინრო პროექტების პრაქტიკაში სარეალიზაციოდ. მიღებული შედეგებით ისარგებლეს კოსმოსურ ნავიგაციაშიც და საკმაოდ წარმატებითაც. ამ მიდგომაში ძირითადი დაშვება იყო მოდელის რეკურენტული გამოსახულებით (დისკრეტული დროის შემთხვევაში) და სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებით (უწყვეტი დროის შემთხვევაში) აღწერა.

აქ უნდა შევნიშნოთ, რომ სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებები გაიგება სტოქასტური ინტეგრალური განტოლებების არსებობის თვალსაზრისით, ხოლო სტოქასტური ინტეგრალური განტოლებები ეფუძნებიან სტოქასტურ ინტეგრალს ბროუნის მოძრაობის მიმართ. ბროუნის მოძრაობის შემთხვევითი პროცესის მოდელი (ან ვინერის პროცესი) მეტად მნიშვნელოვანი ობიექტია. იგი პირველად გამოყენებული იყო ბაშელიეს მიერ (1900 წ.) როგორც საფონდო ბირჟაზე აქციის ფასის ევოლუციის მოდელი. 1905 წელს მას გამოკვლევები მიუძღვნა (სმოლუხოვსკისთან ერთად) გენიალურმა ალბერტ აინშტაინმა, შემდეგ კი მეოცე საუკუნის ოციან წლებში იგი დეტალურად შეისწავლა ნორბერტ ვინერმა და ამიტომ ამ პროცესს ვინერის პროცესს უწოდებენ.

2. **პროგნოზი** (ბერძნულიდან — წინასწარმეტყველება, განჭვრეტა) — მომავლის განჭვრეტა მეცნიერულ მეთოდებზე დაყრდნობით. **პროგნოზირება** წარმოადგენს გადაწყვეტილების მიღების პროცესს იმ მოვლენის შესახებ, რომლის შედეგზეც დაკვირვება ჯერ არ მოგვეპოვება. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, პროგნოზს მიიჩნევენ მომავალი მოვლენის სამეცნიერო მოდელად, ხოლო პროგნოზირებას კი — პროგნოზის შემუშავებად. პროგნოზი ხანგრძლივობის მიხედვით არის მოკლევადიანი და გრძელვადიანი. მეტად მნიშვნელოვანია პროგნოზის სიზუსტის განსაზღვრის მეთოდების დამუშავება. ცხადია, რომ მოკლევადიანი პროგნოზის სიზუსტე აღემატება გრძელვადიანი პროგნოზის სიზუსტეს. სიტყვა პროგნოზირების ინგლისური შესატყვისებია — forecasting, prediction, extrapolation, ბოლო შესატყვისი ქართულშიც იხმარება. მოკლედ შევეხებით საკმაოდ გავრცელებულ პროგნოზირების მეთოდს — დელფის მეთოდს. სახელწოდება „დელფი“ მომდინარეობს დელფის ორაკულიდან. ამ მეთოდების ავტორებსა და მიმდევრებს ეს მაინცდამაინც არ მოსწონთ, ვინაიდან იგი გულისხმობს რამეს, ცოტა საიდუმლოს (ოკულტურს). პირველად მეთოდი გამოყენებული იყო 1944 წელს ომის წარმოების ტექნოლოგიების პროგნოზირებისათვის და დამუშავდა გენერალ პ. არნოლდის ხელმძღვანელობით. დელფის მეთოდი ეფუძნება იმ ვარაუდს, რომ ჯგუფური აზრი უფრო ეფექტურია, ვიდრე ინდივიდუალური. დელფის მეთოდი პროგნოზირების მეთოდია, რომელიც ეყრდნობა ექსპერტთა ჯგუფის ძალისხმევას.ექსპერტები პასუხობენ კითხვარებს ორი ან მეტი რაუნდის პერიოდში. ყოველი რაუნდის შემდეგ კურატორი აჯამებს წინა რაუნდის საპროგნოზო შედეგს. ექსპერტები ამ შედეგის მიხედვით ცვლიან თავის პასუხებს. ასეთი პროცესის შედეგად არის იმის ვარაუდი, რომ პასუხების სარწმუნეობა იზრდება და ბოლოს „კორექტულ“ პასუხში გადაიზრდება. კონსესუსის მიღწევისას რაუნდები წყდება.დელფის მეთოდს ფართო გამოყენება აქვს სხვადასხვა ბიზნესის, მეცნიერების განვითარების პროგნოზისა და პროგნოზირებისათვის საფონდო ბირჟაზეც.

3. პროგნოზირების თანამედროვე მეთოდები მოითხოვს ალბათურ-სტატისტიკური თეორიის საკმაოდ კარგ ცოდნას და, ბუნებრივია, საჭიროა, რომ მკითხველმა, თუ იგი დაინტერესდება ამ პრობლემატიკით, სათანადოდ შეისწავლოს შემთხვევითი პროცესების თეორია, დროითი მწკრივები და შემთხვევითი პროცესების სტატისტიკა, თუმცა არსებობს მარტივი პროგნოზირების ალგორითმები, რომლის აღქმა მკითხველს არ გაუჭირდება და ადვილად შეძლებს მის რეალიზაციას მოცემული დროითი მწკრივის პროგნოზის განსახორციელებლად. ჩვენ გთავაზობთ ერთ ასეთ მარტივ ალგორითმს (ექსპონენციალური გაგლუვება), რომელსაც ევრისტული ხასიათი აქვს, მაგრამ ცუდ შედეგს არ იძლევა პროგნოზირების დროს და პრაქტიკაშიც ფართო გამოყენება აქვს. ჩვენ ასევე ვთავაზობთ მკითხველს გარკვეულ სტატისტიკურ მონაცემებს (ვალუტის კურსების დროითი მწკრივი) და ვურჩევთ მას ამ მონაცემებისათვის გამოიყენოს შემოთავაზებული პროგნოზირების ალგორითმი.

4. **ექსპონენციალური გაგლუვება.** გვაქვს დაკვირვებები $x_1, x_2, \dots, x_n$, სადაც x_1 შეესატყვისება დაკვირვებას დროის პირველ მომენტში (პირველი დღე, პირველი კვირა, პირველი წელი და ა.შ.), x_2 — მეორე მომენტში,..., x_n–n-ურ მომენტში ე.ი. გვაქვს, ეგრეთ წოდებული, დროითი მწკრივი. ამ დაკვირვებების მეშვეობით გვინდა შევიმუშავოთ პროგნოზი n+1, n+2,... — დროის მომენტებში. ექსპონენციალური გაგლუვების რეკომენდაციით $x_{n+k}, k = 1,2,\dots$ სიდიდეების პროგნოზი გამოითვლება ფორმულით:

$$\hat{x}_{n+k} = m_n, k = 1, 2, \dots,$$

სადაც m_n — ექსპონენციალურად შეწონილი საშუალოა და იგი შემდეგი რეკურენტული ალგორითმით მოიცემა

$$m_n = \alpha m_{n-1} + (1-\alpha)x_n.$$

აქ α გაგლუვების პარამეტრია და $0 < \alpha < 1$. ვინაიდან გვაქვს რეკურენტული გამოსახულება, უნდა გადავწყვიტოთ, საიდან დავიწყოთ გამოთვლები. შეგვიძლია ავირჩიოთ.

$$m_1 = x_1,$$

თუმცა შესაძლებელია ავიღოთ სხვა საწყისი მნიშვნელობა. გაგლუვების პარამეტრი კი მეტყველებს იმის თაობაზე, თუ აწონილ საშუალოში რა წილი მოდის მიმდინარე დროის მონაცემზე, რა წილი წარსულ მონაცემებზე და ეს პარამეტრიც ასარჩევია. თუ ავიღებთ $\alpha = \frac{1}{2}$, მაშინ ჩვენ არ ვანიჭებთ უპირატესობას არც მიმდინარე მონაცემს და არც წარსულ მონაცემებს. თუ $\alpha > \frac{1}{2}$, მაშინ მეტ წონას ვანიჭებთ წარსულ მონაცემებს, ხოლო, თუ $\alpha < \frac{1}{2}$, მაშინ მეტ წონას ვანიჭებთ მიმდინარე მონაცემს.

შევნიშნოთ, მოხერხებულია α-ს არჩევა შემდეგნაირად. ავიღოთ α-ს ოთხი დონე 0.2; 0.4; 0.6 და 0.8. გავყოთ ჩვენი დაკვირვებები $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ორ ნაწილად $x_1, x_2, \ldots, x_i$ და $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$. მონაცემების პირველ ნაწილზე დაყრდნობით α-ს ოთხივე დონისათვის ცალ-ცალკე ვითვლით პროგნოზის მნიშვნელობებს $\hat{x}_{i+1}^{(i)}, \hat{x}_{i+2}^{(i)}, \ldots, \hat{x}_n^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$. შემდეგ ვანგარიშობთ პროგნოზის შეცდომას ოთხივე შემთხვევისათვის და ვირჩევთ იმ დონეს, რომლისათვისაც შეცდომა ნაკლები იქნება. უფრო დაწვრილებით ეს ასე ხდება. პროგნოზის შეცდომის განმსაზღვრელი მაჩვენებელია MAPE (Mean Absolute Forecasting Error — საშუალო აბსოლუტური პროგნოზირების შეცდომა), რომელიც ითვლება პროცენტებში შემდეგი გამოსახულებიდან,

$$MAPE = \frac{1}{n-e}\sum_{t=l+1}^{n}\frac{|e_i|}{x_t}\cdot 100\%$$

სადაც $e_t = x_t - \hat{x}_t, t = l+1, l+2, \ldots$ და ვირჩევთ α-ს იმ დონეს, რომლისათვისაც მინიმალურია. საერთოდ, თუ MAPE აღმოჩნდა 10%-ზე ნაკლები ან ტოლი, მაშინ გვაქვს მაღალი სიზუსტე, თუ 10-დან 20%-მდე — კარგი სიზუსტე, 20-დან 30%-მდე — დამაკმაყოფილებელი და 30%-ზე მეტი — არადამაკმაყოფილებელი სიზუსტე. იმის შემდეგ, რაც ავარჩიეთ α პარამეტრი და პირველი ნაწილის მონაცემების საშუალებით ვიპოვეთ საპროგნოზო სიდიდეები $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$ დამაკმაყოფილებელი სიზუსტის მიღწევით, გამოვიყენებთ უკვე ყველა n-მონაცემს $x_1, x_2, \ldots, x_n$ და ვიმოქმედებთ x_m-ის, $m > n$ პროგნოზის გამოსათვლელად ისევე, როგორც ადრე ვაკეთებდით მეორე ჯგუფის მონაცემებისათვის.

დავუშვათ, რომ ვამუშავებთ 2008 წლის მაისის თბილისში მოქმედ ყოველდღიურ გაცვლით კურსებს დოლარისა ლართან მიმართებაში:

$x_1 = 1.4660$, $x_2 = 1.4680$, $x_3 = 1.4680$, $x_4 = 1.4680$,
$x_5 = 1.4680$, $x_6 = 1.4630$, $x_7 = 1.4600$, $x_8 = 1.4570$,
$x_9 = 1.4520$, $x_{10} = 1.4520$, $x_{11} = 1.4520$, $x_{12} = 1.4520$,
$x_{13} = 1.4520$, $x_{14} = 1.4520$, $x_{15} = 1.4550$, $x_{16} = 1.4570$,
$x_{17} = 1.4530$, $x_{18} = 1.4530$, $x_{19} = 1.4530$, $x_{20} = 1.4510$,
$x_{21} = 1.4490$, $x_{22} = 1.4490$, $x_{23} = 1.4490$, $x_{24} = 1.4540$,
$x_{25} = 1.4540$, $x_{26} = 1.4540$, $x_{27} = 1.4540$, $x_{28} = 1.4490$,
$x_{29} = 1.4490$, $x_{30} = 1.4440$, $x_{31} = 1.4440$

პროგნოზის შემუშავებისათვის დავეყრდნოთ ამ მონაცემების პირველ ოცდახუთ მონაცემს, ე.ი. პირველი ჯგუფია $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$, ხოლო მეორე საკონტროლო ჯგუფად ავიღოთ დარჩენილი ექვსი მონაცემი $x_{26}, x_{27}, \ldots, x_{31}$. ავირჩიოთ $m_1 = x_1 = 1.4660$ და $\alpha = 0.6$ მაშინ ექსპონენციალურად შეწონილ საშუალოებისათვის გვექნება

$m_2 = (0.6)\cdot(1.4660) + (0.4)\cdot(1.4680) = 1.4668,$
$m_3 = (0.6)\cdot(1.4668) + (0.4)\cdot(1.4680) = 1.4673,$
$m_4 = (0.6)\cdot(1.4673) + (0.4)\cdot(1.4680) = 1.4676,$

და ანალოგიური გამოთვლებით:
$m_5 = 1.4659$, $m_6 = 1.4659$, $m_7 = 1.4635$, $m_8 = 1.4609$,
$m_9 = 1.4573$, $m_{10} = 1.4552$, $m_{11} = 1.4539$, $m_{12} = 1.4531$,
$m_{13} = 1.4527$, $m_{14} = 1.4524$, $m_{15} = 1.4534$, $m_{16} = 1.4548$,
$m_{17} = 1.4540$, $m_{18} = 1.4536$, $m_{19} = 1.4534$, $m_{20} = 1.4524$,
$m_{21} = 1.4510$, $m_{22} = 1.4502$, $m_{23} = 1.4497$, $m_{24} = 1.4514$,
$m_{25} = 1.4524$

პროგნოზის მნიშვნელობები $t = 26, 27, \ldots, 31$ მომენტებში იქნება:

$$\hat{x}_{26} = m_{25} = 1.4524, \hat{x}_{27} = m_{25} = 1.4524,$$
$$\hat{x}_{28} = m_{25} = 1.4524, \hat{x}_{29} = m_{25} = 1.4524,$$
$$\hat{x}_{30} = m_{25} = 1.4524, \hat{x}_{31} = m_{25} = 1.4524,$$

პროგნოზის შეცდომები კი:

$$MAPE = \frac{1}{6}\cdot\{\frac{0.0016}{1.4540} + \frac{0.0016}{1.4540} + \frac{0.0034}{1.4490} + \frac{0.0034}{1.4490} + \frac{0.0084}{1.4440} + \frac{0.0084}{1.4440}\}\cdot 100\% \approx 0.31\%$$

ამ შემთხვევაში მიღებული 0.31% ათ პროცენტზე გაცილებით ნაკლებია და სიზუსტე ძალიან მაღალია, რაც უნდა ავხსნათ განხილულ პერიოდში თბილისში გაცვლითი კურსის სტაბილურობით დოლარისა ლართან მიმართებაში. შემდეგ უკვე გამოვიყენებთ ყველა მონაცემს, რომელიც მოგვეპოვება, გამოვთვლით m-ებს და მის ბოლო გამოთვლილ მნიშვნელობას ავიღებთ პროგნოზად მომავალი მომენტებისათვის. დაინტერესებულ მკითხველს შეუძლია ჩაატაროს ანალოგიური გათვლები იმავე მონაცემებზე α-ს სხვა დონეებისათვის, ან მოიპოვოს ახალი მონაცემები დროითი მწკრივის სახით, მაგალითად, ვალუტის გაცვლითი კურსების შესახებ ბოლო პერიოდში და იმოქმედოს ისევე, როგორც აქაა აღწერილი.

ავტორის ელექტრონული მისამართი:
omar.glonti@tsu.ge

ალბათობის თეორიის ზოგიერთი საინტერესო ამოცანის შესახებ

პეტრე ბაბილუა

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასისტენტ-პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი; ევროპული სკოლის პედაგოგი

ზაზა ხეჩინაშვილი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასისტენტ-პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ალბათობის თეორია, ისევე, როგორც მასზე დაფუძნებული მათემატიკური სტატისტიკა მათემატიკის შედარებით ახალგაზრდა დარგია. ალბათურ-სტატისტიკური აზროვნება უხსოვარი დროიდან არსებობს. ძველ დროში ამ თეორიის ჩანასახს ე.წ. „შანსების" თეორიაში ვნახულობთ. პირველყოფილთა ბელადებმა იცოდნენ, რომ რამდენიმე მონადირეს ერთ მონადირესთან შედარებით გაცილებით მეტი შანსი ჰქონდა დაემარცხებინა საშიში მხეცი, ამიტომაც ნადირობდნენ ისინი კოლექტიურად.

ისეთი ლეგენდარული მხედართმთავრები, როგორებიც იყვნენ ალექსანდრე მაკედონელი ან გიორგი სააკაძე, საბრძოლველად მზადებისას მხოლოდ მეომრების მამაცობისა და ხელოვნების იმედზე როდი იყვნენ. რა თქმა უნდა, ეს სახელგანთქმული სარდლები შორს იყვნენ ალბათურ-თეორიული ან სტატისტიკური განათლებისაგან, მაგრამ, ამასთანავე, ისინი არ იყვნენ „შემთხვევის ბრმა მონები". გამოცდილებაზე დაყრდნობით მათ შეეძლოთ შეეფასებინათ მოსალოდნელი წარმატების შანსი სამხედრო ოპერაციების წინ.

მოგვიანებით, დაკვირვებებსა და სათანადო განათლებაზე დაყრდნობით ადამიანმა დაიწყო შემთხვევითი მოვლენების (ხდომილობების, სიდიდეების) თანდათანობითი შესწავლა — მოდელირება, პროგნოზირება და მართვა.

მათემატიკა აბსტრაქტული მეცნიერებაა, რომელიც შეისწავლის ბუნებაში არსებულ საგნებსა და მოვლენებს შორის რაოდენობრივ და სივრცული გარდაქმნების კანონზომიერებებს. ბუნებაში არსებული მოვლენები შეიძლება ორ დიდ კლასად გაიყოს:

1) დეტერმინისტული (არაშემთხვევითი);

2) სტოქასტური (შემთხვევითი) მოვლენები.

ალბათობის თეორია შეისწავლის შემთხვევითი მოვლენების კანონზომიერებებს, ანუ ის არის შემთხვევითობის მათემატიკური ანალიზი. დადგინდა, რომ შემთხვევით მოვლენებსაც „მართავს" ობიექტური კანონზომიერებანი. მაგ-

ალითისთვის მოვიყვანოთ მარტივი შემთხვევითი მოვლენა — სიმეტრიული მონეტის აგდება. სიტყვა „სიმეტრიული“ აქ იმის გარანტიაა, რომ მონეტის აგდებისას შედეგები — „გერბის გამოჩენა“ (სხვანაირად მას წარმატებას ვუწოდებთ) და „რიცხვის გამოჩენა“ (ანუ წარუმატებლობა), თანაბრადაა მოსალოდნელი. ეს შედეგები თანაბრად მოსალოდნელი შემთხვევითი ხდომილობებია. შესაბამისად, წარმატების ან წარუმატებლობის შანსი (ალბათობა) თანაბარია. ჩატარდა მრავალი ცდა ამასთან დაკავშირებით. XVIII საუკუნეში ფრანგმა მეცნიერმა **ბიუფონმა** 4040-ჯერ ააგდო მონეტა. გერბი 2048-ჯერ გამოჩნდა (დაახლოებით ნახევარჯერ!). XX საუკუნის დასაწყისში ცნობილმა მათემატიკოსმა **პირსონმა** 24000-ჯერ მონეტის აგდებისას 12012 შემთხვევაში „გერბი“ მიიღო. ამ ოცდაათიოდე წლის წინ ამერიკელმა მეცნიერებმა 10000-ჯერ მონეტის აგდებისას 4879 შემთხვევაში მონეტა „გერბზე დასვეს“.

ზემოთ ჩამოთვლილი ცდების შედეგები ექსპერიმენტულად ადასტურებენ ე.წ. დიდ რიცხვთა კანონში თეორიულად დამტკიცებულ შედეგებს: რაც უფრო დიდია ცდათა რაოდენობა (ჩვენს შემთხვევაში სიმეტრიული მონეტის აგდებათა რიცხვი), მით უფრო მეტი შანსია იმისა, რომ გერბის (ან რიცხვის) გამოჩენის წილი (ფარდობითი სიხშირე, ალბათობა) „რაგინდ ახლოს“ იყოს ნახევართან. ალბათობის ამოცანები წარმოიშვა დემოგრაფიაში, სადაზღვევო საქმეში და ყველაზე მარტივ შემთხვევით მოვლენებში — აზარტულ თამაშებში („აზარ“ არაბული სიტყვაა და ნიშნავს რთულს, განუსაზღვრელს).

შანსების თეორიასთან მრავალი საინტერესო ამოცანაა დაკავშირებული. 1494 წელს იტალიელმა მათემატიკოსმა **პაჩიოლიმ** გამოაქვეყნა ენციკლოპედიური შრომა მათემატიკაში, სადაც განხილულია ასეთი სიტუაცია: ორი მოთამაშე შეთანხმდა, რომ ითამაშონ სიმეტრიული კამათლით იმ მომენტამდე, სანამ რომელიმე მათგანი m რაოდენობის პარტიას არ მოიგებს (მოგებული მიიღებს წინასწარ დათქმულ პრიზს). მაგრამ თამაში შეწყდა მაშინ, როცა პირველმა მოიგო a ($a < m$) პარტია, ხოლო მეორემ b ($b < m$) პარტია. როგორ უნდა გაუნაწილონ მოთამაშეებს საწყისი პრიზი?

თვითონ **პაჩიოლიმ** ამ ამოცანის მცდარი გადაწყვეტა მოგვცა. 100 წლის შემდეგ ფრანგმა მათემატიკოსმა პასკალმა ამოხსნა ეს ამოცანა იმ შემთხვევაში, როცა $m = 3$, $a = 2$ და $b = 1$. ქვემოთ, მოგვიანებით, შემოგთავაზებთ პასკალის მსჯელობას.

1718 წელს ლონდონში გამოვიდა ფრანგი მეცნიერის **ა. მუავრის** წიგნი იმ დროისათვის უცნაური სახელწოდებით: „სწავლებანი შემთხვევითობებზე“. მუავრმა გაზომა 1375 შემთხვევით შერჩეული ქალბატონის სიმაღლე და შედეგები სქემატურად გამოსახა დეკარტის საკოორდინატო სიბრტყეზე. შედეგად მიიღო ზარისებრი მრუდი, რომელიც ახლოსაა $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ფუნქციის გრაფიკთან, სადაც $\pi \approx 3.14$, $e \approx 2.7$ ანუ ე.წ. „ნორმალურ განაწილებასთან“. მას აქვს ძალზე მნიშვნელოვანი თეორიული და პრაქტიკული ღირებულება. ასეა განაწილებული მრავალი სხვა სიდიდეც — გაზის მოლეკულების სიჩქარე, ახალშობილთა წონა და სხვა მრავალი შემთხვევითი ფიზიკური, თუ ბიოლოგიური სიდიდე. ამ წიგნის შესავალში ავტორი წერდა: „აღსანიშნავია, რომ მეცნიერება, რომელიც წარმოიშვა აზარტული თამაშებიდან, გახდება ცნობიერების უმნიშვნელოვანესი ცხოვრებისეული პრობლემების შესწავლით მძლავრი იარაღი, ვინაიდან ისინი ალბათობის თეორიის ამოცანებს წარმოადგენენ“. ეს სიტყვები საოცრად წინასწარმეტყველური აღმოჩნდა. მიუხედავად ასეთი დასაწყისისა, XIX საუკუნის მეორე ნახევრისა და XX საუკუნის დასაწყისში ბევრი ცნობილი მათემატიკოსი აღარ დაინტერესებულა ალბათობის პრობლემატიკით.

ცნობილი მათემატიკოსის **ლაპლასის** მიერ ხდომილების განხორციელების ობიექტურ რაოდენობრივ ზომას (ალბათობის კლასიკურ განმარტებას) ასეთი სახე აქვს:

$$P(A) = \frac{m}{n} ,$$

სადაც n არის ექსპერიმენტის (ცდის) ყველა ურთიერთგამომრიცხავ და ერთნაირად შესაძლებელ შედეგთა რაოდენობა, ხოლო m წარმოადგენს A ხდომილობის ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობას.

ამ განსაზღვრებიდან, როგორც თქვენთვის ცნობილია, გამომდინარეობს ალბათობის რამდენიმე ძირითადი თვისება, კერძოდ,

ა) $0 \le P(A) \le 1$;

ბ) აუცილებელი ხდომილობის ალბათობა უდრის ერთს: $P(\Omega) = 1$;

გ) შეუძლებელი ხდომილობის ალბათობა უდრის ნულს: $P(\varnothing) = 0$;

დ) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (ჯამის

ალბათობის ფორმულა). თუ A და B უთავსებადი ხდომილობებია, მაშინ ეს ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

ჯამის ალბათობის ფორმულა ასევე სამართლიანი რჩება n შესაკრების შემთხვევაში და აქვს სახე:

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) - \sum_{1 \le i < j \le n} P\left(A_i \cap A_j\right) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) - \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

ამ ფორმულის სამართლიანობა ადვილად მოწმდება მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით.

თუ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ხდომილობები წყვილ-წყვილად უთავსებადია მაშინ ბოლო ფორმულა მიიღებს სახეს

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

ახლა ალბათობის გამოთვლის და გამოყენების ორი მაგალითი მოვიყვანოთ.

„დანაშაული გახსნილია“. პოლიციის განყოფილებაში შემოვიდა შეტყობინება ბანკის გაძარცვის შესახებ. ხუთმა ბოროტმოქმედმა გატეხა სეიფი და გაიტაცა დიდძალი თანხა. მოწმეებმა მხოლოდ ის დაინახეს, რომ მძარცველები ჩასხდნენ ავტობუსში და გაემგზავრნენ სხვა ქალაქში. ეს ყველაფერი ეცნობა პოლიციას. როგორც კი ავტობუსი გაჩერდა სადგურზე, მასთან მივიდა გამომძიებელი და აუკრძალა კონდუქტორს კარის გაღება. მან უთხრა, რომ სურს ჩხრეკის ჩატარება. კონდუქტორმა გამომძიებელს აცნობა, რომ ავტობუსში იყო 40 მგზავრი და ეს დიდ დროს წაიღებდა. გამომძიებელმა დააწყნარა ის და უპასუხა: „ჩემთვის საკმარისია შემთხვევით შერჩეული ექვსი მგზავრის შემოწმება“. ასეთნაირად შერჩეული ექვსი მგზავრი წაიყვანეს განყოფილებაში და ერთ მათგანს ჯიბეში აღმოაჩნდა ფული. შესაბამისად, ის იყო დამნაშავე და მან დაასახელა თავისი თანამზრახველები. ჩვენი ამოცანაა, გავარკვიოთ რითი ხელმძღვანელობდა გამომძიელებელი, ეს იყო რისკი თუ გარკვეული გათვლა.

ამის გასარკვევად გამოვიყენოთ ალბათობის თეორიის ზოგიერთი ცნება და ფაქტი. ვთქვათ, A არის ხდომილობა იმის შესახებ, რომ შემთხვევით შერჩეული ექვსი მგზავრიდან ერთი მაინც ბოროტმოქმედია, ხოლო A_i არის ხდომილობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ექვსი მგზავრიდან არის i დამნაშავე, სადაც $i = 1,2,3,4,5$. მაშინ, ცხადია, A წარმოიდგინება შემდეგი სახით

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5,$$

(ხდომილობა იმის შესახებ, რომ 6 ადამიანიდან ერთი მაინც ბოროტმოქმედია, მაშინ მოხდება თუ მოხდა რომელიმე შემდეგი ხდომილობიდან: მათ შორის ზუსტად 1 დამნაშავეა, ან ზუსტად 2..., ან ზუსტად 5 დამნაშავეა). ეს ხდომილობები თანაუკვეთია. ამიტომ

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5).$$

გამოვიყენოთ ალბათობის კლასიკური განმარტება. მივიღებთ

$$P\left(A_1\right) = \frac{C_5^1 \cdot C_{35}^5}{C_{40}^6} \approx 0{,}4192,$$

$$P\left(A_2\right) = \frac{C_5^2 \cdot C_{35}^4}{C_{40}^6} \approx 0{,}1364,$$

$$P\left(A_3\right) = \frac{C_5^3 \cdot C_{35}^3}{C_{40}^6} \approx 0{,}017,$$

$$P\left(A_4\right) = \frac{C_5^4 \cdot C_{35}^2}{C_{40}^6} \approx 0{,}0008,$$

$$P\left(A_5\right) = \frac{C_5^5 \cdot C_{35}^1}{C_{40}^6} \approx 0{,}00001,$$

სადაც C_n^k არის n ელემენტიანი სიმრავლიდან K ელემენტიანი ჯუფთება.

მაშასადამე, $P(A) \approx 0.5734$. ე.ი. ალბათობა იმისა, რომ ექვს მგზავრში აღმოჩნდება ერთი ბოროტმოქმედი მაინც აღმოჩნდა $\frac{1}{2}$-ზე მეტი, რაც საკმაოდ დიდი შანსია, თუმცა უნდა აღინიშნოს, რომ გამომძიებელი საკმაოდ რისკავდა. აქედან შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ გამომძიებელს შეეძლო ალბათობის ცნებების გამოყენება.

შემთხვევითი სიდიდეები. ყოველდღიურ ცხოვრებაში ადამიანები ხშირად გამოიყენებენ გამონათქვამს „საშუალოდ“. როდესაც მოსწავლე ამბობს, რომ მას საშუალოდ 9 ქულა აქვს, ის გულისხმობს, რომ ზოგიერთ საგანში მას შეიძლება ჰქონდეს ნიშანი 7, 8, 9 ან 10, მაგრამ მათი საშუალო არითმეტიკული 9-ის ტოლია. როდესაც მე ვამბობ, რომ სამსახურამდე საშუალოდ 25 წუთი მჭირდება, მე ვგულისხმობ, რომ შეიძლება

დღეს 30 წუთი დამჭირდეს, გუშინ 26, ორი დღის წინ 20 და ა.შ. საშუალო კი 25 წუთია. ასეთი მაგალითები ბევრი შეიძლება მოვიყვანოთ. აქ ყველგან ე.წ. სტატისტიკურ საშუალოზეა საუბარი, ანუ ფაქტიურად მიღებული რიცხვების საშუალო არითმეტიკულზე. შეგვიძლია ისეთი მოვლენის საშუალოზეც ვისაუბროთ, რომლებზედაც დაკვირვებები არ გაგვაჩნია, მაგრამ სავარაუდო შეფასება შეგვეძლოს. მაგალითად, როდესაც ჩვენ ვგეგმავთ შემოსავალს ახლად გახსნილი მაღაზიის ნავაჭრიდან, სხვადასხვა მოსაზრებებიდან გამომდინარე, შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ საშუალო ნავაჭრი შეიძლება იყოს 500 ლარი ყოველდღიურად. მოყვანილი მაგალითები, და სხვა მრავალი მსგავსი, საჭიროებს ზუსტ მათემატიკურ განმარტებას. ასეთი განმარტება ალბათობის თეორიის ერთ-ერთ ამოცანას წარმოადგენს. მოვიყვანოთ მარტივი კონსტრუქცია ასეთი განმარტებისთვის.

მკითხველისთვის ცნობილია ალბათობის განმარტება. ამიტომ შევეცადოთ ამ განსაზღვრას სხვა კუთხით შევხედოთ. ვთქვათ, ω_1, $\omega_1,...,\omega_n,...$ ელემენტარული ხდომილობებია. ე.ი. ისეთი ხდომილობებია, რომ ექსპერიმენტისას ან დაკვირვებისას, მათგან მხოლოდ ერთ-ერთი მოხდება და თანაც აუცილებლად რომელიმე ერთი. დავუშვათ თითოეული მათგანის მოსვლის ალბათობა ჩვენთვის ცნობილია. ეს ხდომილობები და მათი შესაბამისი ალბათობები შეგვიძლია ცხრილის სახით ასე წარმოვადგინოთ:

ω_1	ω_2	...	ω_n	...
p_1	p_2	...	p_n	...

ამ ცხრილში p_n არის ω_n-ის მოხდენის ალბათობა. ცხადია, $0 \le p_n \le 1$ და $p_1 + p_2 + ... + p_n + ... = 1$.

იმ შემთხვევაში, როდესაც თითოეული ხდომილება ω_n, $n = 1,2,...$ რიცხვითი მნიშვნელობით გამოისახება, ვიტყვით, რომ მოცემულია შემთხვევითი სიდიდე. აღვნიშნოთ ასეთი შემთხვევითი სიდიდე ω ასოთი. ამ შემთხვევით სიდიდეს შეუძლია მიიღოს $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...$ მნიშვნელობები, თანაც ალბათობა იმისა, რომ ω მიიღებს ω_n-ის მნიშვნელობას p_n-ს ტოლია. ამასთან დაკავშირებით, ზემოთ მოყვანილ ცხრილზე ამბობენ, რომ მოცემულია ω შემთხვევითი სიდიდის განაწილება.

მაგალითად, ვთქვათ ვაკვირდებით ერთი კამათლის გაგორებისას 1-იანის მოსვლას. ω იყოს იმ ექსპერიმენტის ნომერი, რომლის დროსაც პირველად მოვიდა 1-იანი. ასეთი ექსპერიმენტისას ω წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს. მას შეუძლია მიიღოს ყველა ნატურალური რიცხვითი მნიშვნელობა. ამასთანავე, ალბათობა იმისა, რომ $\omega_n = n$ ასე შეიძლება გამოვთვალოთ. იმისათვის, რომ 1-იანი მოვიდეს n-ურ ნაბიჯზე, საჭიროა ყველა წინა $(n-1)$ ნაბიჯზე არ მოვიდეს 1-იანი (რისი ალბათობაცაა $(5/6)^{n-1}$) და ბოლო n-ურ ნაბიჯზე მოვიდეს 1 (ამის ალბათობაა 1/6). ამიტომ $P(\omega = n) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$. შესაბამისად, განაწილების კანონი იქნება

1	2	...	n	...
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$	...	$\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$	...

(შეამოწმეთ, რომ ნამდვილად

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\ \frac{5}{6}+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\cdots=1).$$

შემთხვევითი სიდიდისათვის შესაძლებელია საშუალო სიდიდის განსაზღვრა. ფორმალურად, შემთხვევითი სიდიდის საშუალო, ანუ ალბათობის თეორიაში მიღებული ტერმინოლოგიის შესაბამისად „მათემატიკური ლოდინი“, ეწოდება შემდეგ გამოსახულებას:

$$E\omega = \omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + ... + \omega_n p_n ...$$

ეს ჯამი ყოველთვის შეიძლება არც არსებობდეს. შეიძლება აღნიშნული ჯამი, ან მისი ნაწილი, თანდათანობითი შეკრებისას უსასრულოდ იზრდებოდეს, ან არარეგულარულად ირხეოდეს. ამ შემთხვევას ალბათობის თეორიის სისტემატიურ კურსში განიხილავენ. ჩვენ მხოლოდ იმ შემთხვევას განვიხილავთ, როდესაც მათემატიკური ლოდინი არსებობს. ეს მაგალითად ყოველთვის ასეა, თუ განაწილებაში სასრული რაოდენობის წევრი გვაქვს.

გამოვთვალოთ ზემოთ მოყვანილი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი. უნდა გამოვთვალოთ ასეთი ჯამი:

$$1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}\ \frac{5}{6}+3\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots+n\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\cdots=$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3+\cdots+$$

$$+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3+\cdots+$$

$$+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3+\cdots+$$

$$+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3+\cdots$$

თითოეული ამ შესაკრებთაგან უსასრულოდ კლებად გეომეტრიულ პროგრესიას წარმოადგენს. მათი შეკრებით მივიღებთ:

$$E\omega=1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^3+\cdots=\frac{1}{1-\frac{5}{6}}=6\,.$$

მათემატიკური ლოდინი ეს არის ის საშუალო მნიშვნელობა, რომელსაც ღებულობს მოცემული შემთხვევითი სიდიდე. ჩვენს მაგალითში საშუალოდ ერთიანი ყოველ 6 ცდაში ერთხელ უნდა მოვიდეს. ზემოთ აღწერილი სტატისტიკური საშუალოებიც ანალოგიური შინაარსისაა. ფიზიკაში საშუალოს სიმძიმის ცენტრი შეესაბამება.

თუ გვაქვს მოცემული l სიგრძის ერთგვაროვანი ძელი, რომლის ბოლოებშიც მოთავსებულია მასები m_1 და m_2, მაშინ სიმძიმის ცენტრი მოთავსებული იქნება წერტილში $\frac{m_2 l}{m_1+m_2}$, რომელიც მათემატიკურ ლოდინს წარმოადგენს (შეამოწმეთ).

ეხლა დავუბრუნდეთ პასკალის მსჯელობას. ვთქვათ, თამაში შეწყდა მაშინ, როცა პირველ მოთამაშეს აქვს ორი მოგებული, ხოლო — მეორეს ერთი მოგებულია პარტია. პრიზის გაყოფა როგორ მოხდება ჯერ-ჯერობით გაუგებარია. ყველაფერი გამარტივდება თუ მოთამაშეები კიდევ ერთ პარტიას ითამაშებენ.

1) თუ ამ „დამატებით“ პარტიას მოიგებს პირველი მოთამაშე, მაშინ მთელ თანხას პირველი მოთამაშე მიიღებს.

2) თუ მეორე მოთამაშე მოიგებს, მაშინ თანხა შუაზე გაიყოფა.

შევნიშნოთ, რომ ამ ორი შედეგის შესაძლებლობა თანაბარია.

ე. ი. პირველ მოთამაშეს შეუძლია მოიგოს ან მთელი პრიზი ან მისი ნახევარი. ეს იმას ნიშნავს, რომ საშუალოდ მისი მოსალოდნელი მოგებაა პრიზის

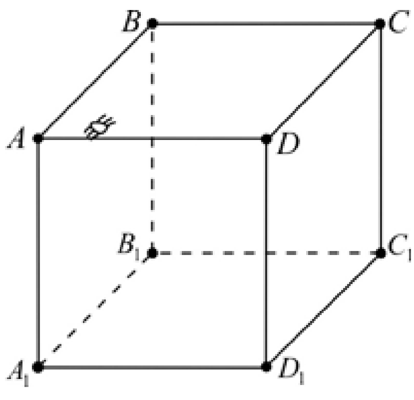
$$\frac{1+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}\text{ ნაწილი.}$$

მეორე მოთამაშის შესაძლებლობები უფრო მოკრძალებულია, ის ან ნახევარს იგებს, ან ვერაფერს იგებს, ე.ი. მეორე მოთამაშის საშუალო მოსალოდნელი მოგებაა

$$\frac{0+\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}\text{ ნაწილი.}$$

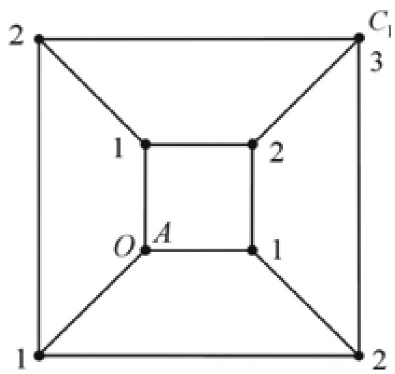
ზემოთქმულიდან გამომდინარე, პირველ და მეორე მოთამაშეებს შორის საპრიზო თანხა ასეთი პროპორციით უნდა განაწილდეს: 3:1. შემდგომში ფერმამ ეს ამოცანა ზოგადად ამოხსნა.

არ მოხვდე მახეში, ჭიანჭველავ. ჭიანჭველა განუწყვეტლივ მოძრაობს კუბის წიბოებზე სიჩქარით ერთი წიბო წუთში (ნახ. 1). ის მოძრაობას იწყებს A წვეროდან, ხოლო C_1 წვეროში არის მახე, სადაც ის იღუპება. წიბოზე ის მოძრაობს ისე, რომ ის იცვლის მიმართულებას ნებისმიერ წვეროში (გარდა C_1-სა). ჭიანჭველას წინ, ყოველ წვეროში არის სამი განშტოება, არავითარი გაფრთხილება არ არის წვეროებში, თუ რა ელოდება მას ამ მიმართულებით წასვლისას, ამიტომ ის შემდეგი მოძრაობისთვის ამ სამიდან ირჩევს თითოეულ წიბოს ერთი და იგივე ალბათობით $\left(p=\frac{1}{3}\right)$. მას შეუძლია უსასრულოდ დიდხანს იმოძრაოს წიბოებზე ისე, რომ არ მოხვდეს მახეში. მისთვის სიცოცხლის ყველაზე მოკლე დრო არის 3 წუთი. ისმის შეკითხვა: რა არის ჭიანჭველას სიცოცხლის საშუალო ხანგრძლივობა? შეეცადეთ წინასწარ გამოიცნოთ პასუხი. რა გგონიათ, საშუალოდ რამდენი წუთი შეიძლება იყოს სიცოცხლის ხანგძლივობა. ჩვენ გთავაზობთ ამ ამოცანის ამოხსნას. ჭიანჭველას სიცოცხლის ხანგრძლივობა არის X შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც იღებს $3, 5, 7, \ldots, 2n+1 \ldots$ (წუთები) მნიშვნელობებს. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე, რომლის მნიშვნელობები შემოუსაზღვრელი მიმდევრობაა, განაწილების ცხრილის შედგენა საინტერესო კომბინატორული ამოცანაა.

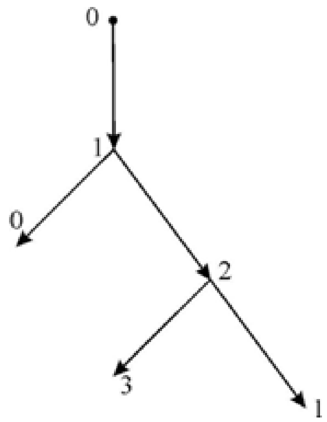


ნახ. 1

ავაგოთ ბრტყელი „გრაფი", რომელიც გამოხატავს წიბოთა რვა სამეულს, რომელიც თავმოყრილია რვა წვეროში (ნახ. 2). ყველა 8 წვერო დავყოთ 4 კლასად, შესაბამისად, მინიმალური წიბოებით, რომლებიც აერთებენ კვანძს საწყის A წვეროსთან. ნახაზზე კვანძები, რომლებიც ეკუთვნის ერთი და იგივე კლასს, აღნიშნულია ერთი და იგივე ციფრებით. ჩვენთვის იქნება უფრო თვალსაჩინო, თუ ჩვენს გრაფს (ნახ. 2) გარდავქმნით ერთი კვანძის მეორეში შესაძლო გადასვლის „ხისებრ დიაგრამაში" (ნახ. 3). როგორც „ხე" გვიჩვენებს, ორი კვანძის მარშრუტი ($0\to1\to0$), ე.ი. ჭიანჭველას სიცოცხლის 2 წუთი, მას აბრუნებს „0" მდგომარეობაში ალბათობით $1\cdot\frac{1}{3}$. მეორე მარშრუტი $0\to1\to2\to1$ აბრუნებს მას „1" კვანძში, გრძელდება 3 წუთი და ხორციელდება $1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$. მესამე მარშრუტი $0\to1\to2\to3$ გრძელდება 3 წუთი $1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$. ეს მარშრუტი ჭიანჭველას არსად არ აბრუნებს. ის არ განხორციელდება განმეორებით.

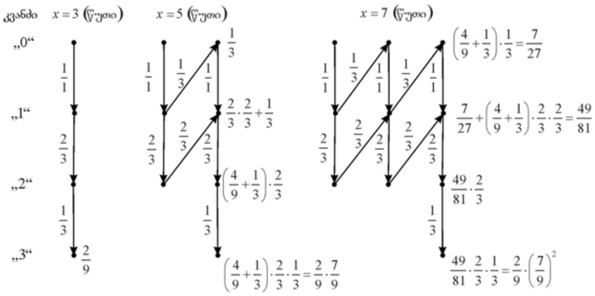


ნახ. 2



ნახ. 3

ჭიანჭველის სიცოცხლის ხანგრძლივობის შესაძლო მნიშვნელობების ალბათობების დასადგენად გამოგვადგება შემდეგი სქემა:



მაშასადამე, ჩვენ განვსაზღვრეთ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება (გეომეტრიული განაწილება).

ახლა გამოვთვალოთ მისი სიცოცხლის ხანგრძლივობის საშუალო. ჩვენ გვაქვს შემთხვევითი სიდიდის განაწილება

X	3	5	7	...	$2n+1$	...
p	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^2$	...	$\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}$	...

ჩვენთვის საძიებელი სიდიდე არის შემთხვევითი სიდიდის საშუალო (მათემატიკური ლოდინი)

$$EX=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\cdot\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}=\frac{2}{9}\cdot\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}+2\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}\right].$$

უკანასკნელი ჯამის პირველი შესაკრები არის უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესია

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{7}{9}}=\frac{9}{2},$$

ხოლო მეორე შესაკრების გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ფორმულით

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2},\ \text{სადაც}\ |x|<1.$$

(დაამტკიცეთ ის! მითითება: ისარგებლეთ გვ.7-ზე მოცემული მსჯელობით.)

ამგვარად,

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}=\frac{1}{\left(1-\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{81}{4}.$$

მაშასადამე,

$$EX=\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{9}{2}+2\cdot\frac{81}{4}\right)=10.$$

ავტორების ელექტრონული მისამართები:
petre.babilua@tsu.ge;
khechinashvili@gmail.com

თვლის პოზიციური სისტემები

რუსლან სურმანიძე

ფიზიკა-მათემატიკის
მეცნიერებათა კანდიდატი,
ასისტენტ პროფესორი.
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის ზუსტ
და საბუნებისმეტყველო
მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ადამიანის მიერ რაიმე საგნების ან მოვლენების რაოდენობის თვლის საჭიროებასთან ერთად გაჩნდა რიცხვების შემოღების აუცილებლობაც. უძველესი ადამიანები საგნების რაოდენობებს ხხვადასხვა ნიშნებით აღნიშნავდნენ: წერტილებით, ხეზე გაკეთებული ნაჭდევებით და სხვა სიმბოლოებით. შემდგომში, დათვლის პროცესის გამარტივების მიზნით, დაიწყეს ამ ნიშნების დაჯგუფება სამეულებად, ხუთეულებად და ა.შ. ჩამოყალიბდა რიცხვების ჩაწერის სისტემა, რომელსაც ერთეულოვან სისტემას ანუ უნარულს უწოდებენ. ასეთი სისტემის ნებისმიერი რიცხვის მიღება ერთი და იგივე, სიმბოლურად ერთეულის ტოლი, ნიშნის მრავალჯერადი განმეორების გზით ხდებოდა. თვლის აღნიშნული სისტემა თანამედროვე ცხოვრებაშიც გამოიყენება. მაგალითად, სამხედრო სასწავლებლის კურსანტის სამხედრო უნიფორმაზე დატანებული ზოლების რაოდენობა აღნიშნავს იმ კურსის ნომერს, რომელი კურსის მსმენელიცაა ის. თვლის ამავე ხერხს იყენებენ ბავშვები სათამაშო ჩხირებით გართობის დროსაც.

რიცხვებზე არითმეტიკული მოქმედებების ჩატარების წესები უშუალოდაა დაკავშირებული იმასთან, თუ რა ფორმით არის ჩაწერილი ეს რიცხვები.

რიცხვის ჩანაწერის მისაღებად საჭირო მოქმედებების ერთობლიობას თვლის სისტემა ეწოდება. ამგვარად, თვლის სისტემა წერილობითი ნიშნების გამოყენებით რიცხვის სიმბოლურად ჩაწერის მეთოდს წარმოადგენს. თვლის ნებისმიერი სისტემის ასაგებად საჭიროა შერჩეულ იქნას გარკვეული სიმბოლოები, რომელთა გამოყენებითაც შესაძლებელი იქნება თვლის მოცემული სისტემის ნებისმიერი სხვა რიცხვის მიღება. ასეთ სიმბოლოებს თვლის მოცემული სისტემის ციფრები ეწოდებათ. მაგალითად, 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ციფრები გამოიყენება თვლის ინდურ-არაბულ სისტემაში, ხოლო *I,Y,X,L,C,D,M* ციფრები თვლის რომაულ სისტემაში.

არსებობს სხვადასხვა სახის თვლის სისტემები. თითოეული მათგანის შექმნა-ჩამოყალიბებას საკუთარი ისტორია აქვს და ხშირად საინტერესო მოვლენასა თუ ლეგენდას უკავშირდება.

თვლის სისტემას ეწოდება პოზიციური, თუ ამ სისტემაში გამოყენებული ყოველი ციფრი თავის რაოდენობრივ მნიშვნელობას ღებულობს იმის მიხედვით, თუ რა მდებარეობა ანუ პოზიცია უჭირავს მას ამ რიცხვის შესაბამის გამოსახულებაში. მაგალითად, რიცხვი 101-ის მარჯვენა ბოლო ციფრი აღნიშნავს ერთეულს, ხოლო მარცხნიდან პირველი ციფრი — ასეულს, თუმცა ორივე მათგანი ერთი და იგივე ციფრია.

თვლის მოცემულ სისტემაში გამოყენებული ციფრების რაოდენობას თვლის ამ სისტემის ფუძე ეწოდება. მაგალითად, თვლის ათობითი სისტემის ფუძეა 10, თვლის ორობითი სისტემის ფუძეა 2,

რვაობითის — 8, თექვსმეტობითის — 16 და ა.შ. p-ობითი სისტემის ფუძეა p და ამ სისტემაში გამოიყენება p ცალი 0, 1, 2, 3, ..., $p-1$ ციფრი. თვლის რაიმე სისტემაში რიცხვის შესაბამის ჩანაწერში ციფრის პოზიციას თანრიგი ეწოდება. მაგალითად, 365 სამთანრიგიანი ათობითი რიცხვია, ხოლო 100011_2-ექვსთანრიგიანი ორობითი რიცხვი. თანრიგების გადანომრვა ხდება რიცხვის ჩანაწერში მარჯვნიდან მარცხნივ. მაგალითად, რიცხვში 835 პირველი (ერთეულების) თანრიგის ციფრია 5, მეორე (ათეულების) თანრიგისა 3 და მესამე (ასეულების) თანრიგისა კი 8.

p ფუძის მქონე თვლის პოზიციურ სისტემაში ნებისმიერი რიცხვი ჩაიწერება სახით:

$$(a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_3 a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} a_{-3} a_{-m})_p = \\ = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_3 \cdot p^3 + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p^1 + a_0 \cdot p^0 + , \quad (1) \\ + a_{-1} \cdot p^{-1} + a_{-2} \cdot p^{-2} + \cdots + a_{-m} \cdot p^{-m}$$

სადაც, a_0, a_1, ..., a_n ამ სისტემის ციფრებია და $0 \le a_k < p$.

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$$

ჯამი წარმოადგენს რიცხვის მთელ ნაწილს, ხოლო

$$a_{-1} p^{-1} + \ldots + a_{-m} p^{-m}$$

მის წილადურ ნაწილს. მაგალითად,

$$11001_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 8 + 1 = 25;$$

$$221_3 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 18 + 6 + 1 = 25;$$

$$31_8 = 3 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = 24 + 1 = 25.$$

ცხადია, რომ, თუ რიცხვი თვლის რაიმე სისტემაშია მოცემული, ანუ ცნობილია ამ რიცხვის წარმოდგენა თვლის ამ სისტემის ფუძის ხარისხების წრფივი კომბინაციის სახით, მაშინ ამ კომბინაციით განსაზღვრული არითმეტიკული ოპერაციების ჩატარების შედეგად მივიღებთ ამ რიცხვის ჩანაწერს თვლის ათობით სისტემაში.

იმისათვის, რომ თვლის ათობით სისტემაში მოცემული რაიმე A რიცხვი ჩავწეროთ თვლის p-ობით სისტემაში, ანუ იმისათვის, რომ ეს რიცხვი წარმოვადგინოთ

$$(a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_0)_p = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot p^1 + a_0 \cdot p^0$$

წრფივი კომბინაციის სახით, საჭიროა:

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot p^1 + a_0 \cdot p^0$$

ჯამი გავყოთ p-ზე. მაშინ განაყოფში მიიღება

$$a_n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot p^1 + a_1 \cdot p^0,$$

ხოლო ნაშთი ტოლი იქნება საძიებელი ჩანაწერის მარჯვენა კიდურა ციფრის a_0. მიღებული განაყოფი

$$a_n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot p^1 + a_1 \cdot p^0$$

კვლავ გავყოთ p-ზე. განაყოფში მიიღება

$$a_n \cdot p^{n-2} + a_{n-1} \cdot p^{n-3} + \ldots + a_3 \cdot p^1 + a_2 \cdot p^0,$$

ხოლო ნაშთში საძიებელი ჩანაწერილს მარჯვნიდან მეორე ციფრი a_1. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ საძიებელი ჩანაწერის ყველა ციფრს. მაგალითად, ჩავწეროთ ათობითი რიცხვი 37 თვლის: ორობით, სამობით და რვაობით სისტემებში. გვექნება:

$$37 = 2 \cdot 18 + 1 \rightarrow 18 = 2 \cdot 9 + 0 \rightarrow 9 = 2 \cdot 4 + 1 \rightarrow 4 = 2 \cdot 2 + 0 \rightarrow 2 = 2 \cdot 1 + 0 \rightarrow 1 = 2 \cdot 0 + 1 \text{ ანუ } 37 = 100101_2;$$

$$37 = 3 \cdot 12 + 1 \rightarrow 12 = 3 \cdot 4 + 0 \rightarrow 4 = 3 \cdot 1 + 1 \rightarrow 1 = 3 \cdot 0 + 1 \text{ ანუ } 37 = 1101_3;$$

$$37 = 8 \cdot 4 + 5 \rightarrow 4 = 8 \cdot 0 + 4 \text{ ანუ } 37 = 45_8;$$

ათობითი A რიცხვის (ისევე როგორც ნებისმიერი სხვა სისტების რიცხვის) თვლის p-ობით სისტემაში გადასაყვანად (მისი p-ობითი ჩანაწერის მისაღებად) შეგვიძლია ასევე ვისარგებლოთ შემდეგი ალგორითმით: დავადგინოთ p-ს უდიდესი p^n ხარისხი, რომელიც A რიცხვს არ აღემატება. თუ თავდაპირველად აღებული რიცხვი p^n-ის ტოლია ანუ $A = p^n$, მაშინ A რიცხვის თვლის p-ობით სისტემაში გადაყვანის პროცესი დასრულებულია და გვექნება საბოლოო ჩანაწერი $A = (1\ \underbrace{00\cdots0}_{n})_p$. თუ $A > p^n$, მაშინ A რიცხვის p-ობით ჩანაწერში უფროსი (უკიდურესი მარცხენა) თანრიგი ტოლი იქნება 1-ის. შემდეგ ნაბიჯზე, დავადგინოთ მოთავსდება თუ არა $A - p^n$ სხვაობაში p^{n-1}. თუ კი მოთავსდება, მაშინ რიცხვის ჩანაწერში მომდევნო თანრიგი ტოლი იქნება 1-ის, ხოლო თუ არა მოთავსდება, მაშინ ამ თანრიგის ციფრი იქნება 0 და ა.შ. პროცესი დამთავრდება მაშინ, როცა განხილული სხვაობა p ფუძის გარკვეული ხარისხის ტოლი გახდება. ასეთ შემთხვევაში შესაბამისი თანრიგი ტოლი იქნება 1-ის და ყველა დანარჩენი თანრიგი 0-ის. მაგალითად, ჩავწეროთ ათობით რიცხვი 57 თვლის ორობით სისტემაში. ცხადია, რომ 57-ში მოთავსდება მაქსიმუმ $2^5 = 32$, ხოლო დარჩენილი ნაწილი ტოლი იქნება $57 - 32 = 25$. ის არ წარმოადგენს 2-ის რაიმე ხარისხს და მასში მოთავსდება მაქსიმუმ $2^4 = 16$. სხვაობა $25 - 16 = 9$ კვლავ არ წარმოადგენს 2-ის ხარისხს და ამ სხვაობაში მოთავსდება მაქსიმუმ $2^3 = 8$. სხვაობა $9 - 8 = 1$ უკვე წარმოადგენს 2-ის ხარისხს $1 = 2^0$. მაშასადამე, $57 = 111001_2$.

ამგვარად, თვლის სხვადასხვა პოზიციური სისტემების ასაგებად, საკმარისია სხვადასხვა მნიშვნელობები მივცეთ თვლის სისტემის p ფუძეს. შესაბამისად, გვაქვს თვლის ორობითი ($p = 2$), სამობითი ($p = 3$) და სხვა სისტემები.

თვლის უძველეს სისტემებს ათობითი და სამოცობითი სისტემები წარმოადგენენ. ძველ ბაბილონში, ჯერ კიდევ ქრისტეშობამდე II ათასწლეულში, ყოველდღიური საჭიროებისათვის ფართოდ გამოიყენებოდა, მათ მიერ უფრო ძველი — მესოპოტამიური ცივილიზაციისაგან აღებული, თვლის ათობითი სისტემა. ისინი, გარკვეული სიმბოლოების გამოყენებით, საგნებს ათეულებად, ასეულებად და ა.შ. აჯგუფებდნენ. უფრო რთული არითმეტიკული გამოთვლებისათვის გამოიყენება თვლის სამოცობითი სისტემა, რომლითაც დღესაც ვსარგებლობთ კუთხის გრადუსული სიდიდის გაზომვისა თუ დროის დადგენის დროს. მაიას ტომის ინდიელები თვლის ოცობით სისტემასაც იყენებდნენ. თვლის ათობითმა სისტემამ თითქმის თანამედროვე სახე ჩვენი წელთაღრიცხვის VI-VII საუკუნეებში ძველ ინდოეთში მიიღო. შემდგომში ის ფართოდ გავრცელდა არაბეთში, ხოლო 1201 წელს ლეონარდო პიზანელის (ფიბონაჩი) მიერ გამოქვეყნებულმა წიგნმა გადამწყვეტი როლი შეასრულა თვლის ათობითი სისტემის ევროპაში ფართოდ გავრცელების საქმეში.

თავდაპირველად თვლის ათობითი სისტემა მხოლოდ მთელი რიცხვებისათვის გამოიყენებოდა. ათწილადების გამოყენება პირველად ჩინეთში დაიწყეს (დაახლოებით 500 წ), ხოლო ევროპაში მათი გამოყენება მხოლოდ XVIII საუკუნიდან დაიწყო.

თვლის ერთ-ერთი უძველესი სისტემაა ორობითი სისტემა, რომლის გამოყენებასაც ეფუძნება ელემენტარული კომპიუტერული ბაზები თანამედროვე ელექტრონულ სისტემებში. თვლის ორობითი სისტემით სარგებლობენ აგრეთვე თანამედროვე პრიმიტიული ტომები, როცა ისინი საგნებს აჯგუფებენ არა სამეულებად, ან ხუთეულებად, არამედ „წყვილებად“. თუმცა, რაღა თქმა უნდა, ისინი არ ახდენენ საგნების საერთო რაოდენობის ორის ხარისხების სახით წარმოდგენას. თვლის ორობითი სისტემის გამოყენების იდეა ასევე ინდოეთიდან მომდინარეობს. ამაზე მიუთითებს მაგალითად ცნობილი ლეგენდა ჭადრაკის გამოგონების შესახებ: ინდოელ მაჰარაჯას ძალიან მოეწონა ჭადრაკის თამაში და მისი გამომგონებლის დაჯილდოება გადაწყვიტა. ჯილდოდ გამომგონებელმა ხორბლის იმდენი მარცვალი მოითხოვა, რამდენსაც მივიღებდით, თუ ჭადრაკის ერთ-ერთ უჯრაზე

მოვათავსებდით ხორბლის ერთ მარცვალს, ხოლო ყოველ მომდევნო უჯრაზე ორჯერ უფრო მეტს, ვიდრე წინაზე. გამომგონებლის „თავმდაბლობით“ გაოცებულმა მბრძანებელმა თავის ქვეშევრდომებს ხორბლის მოთხოვნილი რაოდენობის დაუყოვნებლივ გაცემა უბრძანა.

ევროპაში თვლის ორობითი სიტემის გამოყენება გაცილებით გვიან დაიწყეს. კერძოდ, ორობით სისტემას ემყარება სითხის მოცულობის საზომ ერთეულთა ინგლისური სისტემა: ორი კვარტა უდრის პოტლს, ორი პოტლი უდრის გალონს, ორი გალონი უდრის პეკს, ორი პეკი უდრის ნახევარბუშელს, ორი ნახევარბუშელი უდრის ბუშელს, ორი ბუშელი უდრის კილდერკინს, ორი კილდერკინი უდრის ბარელს და ა.შ. ეს სისტემა, ნაწილობრივ, დღესაც გამოიყენება — ნავთობისა და ბენზინის რაოდენობები გალონებსა და ბარელებში იზომება.

ნებისმიერ პოზიციურ სისტემაში არითმეტიკული ოპერაციები სრულდება იმავე წესების გამოყენებით, რა წესებითაც ვსარგებლობთ თვლის ათობით სისტემაში. ეს გამოწვეულია იმით, რომ თვლის მოცემულ სისტემაში რიცხვებზე არითმეტიკული მოქმედებების ჩატარება გულისხმობს მოქმედებების შესრულებას ამ რიცხვების შესაბამის ჩანაწერებზე (მრავალწევრებზე) მოცემულ სისტემაში.

თვლის p-ობით სისტემაში არითმეტიკული ოპერაციების შესასრულებლად საკმარისია ვისარგებლოთ შეკრებისა და გამრავლების შესაბამისი ცხრილებით. როგორც ვიცით, თვლის ათობით სისტემაში, როდესაც ერთეულების დათვლისას მათი რაოდენობა ამ სისტემის ბოლო ციფრის 9-ის ტოლი გახდება, მაშინ შემოდის ათეულების თანრიგი და ერთეულების დათვლა თავიდან უნდა დავიწყოთ. შემდეგ ნაბიჯზე, როცა ათეულების თანრიგის აღმნიშვნელი ციფრი ასევე 9-ის ტოლი გახდება, შემოდის ასეულების თანრიგი და ათეულების თანრიგის შესაბამისი ციფრი ნულის ტოლი გახდება ა.შ. ანალოგიური სურათი გვაქვს თვლის ორობით სისტემაშიც, რომელშიც მხოლოდ ორი ციფრი 0 და 1 გვაქვს. ამ შემთხვევაში, როგორც კი თანრიგი მიაღწევს თავის ზღვრულ მნიშვნელობას (როცა ის 1-ს გაუტოლდება), გადავდივართ მომდევნო თანრიგზე, ხოლო ძველი თანრიგი ნულდება. ამგვარად, თვლის ორობით სისტემაში: 0 არის თვლის ათობითი სისტემის ნული, 1 არის ათობითი სისტემის ერთი, 10 არის ათობითი ორი, 11 არის სამი, 100 არის ოთხი, 101 არის ხუთი, 110 არის ექვსი, 111 — შვიდი, 1000 რვა და ა.შ. თვლის ორობით სისტემაში გვაქვს არითმეტიკული მოქმედებების შესრულების შემდეგი წესები:

შეკრების ოპერაცია:

$0 + 0 = 0$

$1 + 0 = 1$

$0 + 1 = 1$

$1 + 1 = 10$ (ერთიანი გადადის შემდეგ თანრიგში)

გამოკლების ოპერაცია:

$0 - 0 = 0$

$1 - 0 = 1$

$0 - 1 = 1$ (ვიღებთ უფრო მაღალი თანრიგიდან)

$1 - 1 = 10$

გამრავლების ოპერაცია:

$0 \cdot 0 = 0$

$1 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot 1 = 0$

$1 \cdot 1 = 1$

გაყოფის ოპერაცია:

$0 : 1 = 0$

$1 : 1 = 1$

თვლის ორობით სისტემაში ნულებითა და ერთებით ჩაწერილი რიცხვების აღქმა და მათი გადაყვანა თვლის ათობით (ან რომელიმე სხვა) სისტემაში და, პირიქით, საკმარისად შრომატევადი პროცესია. ამის გამო, პროგრამირებაში აქტიურად გამოიყენება თვლის რვაობითი, თექვსმეტობითი, ოცდათორმეტობითი, სამოცდაოთხობითი სიტემები. ვინაიდან რიცხვები 8, 16, 32 და 64 წარმოადგენ 2-ის ხარისხებს, რიცხვების გადაყვანა ორობითი სისტემიდან რვაობითში, თექვსმეტობითში, ოცდათორმეტობითში, სამოცდაოთხობითში და პირიქით ძალიან მარტივია.

XVII საუკუნეში თვლის რვაობითი სისტემის შესწავლით თვით შვეციის მეფე კარლ XII იყო დაინტერესებული. მან შეამჩნია, რომ თვლის რვაობით სისტემაში არითმეტიკული ოპერაციების წარმოება გაცილებით მარტივი და მოკლე იყო ვიდრე თვლის ათობით სისტემაში. ის თვლის ამ სისტემის შემოღებასაც კი აპირებდა შვეციაში, თუმცა მისი გარდაცვალების გამო ეს იდეა განუხორციელებელი დარჩა.

თვლის რვაობით სისტემაში გამოიყენება რვა ციფრი 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. თითოეულ რვაობით ციფრს შეესაბამება გარკვეული ორობითი რიცხვი — სამციფრიანი ორობითი ჩანაწერი:

$$\begin{aligned} 000 &\to 0 \\ 001 &\to 1 \\ 010 &\to 2 \\ 011 &\to 3 \\ 100 &\to 4 \\ 101 &\to 5 \\ 110 &\to 6 \\ 111 &\to 7 \end{aligned}$$

იმისათვის, რომ რაიმე ორობითი რიცხვი ჩავწეროთ თვლის რვაობით სისტემაში, საკმარისია რიცხვის ორობითი ჩანაწერი დავყოთ სამეულებად (სამციფრიან ჯგუფებად) და თითოეული ასეთი სამეული შევცვალოთ მისი შესაბამისი რვაობითი ციფრით. ამასთან, სამეულებად დაყოფა წარმოებს მარჯვნიდან მარცხნივ, ხოლო საჭიროების შემთხვევაში დაყოფის ყველაზე მარცხენა ჯგუფი, მარცხენა მხრიდან, უნდა შევავსოთ საჭირო რაოდენობის ნულებით. მაგალითად, ჩავწეროთ 1011101_2 ორობითი რიცხვი თვლის რვაობით სისტემაში. ამისათვის მოცემული რიცხვის ორობითი ჩანაწერი დავყოთ სამეულებად:

$$1011101_2 = 1\ 011\ 101 = 001\ 011\ 101 = 135_8.$$

ცხადია, რომ ანალოგიური წესით მოხდება შებრუნებული გარდაქმნა — რვაობითი სისტემის რიცხვის გადაყვანა ორობითში. ამ შემთხვევაში, საკმარისია რვაობითი რიცხვის თითოეული ციფრი მისი ორობითი ჩანაწერით შევცვალოთ. მაგალითად, ჩავწეროთ რვაობითი სისტემის რიცხვი 102_8 თვლის ორობით სისტემაში. გვექნება:

$$102_8 = 001\ 000\ 010 = 001\ 000\ 010 = 1\ 000\ 010_2.$$

შევნიშნოთ, რომ რვაობითი სისტემის რაიმე რიცხვის თვლის ორობით სისტემაში გადაყვანა და პირიქით, შესაძლებელია ზოგადი სქემის გამოყენებითაც.

პროგრამირებაში ასევე ფართოდ გამოიყენება თვლის თექვსმეტობითი სიტემა, რომელშიც თექვსმეტი ციფრი გვაქვს. ესენია: ათობითი სისტემის ყველა ციფრი 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 და ლათინური ალფავიტის პირველი ექვსი ასო A (10), B (11), C (12), D (13), E (14) და F (15).

თუ თითოეულ თექვსმეტობით ციფრს შევუსაბამებთ ორობითი რიცხვს — ოთხციფრიან ორობით ჩანაწერს:

$$\begin{aligned} 0000 &\to 0 \qquad & 1000 &\to 8 \\ 0001 &\to 1 & 1001 &\to 9 \\ 0010 &\to 2 & 1010 &\to A \\ 0011 &\to 3 & 1011 &\to B \\ 0100 &\to 4 & 1100 &\to C \\ 0101 &\to 5 & 1101 &\to D \\ 0110 &\to 6 & 1110 &\to E \\ 0111 &\to 7 & 1111 &\to F \end{aligned}$$

მაშინ რაიმე ორობითი რიცხვის თექვსმეტობითში გადასაყვანად, საკმარისია რიცხვის ორობითი ჩანაწერი, დაწყებული ჩანაწერის მარჯვენა ბოლოდან, დავყოთ ოთხეულებად (ოთხციფრიან ჯგუფებად). თუ უკიდურეს მარცხენა ჯგუფში აღმოჩნდება ოთხზე ნაკლები რაოდენობის ციფრი, ამ ჯგუფს მარცხენა მხრიდან მივუწეროთ იმდენი ნული, რომ ის ოთხეული გახდეს. შევცვალოთ თითოეული ოთხეული შესაბამისი თექვსმეტობითი ციფრით. მივიღებთ ორობითი რიცხვის თექვსმეტობით ჩანაწერს. მაგალითად, 10001100101_2 ორობითი რიცხვი გადავიყვანოთ თვლის თექვსმეტობით სისტემაში. გვექნება:

$$10011000101_2 = 100\ 1100\ 0101 = 0100\ 1100\ 0101 = 4\ C\ 5 = 4C5_{16}.$$

პირიქითაც, თექვსმეტობითი სისტემის რაიმე რიცხვის თვლის ორობით სისტემაში გადასაყვანად, საჭიროა რიცხვის თექვსმეტობითი ჩანაწერის თითოეული ციფრი შევცვალოთ მისი ორობითი ჩანაწერით. მაგალითად, გადავიყვანოთ $4C5_{16}$ თექვსმეტობითი რიცხვი თვლის ორობით სისტემაში. გვექნება:

$$4C5_{16} = 4\ C\ 5 = 0100\ 1100\ 0101 = 100\ 1100\ 0101 = 10011000101_2.$$

თექვსმეტობითი რიცხვის ჩაწერა თვლის ორობით სისტემაში წარმოებს ანალოგიურად.

(1) ფორმულის გამოყენებით, ათწილადი შეიძლება ჩავწეროთ თვლის ნებისმიერ სისტემაში. მაგალითად, ათობითი ათწილადისათვის გვექნება:

$$245{,}12 = 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-3}.$$

იმისათვის, რომ ათობითი სისტემის რაიმე ათწილადი თვლის p-ობითი სისტემის ათწილადის სახით ჩავწეროთ, საჭიროა, რომ ათობითი ათწილადი თანმიმდევრობით გავამრავლოთ p ფუძეზე მანამ, სანამ წილადი ნაწილი ნულის ტოლი არ გახდება ან მიღწეული არ იქნება სასურველი მიახლოების სიზუსტე. ამასთან, p-ზე ყოველი მომდევნო გამრავლებისას უნდა მოვახდინოთ მიღებული მთელი ნაწილის ანულირება. შედეგად მიღებული მთელი ნაწილები ადგენს სწორედ ახალ ათწილადს. მაგალითად, ათობითი სიტემის ათწილადის ორობითში გადაყვანისას გვექნება $0{,}25510 = 0{,}00111001\cdots_2$. მართლაც:

$$\begin{aligned}
&0{,}255 \cdot 2 = 0{,}45\\
&0{,}45 \cdot 2 = 0{,}9\\
&0{,}9 \cdot 2 = 1{,}8\\
&0{,}8 \cdot 2 = 1{,}6\\
&0{,}6 \cdot 2 = 1{,}2\\
&0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4\\
&0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8\\
&0{,}8 \cdot 2 = 1{,}6\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ანალოგიურად, თვლის რაიმე სისტემის ათწილადის ათობით სისტემაში ჩასაწერად, საჭიროა შევასრულოთ შესაბამისი არითმეტიკული ოპერაციები. მაგალითად, ორობითი სისტემის ათწილადისათვის:

$$101{,}01_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 5{,}51_{10},$$

ხოლო რვაობითი სისტემის ათწილადისათვის:

$$253{,}31_8 = 2 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 + 3 \cdot 8^{-1} + 1 \cdot 8^{-2} = 171{,}3906251_{10}$$

ბოლოს, უნდა აღინიშნოს, რომ გარდა პოზიციური p-ური სისტემებისა განიხილება თვლის არაპოზიციური სისტემებიც.

ავტორის ელექტრონული მისამართი:
ruslan.surmanidze@tsu.ge

შეუძლებელი ობიექტები

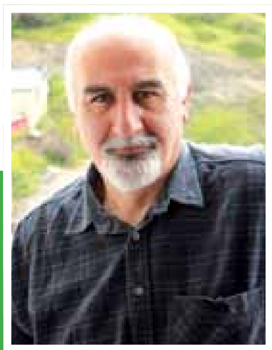
რეალური სამგანზომილებიანი ობიექტის ისეთი პროექცია სიბრტყეზე, რომლის კომპონენტების შეერთებაც არარეალური ობიექტის შთაბეჭდილებას ტოვებს. სინამდვილეში ეს ოპტიკური ილუზიაა და ყველა შეუძლებელი ფიგურა რეალურად არსებული ობიექტია და შეუძლებლობის ეფექტი დამზერის კუთხითაა გამოწვეული, სხვა კუთხით მათი შეხედვისას ეს ეფექტი იკარგება. შვედმა მხატვარმა ოსკარ რეუტერსვარდმა ათასობით შეუძლებელი ფიგურა დახატა. ჰოლანდიელმა მხატვარმა მ. ეშერმა კი შეუძლებელი ფიგურები თავის მხატვრულ კომპოზიციებში გამოიყენა. მეცნიერების ინტერესის სფეროში შეუძლებელი ფიგურები მოხვდა ინგლისელი ფსიქოლოგის ლიონელ პენროუზის და მისი ვაჟის, თანამედროვეობის ერთ-ერთი დიდი მათემატიკოსის, როჯერ პენროუზის ერთობლივი ნაშრომის გამოქვეყნების შემდეგ "ბრიტანეთის ფსიქოლოგიურ ჟურნლში" 1958 წელს. საყოველთაოდ ცნობილი შეუძლებელი ფიგურები "პენროუზის კიბე" და "პენზოუზის სამკუთხედი" სწორედ ამ სტატიიდან მოდის. თუმცა არავინ იცის რომელი პენროუზი იგულისხმება ამ ტერმინის ქვეშ. სამეცნიერო ლიტერატურაში ტერმინს ზოგიერთი ფსიქოლოგ პენროუზს მიაწერს, ზოგიერთი კი მათემატიკოსს. შეუძლებელი ფიგურები ადამიანის ინტელექტუალური მოღვაწეობის შესაძლებლობის გარკვეულ სიმბოლოდაა მიჩნეული. ერთ-ერთი ასეთი ფიგურა გერმანიის ტექნიკურ მუზეუმშია.

უნივერსალური ბუნებრივი ზედაპირები

ავტორი იოჰან ჯიელისი
ინგლისურიდან თარგმნა ილია თავხელიძემ

პროფესორი
იოჰან ჯიელისი

ანტვერპენის უნივერსიტეტი, ბიოსაიჟინრო მეცნიერებათა დეპარტამენტი (ბელგია)
სამეცნიერო ინტერესები: მცენარეთა ბიოტექნოლოგია, ბიომოლეკულათა და მცენარეთა ფორმების მოდელირება, გეომეტრია, გამოყენებითი მათემატიკა, ტელეკომუნიკაცია და ანტენათა თეორია
მის მიერ შემოთავაზებულია საკმარისად ფართე კლასის წირებისა და ზედაპირების ანალიზურად წარმოდგენის ფორმულა, რომელსაც თანამედროვე ლიტერატურაში ჯიელისი წირების, ან კი სუპერფორმულის სახელით მოიხსენებენ
Email:
johan.gielis@uantwerpen.be
Home Page:
www.genicap.com



ილია თავხელიძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი, ივ. ჯავახიშვილის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, აკადემიკოს ილია ვეკუას პრემიის ლაურეატი 1984 წ. დაჯილდოვებულია უკრაინის მათემატიკოსთა 2009 წლის ყრილობის აკადემიკოს ნიკოლოზ ბოგოლიუბოვის მემორიალური ოქროს მედლით.

ჯიელისის წირები დაზედაპირები — მეჩვიდმეტე საუკუნის დასაწყისში, იოჰან კეპლერისა და გალილეო გალილეის გამოკვლევებმა გამოკვეთეს ერთი ძალზე მნიშვნელოვანი მოსაზრება, ბუნებრივი ობიექტების მოძრაობის ტრაექტორიის შესწავლა მჭიდროდაა დამოკიდებული „კლასიკური კონუსური კვეთების“ (მეორე რიგის წირები) შესწავლაზე. ეს მოსაზრება კიდევ უფრო გამყარდა სერ ისააკ ნიუტონის მიერ მსოფლიო მიზიდულობის კანონის აღმოჩენის შემდეგ. მოვლენის შესწავლის ნიუტონისეული მიდგომა არსით გეომეტრიული იყო, მოკლე ხანში, მექანიკასა და სხვა საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში, კვლევისას, დაიწყო მათემატიკური (ალგებრის, ანალიზის და სხვ.) მეთოდების ფართოდ გამოყენება, და ეს ტენდენცია დღემდე ძალზე აქტუალურია. „იმ დროს როდესაც ალგებრა და ანალიზი უზრუნველყოფს მათემატიკის დაფუძნებას, გეომეტრია წარმოადგენს საფუძველთ-საფუძველს“ (Chern 2000).

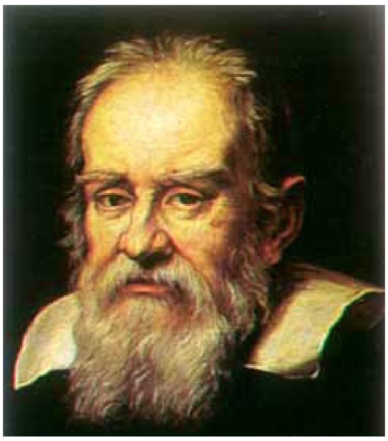
1994 წლიდან მოყოლებული, გაბრიელ ლამეს წარმოდგენაზე (1818 წელი, განტოლებები 1-5) დაყრდნობით მეცნიერები ცდილობდნენ ანალიზურად აღეწერათ ბუნებაში არსებული სხვადასხვა ფორმა, როგორც „სუპერელიფსი“, ანუ დაეწერათ გამაერთიანებელი ანალიზურ-გეომეტრიული წარმოდგენა (Gielis, 1996). ასეთი იყო პირველი ნაბიჯი კლასიკური კონუსური კვეთებიდან, ლამეს წირების გავლით, გამაერთიანებელი გეომეტრიული წარმოდგენისაკენ.

$$\left|\frac{x}{A}\right|^{n}+\left|\frac{y}{B}\right|^{n}=1;(1)$$

$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}=1;\ \frac{A}{x}+\frac{B}{y}=1;\ \left(\frac{x}{A}\right)^{2}+\left(\frac{y}{B}\right)^{2}=1;\ \sqrt{\frac{x}{A}}+\sqrt{\frac{y}{B}}=1.\ (2\text{-}5)$$

ფორმულა 1 *— სუპერელიფსები ,* ***ფორმულები 2-5*** *— წირები და კონუსური კვეთები კონკრეტული ხარისხებისათვის*

იოჰან კეპლერი (1571-1630)



გალილეო გალილეი (1564-1642)

გაბრიელ ლეონ ჟან ბატისტ ლამე (1795-1870)

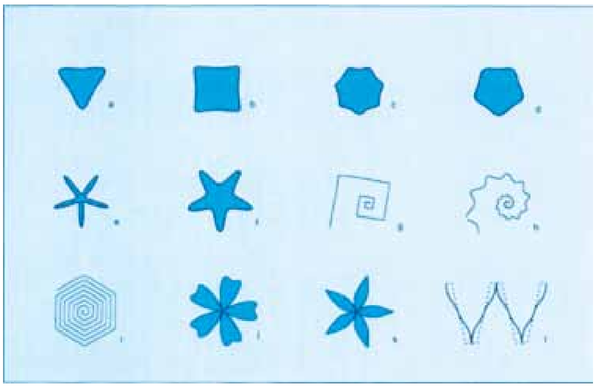
ლამეს სუპერწრეებისა და სუპერელიფსების განზოგადებამ სუპერწირებამდე და შემდგომ სუპერზედაპირებამდე (Gielis და თანაავტორები, 2005), მოგვცა საშუალება ერთიანად აღწერილიყო ბუნებრივი სიმრუდის მქონე არსებული ფორმების დიდი ნაწილი. სუპერწირები მიიღება ეგრეთ წოდებული ჯიელისის გარდაქმნით, რომელიც ხანდახან მოიხსენიება როგორც სუპერფორმულა (ფორმულა 6 და შესაბამისად ნახ.1).

დასახელებები: „სუპერფორმულა“, „სუპერწირები“ და „სუპერზედაპირები“ განპირობა, ამ წარმოდგენის უდავო კავშირმა ისეთ ტერმინებთან, როგორებიცაა ლამეს: სუპერწრე, სუპერელიფსი და სუპერკვადრატი. დროთა განმავლობაში ეს დასახელება შეიცვალა და მათემატიკოსების გავლენით მას ეწოდება ან „ჯიელისის ფორმულა“ (მაგ.: Koiso and Palmer, 2007, 2008), რომელიც აღწერს „ჯიელისის წირებს“, ან ზედაპირებსა და (სუბ) მრავალნაირობებს (Verstraelen, 2004, 2008).

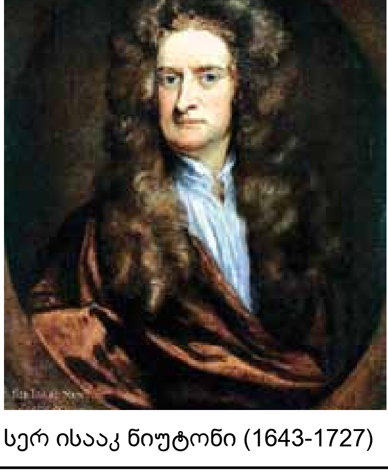
მრავალი წირის ანალიზური წარმოდგენა ძალზე ხელსაყრელია ρ და a პოლარულ კოორდინატებში ($x=\rho cos\varphi$და$y=\rho sin\varphi$). წირების კლასი ფართოვდება, როდესაც კოორდინატი ρ გარკვეული წესით არის დამოკიდებული $a\varphi$ პოლარულ კუთხეზე, ანუ $\rho(\varphi)$-გარკვეული ფუნქციაა. კერძოდ, კოეფიციენტ m/4-ის ჩამატებითა (რომელიც განაპირობებს შესასწავლი ფორმის (წირის) უფრო კონკრეტულ სიმეტრიულ განლაგებას O კოორდინატთა სათავის მიმართ) და ფორმულა 1-ში ხარისხის მაჩვენებელთათვის მეტი „თავისუფლების“ მინიჭებით სუპერელიფსი შესაძლოა განზოგადდეს ე.წ. სუპერწირად (ფორმულა (6))

$$\rho(\phi)=\left(\left|\frac{\cos(\frac{m_1}{4}\phi)}{A}\right|^{n_2} {}^{+}\!\!/\!_{-} \left|\frac{\cos(\frac{m_2}{4}\phi)}{B}\right|^{n_3}\right)^{-\frac{1}{n_1}}, \quad (6)$$

სადაც, B, $n_1 \in \Re_0$; m, n_2, $n_3 \in \Re$. როდესაც $m = 4$ და $n_1=n_2=n_3=n$ მიიღება ფორმულა 1. შესაბამისად ჩანაწერი (6) შესაძლებელია განხილულ იქნეს როგორც გარდაქმნა, რომლის საშუალებით წრე გარდაიქმნება სხვადასხვა სახის ბრტყელ წირში.

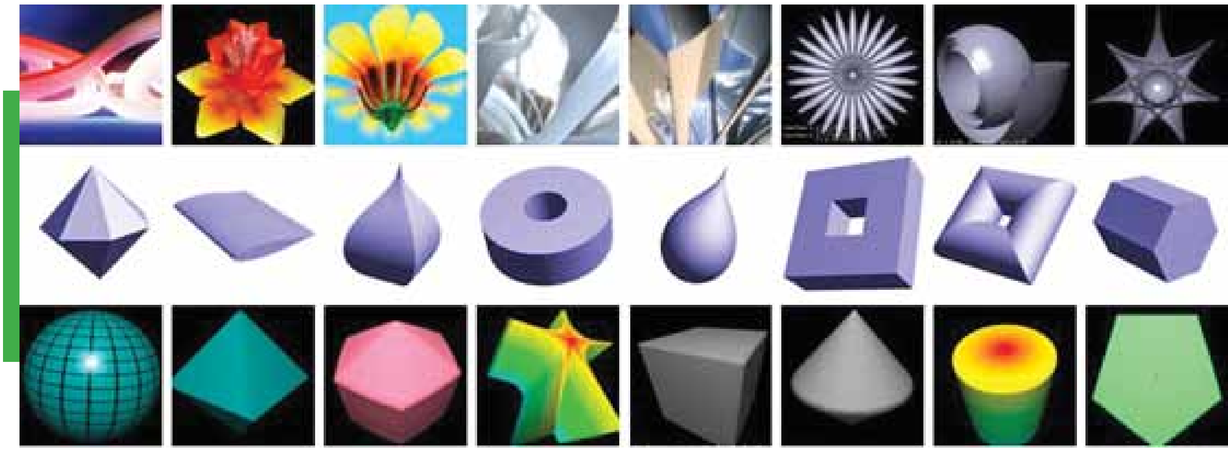


ნახ. 1. *სუპერზედაპირები (Gielis, 2003a)*



სერ ისააკ ნიუტონი (1643-1727)

სუპერელიფსები და სუპერწირები საზოგადოდ ცნობილია არა მხოლოდ როგორც გარკვეული სახის ბრტყელი წირები, მათ, ამავდროულად, გააჩნიათ ძალზე საინტერესო გეომეტრიული არსი — „n-მოცულობის“ შენახვის კანონი. მაგალითად სუპერწრე, როდესაც n=3 (ფორმულა 1, როდესაც $A=B$=1 და n=3) „გამოსახავს“ კანონზომიერებას რომლის თანახმად კუბების, რომელთა წიბოები შესაბამისად X (აბსცისა) და Y (ორდინატა) სიგრძისანი არიან, მოცულობათა ჯამი ერთეულოვანი წიბოს მქონე კუბის მოცულობის ტოლია. (ძალზე საინტერესოა, რომ სუპერწრე (ფორმულა 1), როდესაც $A=B$=1 და n=1 „გამოსახავს“ კანონზომიერებას, რომლის თანახმად ესაა გეომეტრიული ადგილი ისეთი წერტილებისა, რომელთა დეკარტული კოორდინატების სიგრძეთა ჯამი ერთიანის ტოლია, ანუ აღწერს წირს, რომელსაც მოხაზავს ისეთი მართკუთხა სამკუთხედების ჰიპოტენუზები, რომელთა ერთი ბოლო სათავეშია განთავსებული და კათეტების სიგრძეების ჯამი ერთიანის ტოლია ი.თ.) ამგვარად ეს ბრტყელი წირი ზოგად შემთხვევაში გამოსახავს „n-მოცულობის“ შენახვის კანონს. ამგვარად ორივე შემთხვევაში ბრტყელი (2D) და სივრცითი (3D) ლამე-ჯიელისის წირები, რომლებიც აღიწერება ერთი მარტივი ფორმულით, ამავდროულად გამოსახავს, გარკვეული



ნახ. 2. *სივრცული სუპერზედაპირები რომელთა საფუძველი ბრტყელი სუპერწირებია*

აზრით, შენახვის კანონის ლოკალურ და ზოგად შემთხვევას (Gielis, 2010a).

თუ ლამეს წირებისათვის ან სუპერწირებისათვის შემოღებულ იქნა ე.წ. შიდა საკოორდინატო ფუნქციები *ncos* და *nsin*, მაშინ შესაძლოა „განზოგადდეს“ პითაგორას თეორემა (ფორმულა 7; Beirinckx and Gielis, 2004; Lenjou 2005). ამგვარად *n*-მოცულობა შესაძლოა განხილულ იქნას, როგორც თავისუფლების ხარისხი, რაც ცხადია მეტია ვიდრე თავისუფლების ხარისხი ორი (ანუ პითაგორას თეორემის კლასიკური შემთხვევა *n*=2 და შესაბამისად „ერთეულოვანი წრეწირი“ კლასიკური ევკლიდეს წრეწირია, ანუ საკოორდინატო ფუნქციები *„cos* და *„sin* წარმოადგენენ კლასიკურ *cos* და *sin* ფუნქციებს).

$$„cos^{n}(\varphi) + „sin^{n}(\varphi) = 1 \quad (7)$$

ფორმულა 7 *- პითაგორას ზოგადი თეორემა*

სუპერწირებისა და სუპერელიფსების საშუალებით, ანუ ფორმულა (6)-ში, მხოლოდ რიცხვითი პარამეტრების ცვლილებით, შესაძლოა აღიწეროს ბუნებაში არსებული ძირითადი ფორმების ფართო სპექტრი, ანუ მოხდეს ე.წ. „ბუნების გეომეტრიზაცია“. საკუთრივი ფორმები, როგორც ერთეულოვანი წრეები, რომლებიც გამოსახავენ რიცხვით დამოკიდებულებებს და ანზოგადებენ პითაგორას თეორემას.

არსებული წარმოდგენა არ შემოიფარგლება ბრტყელი წირებითა და ზედაპირებით, ის შესაძლოა მარტივად განზოგადდეს სუბმრავალნაირობების ფართე კლასზე. ბუნებაში არსებულ ფორმათა (ორგანიზმებიები, მცენარეები, კრისტალები, მოლეკულები...) აღწერას ეს ფორმულა, პარამეტრების რეგულარული ცვლილებით ახორციელებს და ასახავს როგორც არსებათა (რომლთა გარემოცვაშიც ჩვენ ვცხოვრობთ) გეომეტრიულ ფორმებს (D'Arcy Thompson, 1917), აგრეთვე ზოგიერთ სივრცე-დროითფიზიკურ მოდელს. ამიტომაც ის მოიხსენიება, როგორც ზოგადი ბუნებრივი ფორმა (Gielis და თანაავტ., 2005).

ზოგადი ბუნებრივი ფორმის გეომეტრიული არსი

ზედაპირების შესწავლისას განმსაზღ-ვრელ როლს თამაშობს: მეორე რიგის წარმოებულები და სიმრუდეები (Schrödinger, 1940). ზედაპირები, თავისი გეომეტრიული არსით, ცალსახად განისაზღვრება თავისი სიმრუდით. ჩვეული, ტრადიციული, ევკლიდური გეომეტრიის თვალსზრისით ზედაპირების სიმრუდეები აღიწერება წრეების, ან ელიფსების საშუალებით (Coolidge, 1952), ამავდროულად, რიმანის გეომეტრიაში, ისინი წარმოადგენენ ყოველი სკალარული სიდიდის საფუძველს. ზედაპირთა გამოკვლევების ამგვარი მიდგომის ისტორიული საწყისები კეპლერის, ჰიუგენსისა და ნიუტონის სახელებთანაა დაკავშირებული.

ჩვენ წარმოდგენას სამყაროს (გარემოს) შესახებ, ღრმა ფესვები აქვს ჩვენ აღქმაში დაეფუძნება ამ აღქმის აბსტრაგირებას, რომელიც თავის თავში მოიცავს გარემოს იზოტროპიულობას (ანუ ერთგვაროვნებას) — ფორმის თვალსაზრისით ამგვარი აბსტრაქციის შედეგია წრე და სფერო. პირდაპირი სვლა და თავისუფალი, იზოტროპული, ნებისმიერი მიმართულებით გადაადგილება კაცობრიობის მიერ გადააზრებულია ევკლიდური გეომეტრიის საფუძველზე. XIX საუკუნეში გეომეტრია მივიდა ზოგად რიმანის სივრცეების აღქმამდე, სადაც მუდმივი სიმრუდის *K* კვეთების მქონე ზედაპირები, როგორცა ჩვენ არიმანის, ჰემჰოლცისა და ლის კვლევებმა, აკმაყოფილებენ „თავისუფალი გადაადგილების აქსიომას“. თუმცა ამგვარი თავისუფალი გადაადგილების იდეა აღარ აღმოჩნდა აუცილებელი ცოცხალი და არაცოცხალი ქმნილებებისათვის, რომელთათვის ე.წ. ვარიაციული პირობებიდან გამომდინარე „საკუთარი გეომეტრია განისაზღვრება“. ევკლიდურ გეომეტრიაში უმოკლესი მანძილი ორ წერტილს შორის „წრფეა“, მაგრამ უკვე მცენარეებისა თუ ზღვის ვარსკვლავების „სამყაროში“ უმოკლესი მანძილის აღქმა საზოგადოდ განსხვავებულია. რადგან არსებობს განსხვავებული გარემო პირობები და მათგან გამოწვეული შეზღუდვები,

მათი აღქმა და აგრეთვე შესაბამისად ინიცირებული გეომეტრიები შესაძლოა იყოს პრინციპულად განსხვავებული.

ქმნილებათა უმეტესობისათვის სამყარო ან იზოტროპულია, გააჩნია ე.წ. პრიორიტეტული მიმართულებები, აგრეთვე „ზომის სხვადასხვა იდეოლოგია“. წიგნის, მინკოვსკის გეომეტრია, შესავალში. C. Thompson (1996) წერს: „ევკლიდესა და ნიუტონის სივრცე არის ერთგვაროვანი და „იზოტროპული“, ერთნაირი ყველა მიმართულებით. ამგვარი წარმოდგენა ყოველდღიურობასთან, რბილად რომ ვთქვათ, შეუთავსებელია — ზედა და ქვედა პრინციპულად განსხვავდება აღმოსავლეთისა და დასავლეთისაგან. რეალობაში არსებობს პრიორიტეტული მიმართულებები. ამის კარგი მაგალითია — პრიორიტეტული მიმართულებები, რომლებიც გააჩნია ზრდის პროცესში კრისტალებს, რომლებიც საპნის ბუშტებისაგან განსხვავებით ყალიბდებიან როგორც მრავალწახნაგები და არა როგორც სფეროები. ევკლიდური (კლასიკური) ერთეულოვანი წრე და სფერო რეალურ სამყაროში უცნობი (არ არსებული) ობიექტებია, თუმცა არსებობს ამოზნექილი რაღაც ობიექტები, რომლებსაც ერთეულოვანი ბირთვები ეწოდება“.

ჩვენ ვიმყოფებით ბუნების გეომეტრიის შემეცნებისა და გააზრების საწყის სტადიაში, ხოლო რას ნიშნავს ეს თვით გეომეტრიის ბუნებისათვის ეს ჯერ კიდევ შესასწავლია. „არსებული გეომეტრიული მოდელები, მიუხედავად მათი სიმრავლისა, ვერ პასუხობენ მრავალ არსებულ უმნიშვნელოვანეს შეკითხვას. მაგალითად: როგორ უნდა აღიწეროს ყველა შესაძლო კონფიგურაციის ცოცხალი ორგანიზმის დროში ზრდის (ცხოვრების) ტრაექტორია“ (Berger, 2000); მაგალითად, კონკრეტულად, ხეების ან კიბოს უჯრედების ზრდა!?

სინათლის ბუნება ან კი მისი ყოფაქცევა, მარტივად რომ ვთქვათ, არავითარ გავლენას არ ახდენს არც არსებებზე, რომლებიც ღრმა წყლებში ბინადრობენ, და არც ნაწლავურ ჩხირებზე, რომელთა საარსებო გარემო ჩვენი შინაგანი ორგანოებია. შეგვიძლია, დიდი ალბათობით ვივარაუდოთ, რომ რვაფეხას, რომელიც ვეშაპის მიერ, 600 მეტრზე უფრო ღრმადაა დაჭერილი და რომელიც ოკეანის ზედაპირზე ამოტანისთანავე „ფეთქდება“, წნევათა სხვაობის გამო, რაღა თქმა უნდა „თავისუფალი გადაადგილებაზე“ აბსოლუტურად განსხვავებული მოსაზრება ექნება. ზღვის ვარსკვლავები და ხეები სხვადასხვანაირად, თანაც ჩვენგან განსხვავებულად აღიქვამენ სამყაროს. მათ რომ ჰქონდეთ შესაძლებლობა აღწერონ, ან მოახდინონ სამყაროს გეომეტრიზაცია და „გაზომვები“, შედეგი იქნება აბსოლუტურად განსხვავებული. ცხადია, რომ სამყაროს, დღეს არსებული, აღწერა დაფუძნებულია უნიკალურ — ადამიანურ აღქმაზე.

ე.წ. „ჯიელისის წირებისა და ზედაპირების“ საშუალებით ჩვენ გვეძლევა კარგი და თანაც მარტივი საშუალება ბუნებაში არსებული სხვადასხვა ფორმა აღიწეროს კონუსური კვეთების გარდაქმნებით. ამგვარად დადგა ამოცანა გადავიდეთ აღწერიდან გაგებაზე. კლასიკურ შემთხვევაში მხები სივრცეების კვლევისას გამოყენებულია მხები ელიფსები და წრეები, ანალოგიურად აღებულ შემთხვევაში მხები სივრცეების, სიმრუდეების განსაზღვრა შესაძლოა დაეყრდნოს სუპერელიფსებსა და სუპერწირებს, და შესაბამისად შესაძლოა ახლებური კუთხით იქნას გაგებული მინკოვსკისა და ჰილბერტ-ფინსლერის გეომეტრიები და მოდელირებულ იქნას ბუნებაში მიმდინარე სხვადასხვა მოვლენა.

ამ ზოგად შემთხვევაში სიმრუდე შესაძლებელია განისაზღვროს შესაბამისად აღწერილი ფორმის საფუძველზე, როგორც ეს, კლასიკურ შემთხვევაში, წრის საფუძველზე ხორციელდებოდა.

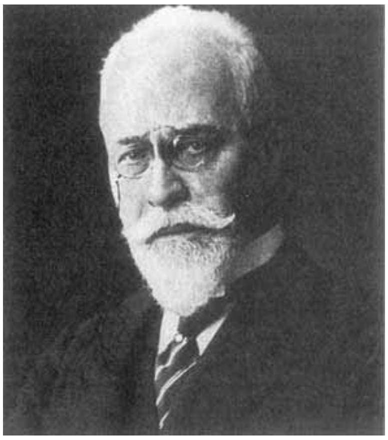
ძალზე საინტერესოა ის განსხვავება, რომელიც ამ მიმართულებით მათემატიკური აზროვნების განვითარების ორ ძირითად გზას შორის არსებობს. ერთი მიდგომა ძირითად ყურადღებას ამახვილებს კონუსური კვეთების აღწერასა და შესწავლაზე, ის უკავშირდება ისეთ სახელებს როგორებიცაა აპოლონიუსი, კეპლერი, გალილეი, ლამე, მინკოვსკი და ამ მიმართულების დღე-

გეორგ ფრიდრიხ ბერნჰარდ რიმანი (1826-1866)

ქრისტიან ჰიუგენსი (1629-1695)

ჰერმან ჰელმჰოლცი (1821-1894)

მარიუს სოფუსლი (1842-1899)



ჰერმან მინკოვსკი
(1864-1909)

ვანდელი შესწავლის ობიექტია აქ წარმოდგენილი ე.წ. ბუნებრივი წირები. მეორე მიმართულება ძირითად აქცენტს აკეთებს „გამოთვლებზე", თანაც ის საფუძვლად იღებს სამყაროს იზოტროპულობასა და ამ იდეის გეომეტრიულ სიმბოლოს ევკლიდურ წრეს, ანუ კლასიკურ ერთეულოვან წრეს. ამ მიმართულების აპოლოგეტებია არქიმედე, პტოლემაოსი, ნიუტონი და ფურიე.

საზოგადოდ მეცნიერული აზრის განვითარება გვამცნობს: ერთნი პოულობენ გამაერთიანებელ აღწერას, რომელსაც საფუძვლად უძევს კონუსური კვეთები (მაგ., გალილეი, კეპლერი), რაც შთააგონებს უდიდეს მათემატიკოსებს წრეზე და გამოთვლებზე დაყრდნობით განზოგადონ აღწერილი მეთოდები. ნიუტონის ერთერთ უდიდეს დამსახურებას წარმოადგენს ნებისმიერი ბრტყელი წირის სიმრუდის განსაზღვრა, რამაც შემდგომ შესაძლებლობა მიცა მას სთავისი პრინციპის დაფუძნებისა.

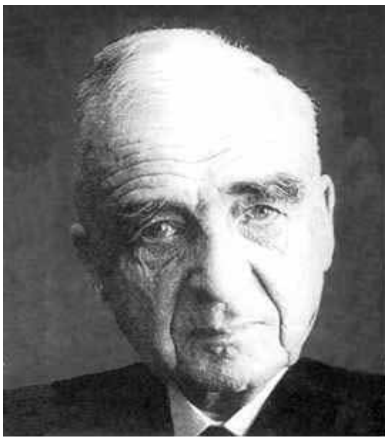
ესაა მომავლის ამოცანა: მოხდეს გადასვლა ბუნებაში არსებული ფორმების გაერთიანებული აღწერიდან (ანუ რაც იძლევა საშუალებას განხილული იქნას ბუნებაში არსებული ფორმები, კონუსური კვეთები), იმის გაგებისაკენ თუ რა განსაზღვრავს არსებულ ფორმებს. ამ გზას, თითქმის უცილობლად, მივყევართ გარეგანი და შინაგანი სიმრუდეების განსხვავებულობამდე (უტოლობამდე), და თუ როგორაა ის განხორციელებული გარემოში, და ეს ანალოგიურია ზედაპირებისათვის კარგად ცნობილი უტოლობისა $K \le H^2$, სადაც K არის გაუსის სიმრუდე და წარმოადგენს ორი **მთავარი სიმრუდის** საშუალო გეომეტრიულ მნიშვნელობის კვადრატს, ხოლო ამ სიდიდეების საშუალო არითმეტიკული მნიშვნელობაა (Verstraelen,2008; Gielis, 2010a, в). პარალელურად, მოსალოდნელია დიდი პროგრესი გარემოს იზოტროპიულობაზე დაფუძნებული გამოთვლითი მეთოდების დამუშავებაში.

დავიდ ჰილბერტი
(1862-1943)

გაბრიელ ლამეს მეცნიერება რაციონალურად უნიკალურია

ამ მიმართულებით ერთერთი მნიშვნელოვანი ნაბიჯი იყო ფურიეს მეთოდის გაფართოება სასაზღვრო ამოცანებისათვის. პ. ნატალინი (P. Natalini (et al, 2008)), და დ. კარატელი (D. Caratelli და თანაავტ., 2009, 2010)), განიხილეს, ჯიელისის წირების იდეაზე დაყრდნობით, ლაპლასის (და მასთან დაკავშირებული) განტოლების ფურიეს მეთოდით ამოსახსნელად ე.წ. „დეფორმირებული პოლარული კოორდინატები". გეომეტრიული თვალსაზრისით ძალზე მნიშვნელოვანია, რომ „თითქმის ყოველი ორ თუ სამგანზომილებიანი კლასიკური გაგებით პოლარული არე ზუსტად (ან ყოველ შემთხვევაში საკმარისი სიზუსტით მიახლოვებულად) აღიწერება ამგვარი წირებით". ეს კი საშუალებას იძლევა შესწავლილ იქნას სხვადასხვა კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებისათვის დასმული სასაზღვრო ამოცანები ისეთ არეებში, რომლებიც მაგალითად აკმაყოფილებენ ე.წ. ვარსკვლავის პირობას. ამგვარ არეებში დიდი ალბათობით ხდება შესაძლებელი მრავალი კლასიკური ამოცანისათვის ამონახსნების მოძებნის მეთოდების დამუშავება. არსებითად, ეს ნიშნავს, რომ მე-19 საუკუნის ოციანი წლებიდან მოყოლებული ხდება გაბრიელ ლამესა და ჟოზეფ ფურიეს მიდგომების შერწყმა.

ეს ზოგადი მეთოდოლოგია გამოყენებულ იქნა სხვადასხვა დიფერენციალური განტოლებისათვის დასმული შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანის (დირიხლე, ნეიმანი, რობენი) ამოხსნისათვის, ხოლო ამჟამად მეცნიერთა ჯგუფები ცდილობენ ამ მეთოდის გამოყენებას შედგენილი არეებისათვის დასმულ შერეული ტიპის დიფერენციალური განტოლებებისათვის. ლაპლასიანი (ლაპლასის ოპერატორი) უშუალოდ არის დამოკიდებული ზედაპირის საშუალო H სიმრუდეზე, რომელიც ამავდროულად წარმოადგენს გარემოს ზედაპირის დაჭიმულობის ზომას. ევკლიდურ E^3 სივრცეში M^2 ზედაპირებისათვის საშუალო სიმრუდე წარმოჩინდება ბელტრამის ფორმულაში:



პოლ ფინსლერი
(1894-1970)

$$\Delta\vec{v} = -2\vec{H}$$

სადაც $\vec{v}$ არის M^2 ზედაპირის რადიუს ვექტორი E^3-ში, $\overrightarrow{H}$- ლაპლასის ოპერატორი, ხოლო წარმოადგენს M^2 ზედაპირის საშუალო სიმრუდეს E^3-ში (Verstraelen, 2007).

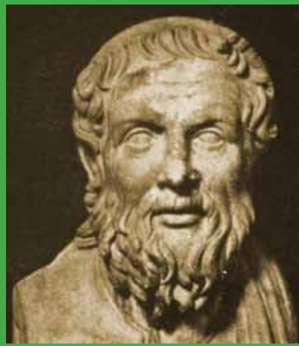
ლაპლასის განტოლება	$\Delta v = 0$
პუასონის განტოლება	$\Delta v = f$
ჰემჰოლცის განტოლება	$\Delta v + k^2 v = 0$
შრედინგერის განტოლება	$-\dfrac{h^2}{2m}\Delta\psi + V\psi = E\psi$
„ტალღის“ განტოლება	$v_{tt} = a^2 \Delta v$
სითბოგამტარებლობის განტოლება	$v_t = k\Delta v$

რაღაც აზრით არა მხოლოდ თავსდება ერთმანეთთან ლამესა და ფურიეს მიდგომები, არამედ აგრეთვე ვითარდება გაბრიელ ლამეს მიერ 1830 წელს დაწყებული პროგრამა. ლამე უშვებდა, რომ ფიზიკური მოვლენების შესწავლა მათემატიკური თვალთახედვიდან გამომდინარე, დაიყვანება მოვლენის შესაბამისი მრუდწირული კოორდინატების შესწავლაზე. მათემატიკურ ტერმინებში მრუდწირული კოორდინატები ასახავენ ფიზიკურ მოდელს (Guitart, 2009). ლამეს ნაშრომი მრუდწირული კოორდინატების შესახებ იყო ძალზე მნიშვნელოვანი და მან რეალურად განსაზღვრა მთელი მიმართულება (Struik, 1933); ლამეს ნაშრომი მრუდწირული კოორდინატების შესახებ იყო ძალზე მნიშვნელოვანი და მან რეალურად განსაზღვრა და მან განაზოგადა ეილერის მიერ სიბრტყეზე და გაუსის მიერ ზედაპირებზე დამუშავებული მეთოდები. ფიზიკური ამოცანების შესწავლა, რომელიც მორგებულია შესაბამის მრუდწირულ კოორდინატებზე და დაიყვანება დიფერენციალური ინვარიანტების დახასიათებაზე, რაც იმაში გამოიხატება, რომ ლაპლასის ოპერატორი წარმოდგენილ იქნას შესაბამის მრუდწირულ კოორდინატებში.

ამ შეხედულების თანახმად მხოლოდ ერთი, სახელდობრ პუასონის, განტოლება საჭიროებს ამოხსნას წარმოდგენილ მრუდწირულ კოორდინატებში შესაბამის სასაზღვრო პირობებში. სხვა განტოლებებისა და კანონების შესწავლა სპეციალურ შემთხვევებზე დაიყვანება (Guitart, 2009). წარმოდგენილი მეთოდები საშუალებას იძლევა გამოკვლევებისას კოოდინატთა სისტემები მორგებულ იქნას (ბუნებაში არსებულ) ფორმებზე. ჟიელისის წირები და ზედაპირები თავად წარმოადგენენ ბუნებრივ მრუდწირულ კოორდინატებს, რომლებიც „განასახიერებენ“ გაბრიელ ლამეს რაციონალურ და უნიკალურ მეცნიერებას ანუ მათემატიკურ ფიზიკას. ეს რაციონალური მეცნიერება უნიკალურია, იმ გაგებით, რომ **უნივერსალური ნატურალური ზედაპირებისა** და მორფოგენეზის გეომეტრიული თეორია ვითარდება იგივე სქემით და უზრუნველყოფს სამყაროში არსებული გეომეტრიული ფორმების მრავალფეროვნებას.

გეომეტრის მიერ დანახული სამყარო

ბუნებაში არსებული ფორმების შესწავლის ამ მიდგომის პირველ მიმართულებაში, შესაძლებელია მოიძებნოს განსხვავება დაძაბულობის მოხსნის ორ ურთიერთსაწინააღმდეგო მეთოდს შორის, რომელიც გარემოს ფორმაზე აისახება (Verstraelen, 2008). პირველი სტრატეგია გულისხმობს მივყვეთ დინებას და ამ შემთხვევაში ასოცირებული ფიგურაა წრე. მეორე, აბსოლუტურად



აპოლონიუსი
(262-190 ძვ. წ. აღ.)

კლავდიუს
პტოლემაოსი (83-161)

არქიმედე
(287-212 ძვ. წ. აღ.)

ჟან ბატისტ ჟოზეფ
ფურიე (1768-1830)

იოჰან კარლ ფრიდრიხ გაუსი (1777-1855)

ლეონარდ ეილერი (1707-1783)

საწინააღმდეგო, სტრატეგიაა დაძაბულობა (წინააღმდეგობის გაწევა) და შესაბამისად ასოცირებული ფიგურაა ლოგარითმული სპირალი (რომელიც დაკავშირებულია ჰარმონიულ, გნომონურ, ზრდასთან).

უბრუნდებით რა პარამეტრული სახით, პოლარულ კოორდინატებში ჩაწერილ ფორმულას, აღმოვაჩენთ, რომ აუცილებელია მხოლოდ ერთი სამართავი პარამეტრის ყოფაქცევის დადგენა, ესაა წრის შემთხვევაში რადიუსი r (= წირის სიმრუდის რადიუსი), ხოლო ლოგარითმიული სპირალის შემთხვევაში ესაა პარამეტრი k, რომელიც დაკავშირებულია იმ კუთხის სიდიდესთან, რომელსაც მხები ადგენს რადიუს ვექტორთან.

$x = r\cos\varphi$	$x = e^{k\varphi}\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$	$y = e^{k\varphi}\sin\varphi$

დასახელებული ორი ძირითადი სტრატეგიის არჩევანი გამომდინარეობს მოტანილი წარმოდგენიდან Gielis (2003a, b). წრისა და სპირალის ჯიელისის გარდაქმნით, ე.წ. მართვის დამატებითი პარამეტრის ვარირებით, შესაძლოა შეიქმნას მოდელი და აღწერილ იქნას ბუნებაში არსებული ფორმების ფართო სპექტრი. ლამესა და ჯიელისის წირებისა და (ჰიპერ-) ზედაპირების საშუალებით შემოტანილი „ფაქიზი“ ან იზოტროპია აღმოჩნდა „ევკლიდური გეომეტრიისათვის ყველაზე მისაღებ ბუნებრივ წირებად და ზედაპირებად“. წარმოდგენილი უნივერსალური საშუალებით შესაძლოა აღიწეროს ფართო სპექტრი ფორმებისა, რომლებიც საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში გვხვდება: პირველ ყოვლისა შემოდის „ევკლიდური“ გეომეტრიის ზოგიერთი პრინციპი, მეორე მხრივ, ჯიელისის ზოგიერთი გარდაქმნა არის ამ გეომეტრიული პრინციპების შედეგი (Verstraelen, 2008). ამგვარი ან იზოტროპიის მქონე ზედაპირები წარმოადგენენ წონასწორულ ზედაპირებს წონასწორობიდან ძალზე შორს მქონე გარემო პირობებში. ამ კლასის ფიგურებში ჩანს, რომ მათი ძირითადი გეომეტრიული იდეა არის n-მოცულობის (ორივეში ლოკალურისა და გლობალურის) შენარჩუნება, და ის აგრეთვე ევკლიდურია (Gielis, 2010a, 2010c).

საინტერესო სანახავია თუ როგორ ხდება არითმეტიკი ის (მიმატება, გამრავლება და საშუალოები) მარტივი წესების გამოყენებით ხარისხებისა და პარამეტრების ცვლილებით ბუნებაში არსებული ფორმების აღწერა. ნეპერის რიცხვისათვის ქვემოთ, ცხრილში, მოტანილია შესაბამისი მაგალითები. და თუ ავჯამავთ შესაბამისად x^n და y^n გამოსახულებებს მივიღებთ სუპერწრეებსა და სუპერელიფსებს, კლასიკურ კონუსურ კვეთებსა და ბუნებაში არსებულ ფორმებს (როდესაც განვაზოგადებთ სუპერწირებს) და თუკი გადავამრავლებთ ჩვენ მივიღებთ ხარისხოვანი ფუნქციებისა და კანონების მთელ სპექტრს, რომლებიც წარმოადგენენ სუპერპარაბოლებსა და სუპერჰიპერბოლებს. საფუძველთ საფუძველი კლასიკური კონუსური კვეთებია (Gielis, 2010c).

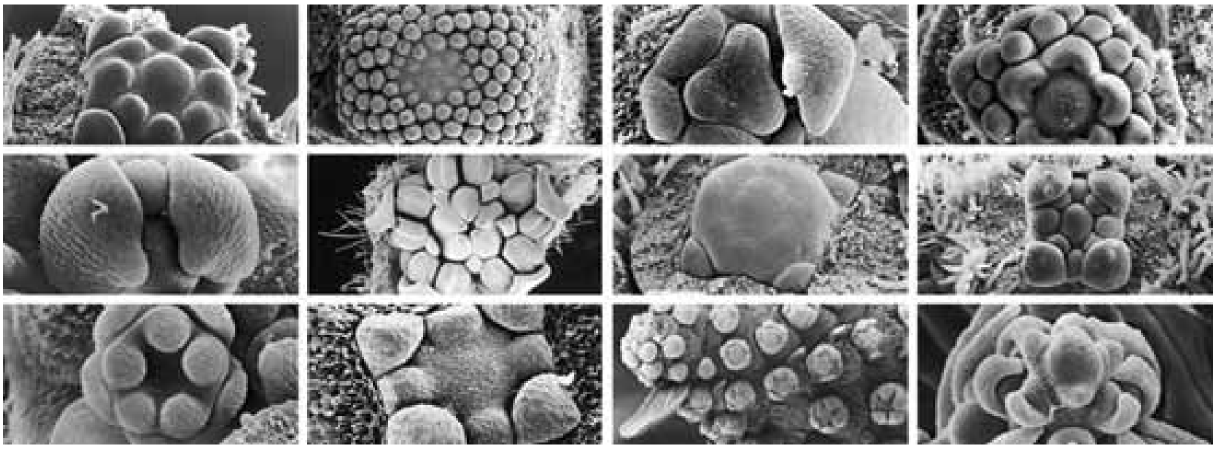
ფუქციები e^{φ} და $e^{-\varphi}$	პოლარული სიბრტყე	XY-სიბრტყე
შეკრება და არითმეტიკული საშუალო	ლოგარითმული სპირალი	კატენარი
გამრავლება და გეომეტრიული საშუალო	წრე	წრფე

ბუნებაში არსებული ფორმების შესწავლის ეს მიდგომა გვაბრუნებს გეომეტრიის ძირითადი იდეებისა, ცნებებისა და აღნიშვნების გადააზ-

ნახ. 3. *სპირალები და სუპერსპირალები ბუნებაში*

რებასთან. როგორც ალბერტ ეინშტეინი წერს: „ჩვენი გამოცდილება ამართლებს ჩვენს მოლოდინს, რომ ბუნებაში ხორციელდება მათემატიკური სიმარტივის იდეალი“.

ბერძნული საწყისი სიტყვების გეომეტრია და სიმეტრია (συμμετρια) არის სიტყვა — μετρεω (გაზომვა, შეფასება, გამოთვლა). ანტიკურ საბერძნეთში სიმეტრიას აქვს აგრეთვე ზმნის (συμμετρεω) მნიშვნელობა: ზომვა, შესაბამისობა, თანაზომადობა (Vlastos, 2005). ამგვარად გაჩნდა საერთო წესი, რომ აღიწეროს ზღვის ვარსკვლავი, სამკუთხედი, ცილინდრები და ყვავილები, . . , ისინი არიან შესაბამისობაში, ქმნიან რა ერთობლივად სამყაროს ანუ კოსმოსს (κ ο σ μ ο ς) უფრო მეტად გეომეტრიზებულს და სიმეტრიულს, უფრო მოწესრიგებულს და უფრო ლამაზს; — არის აგრეთვე ზმნა, და მისი არსი არა მხოლოდ მოწყობაა არამედ დასვენებაც; ამიტომაცაა ის ფუძე სიტყვისა კოსმეტიკა (Vlastos, 2005).

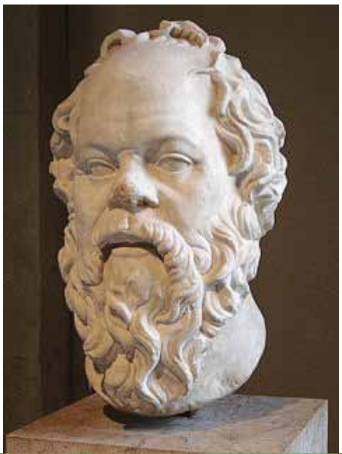


ნახ. 4. *წრეები და სპირალები ყვავილების კოკრების შემთხვევაში*

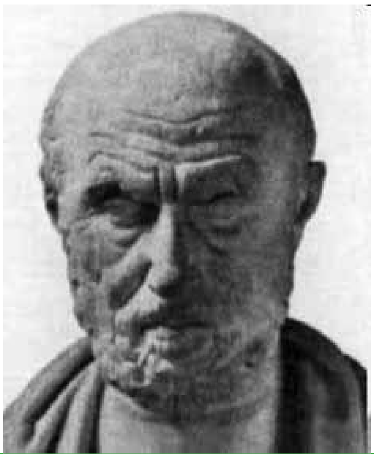
დიალოგი მათემატიკის არსის შესახებ

ავტორი ალფრედ რენიი
ინგლისურიდან თარგმნა ილია თავხელიძემ

არსებობს ამ ნაწარმოების კიდევ ერთი თარგმანი, რომელიც ეკუთვნის პროფესორ ფილიმონ ხარშილაძეს და ის მეოცე საუკუნის სამოცდაათიან წლებშია შესრულებული.



ნახ. 1. სოკრატე
(469-399 ძვ. წ. აღ.)



ნახ. 2. ჰიპოკრატე ხიოსელი
(470-410 ძვ. წ. აღ.)
ანტიკური სამყაროს
მათემატიკოსი

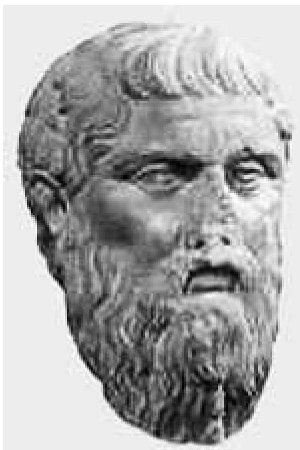
დიალოგი სოკრატესა და ჰიპოკრატეს შორის

სოკრატე — ძვირფასო ჰიპოკრატე შენ ვილაცას ეძებ?

ჰიპოკრატე — არა, ჩემო სოკრატე, რადგან უკვე ვიპოვნე ის, ვისაც ვეძებდი. პირადად შენ გეძებდი, ყველგან. ვილაცამ, აგორაზე, მითხრა, რომ განახა როგორ სეირნობდი მდინარე ილისოსის გაყოლებით. ასე რომ, მე კვალდაკვალ მოგყვებოდი.

ნახ. 3. *ათენი, მდინარე ილისოსი და აგორა — მხატვარი ე. დოუელი, 1821 წ.*

სოკრატე — მაშინ მითხარი, რატომ მოხვედი, მერე კი მინდა გკითხო ჩვენი პროტაგორასთან საუბრის შესახებ. ხომ გახსოვს ეს საუბარი (იგულისხმება პლატონის დიალოგი „პროტაგორა“ ი.თ.)?



ნახ. 4. *ფილოსოფოსი პროტაგორა (481-414 ძვ. წ. აღ.)*

„ადამიანი არის ყველაფრის საზომი; ადამიანი არის ყველაფრის ზომა“

ალფრედ რენიი (20.III.1921-1.II.1970)

გამოჩენილი უნგრელი მათემატიკოსი; დაამთავრა ბუდაპეშტის უნივერსიტეტი; 1947 წელს დაიცვა დოქტორის ხარისხი სეგედის უნივერსიტეტში გამოჩენილი მათემატიკოსის ფ. რიცის ხელმძღვანელობით; 1949 წლიდან მოყოლებული იყო დებრეცენის უნივერსიტეტის პროფესორი; დააფუძნა ბუდაპეშტის მათემატიკის ინსტიტუტი, რომელიც დღეს მისი სახელობისაა; მისი ძირითადი შრომები ეხება ალბათობის თეორიის, მათემატიკური სტატისტიკის, ინფორმაციის თეორიის, კომბინატორიკის და გრაფთა თეორიის საკვანძო საკითხებს; ინფორმაციის თეორიაში მის მიერ შემოღებულია სპექტრი (ე.წ. რენის ენტროპია), რომელიც წარმოადგენს "შენონის ენტროპიისა" და "კულბაკ-ლეიბლერის განსხვავების" განზოგადებას. დაწერა 32 სამეცნიერო ნაშრომი პოლ ერდოშთან ერთად, მათ შემოიტანეს "შემთხვევითი გრაფების ერდოშ-რენის მოდელი".

ჰიპოკრატე — ამას როგორ მეკითხები? მას შემდეგ დღე არ გასულა, რომ ამაზე არ მეფიქრა. დღეს კი შენთან რჩევისათვის მოვედი, რადგან ეს საუბარი თავიდან არ გამომდის.

სოკრატე — ეტყობა, ჩემო ჰიპოკტრატე, ჩვენ ერთნაირ საკითხებზე გვინდა საუბარი; ამრიგად, საუბრის ორი თემა სინამდვილეში ერთია. მეჩვენება, რომ მათემატიკოსები ცდებიან როდესაც თვლიან, რომ ორი არასოდეს არის ერთის ტოლი.

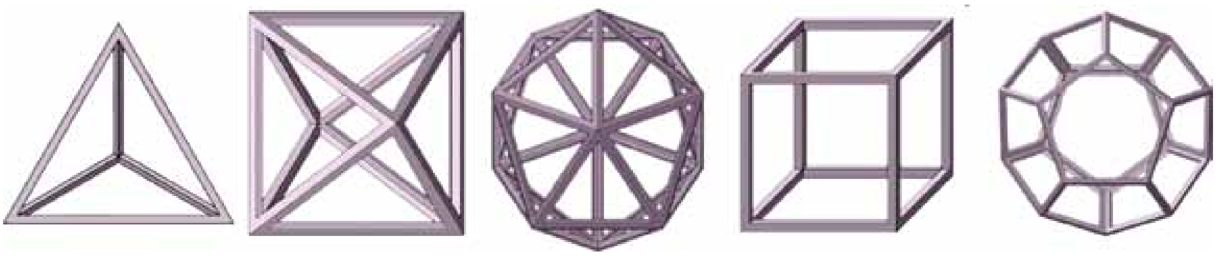
ჰიპოკრატე — საქმე იმაშია, ჩემო სოკრატე, რომ მათემატიკოსები როგორც ყოველთვის მართლები არიან.

სოკრატე — მაგრამ შენ, ჩემო ჰიპოკრატე, რა თქმა უნდა იცი, რომ მე მათემატიკოსი არა ვარ. რატომ არ დაუსვამ შენ შეკითხვებს გამოჩენილ თეოდორეს (თეოდორე კირენელი, V-IV საუკუნე ძვ.წ.აღ., გამოჩენილი ძველი ბერძენი მათემატიკოსი, პლატონის მასწავლებელი)?

ჰიპოკრატე — მე უბრალოდ გაოგნებული ვარ, ჩემო სოკრატე, შენ მპასუხობ შეკითხვებზე მანამ, სანამ მე დავსვამ მათ. არადა, მე ხომ სწორედ ამიტომაც ვარ მოსული შენთან, რომ გკითხო, ღირს კი, რომ თეოდორეს მოწაფედ მივებარო? წინა შეხვედრისას, როდესაც მე გადავწყვიტილი მქონდა პროტაგორას მოწაფე გავმხდარიყავი, ჩვენ ერთად წავედით მასთან და შენ ისე წარმართე საუბარი, რომ ცხადი გახდა — მან არ იცის საგანი, რომელზედაც მსჯელობს. რაღა თქმა უნდა, მე გადავიფიქრე და აღარ მივებარე მას. **ეს საუბარი დამეხმარა გამეგო რა არ უნდა მექნა, მაგრამ არ მიჩვენა, თუ რისი გაკეთება ღირს.** მე კი მინდა გავიგო ეს. უნდა გაგიბედო და გითხრა, ჩემ მეგობრებთან ერთად დავდივარ ნადიმებზე და პალესტრაში, დროს სასიამოვნოდ ვატარებ, მაგრამ სინამდვილეში ყველაფერი ეს, მე სიამოვნებას არ მანიჭებს. მე ვგრძნობ ჩემს უცოდინარობას. უფრო ზუსტად, მე ვგრძნობ, რომ ცოდნა, რომელიც გამაჩნია, საკმაოდ გაურკვეველია და დაულაგებელი. პროტაგორასთან საუბრისას ცხადი გახდა, რომ ჩემი ცოდნა კარგად ცნობილი კატეგორიების შესახებ ისეთების, როგორიცაა კეთილგონიერება, სამართლიანობა, სიქველე, ძალზე მწირია და საკმაოდ გაურკვეველი. მაგრამ ახლა, ყოველ შემთხვევაში, სრულად მესმის ჩემი უვიცობა.

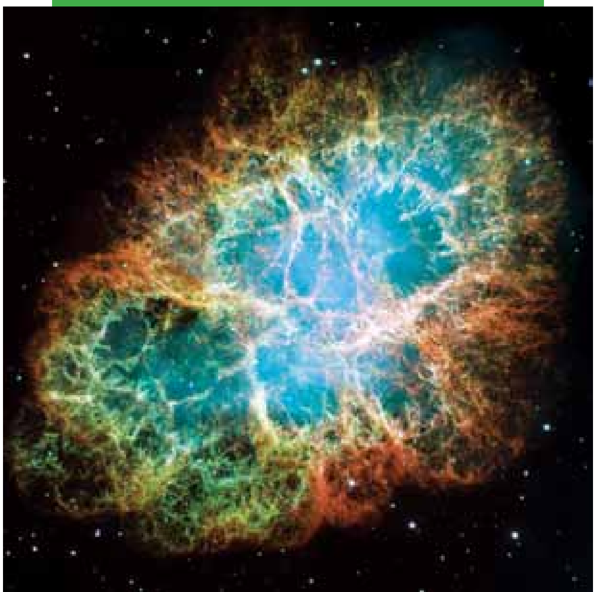
სოკრატე — მოხარული ვარ, ჩემო ძვირფასო ჰიპოკრატე, რომ ასე კარგად გესმის ჩემი. მე ყოველთვის ღიად ვეუბნები ჩემ თავს, რომ **მე არაფერი არ ვიცი. მე არც კი წარმომიდგენია, რომ დავიბრალო იმის ცოდნა, რაც სინამდვილეში ჩემთვის არაა ცნობილი.** ალბათ ესაა განსხვავება ჩემსა და უმეტესობა სხვა ადამიანებს შორის, რომელთა რაოდენობა, სამწუხაროდ, არც თუ ისე ცოტაა.

ჰიპოკრატე — ეს ამტკიცებს შენ სიბრძნეს, ჩემო სოკრატე. მაგრამ, ეს ჩემთვის არაა საკმარისი. მე ძალიან მინდა მივიღო სრულიად განსაზღვრული და საფუძვლიანი განათლება, და მე ვერ ვიქნები ბედნიერი, სანამ ამას არ მივაღწევ. მე მუდმივად ვფიქრობ იმ ცოდნის ბუნების შესახებ, რომელიც მე მინდა მივიღო. სულ ახლახან **თეატეტუსმა** თქვა, რომ **განსაზღვრული არსებობს მხოლოდ მათემატიკაში,** და მირჩია შემესწავლა ის მის მასწავლებელ თეოდორესთან, რიცხვთა თეორიისა და გეომეტრი-



ნახ. 5. თეატეტუს ათენელი *417-369 ძვ.წ.აღ — გამოჩენილი მათემატიკოსი*
თეორემა: არსებობს მხოლოდ 5 წესიერი ამოზნექილი მრავალწახნაგა!
(ტეტრაედრი, ოქტაედრი, იკოსაედრი, ჰექსაედრი, დოდეკაედრი)

ნახ. 6. *კუნძულიკოსი — „ექიმ ჰიპოკრატეს ჭადარი“*



ნახ. 7. *„კიბორჩხალსახის ნისლეული“ — დედამიწიდან დაშორებულია 6500 სინათლის წლის მანძილზე*

ის ყველაზე მცოდნე ადამიანთან ათენში. მე კი არ მსურს გავიმეორო ის შეცდომა, რომელიც პროტაგორასთან დაუშვი, როდესაც გადავწყვიტე, რომ მისი მოსწავლე გავმხდარიყავი. ამიტომაც, გთხოვ მითხარი ჩემო სოკრატე, მივიღებ კი საფუძვლიან ცოდნას, რომელსაც მე ვეძებ, თუ მე დავიწყებ მათემატიკის შესწავლას თეოდორესთან?

სოკრატე — ო აპოლოდორის შვილო, უკეთეს ვერაფერს გააკეთებ, თუ არა იმას, რომ მიებარო, ჩემ მეგობარს, პატივცემულ თეოდორეს. მხოლოდ ზუსტად უნდა გადაწყვიტო, მართლა გინდა თუ არა შენ მათემატიკის შესწავლა. ვერავინ, შენზე უკეთ, ვერ შეძლებს შეიცნოს შენი სურვილები.

ჰიპოკრატე — რატომ მეუბნები უარს დახმარებაზე, ჩემო სოკრატე? ეგებ უნებლიეთ გაწყენინე ისე, რომ ვერც კი შევნიშნე?

სოკრატე — შენ ვერ გამიგე, ჩემო ახალგაზრდა მეგობარო. მე არ გავბრაზებულვარ, მაგრამ შენ მე შეუძლებელს მთხოვ. ნებისმიერმა პიროვნებამ დამოუკიდებლად უნდა მიიღოს გადაწყვეტილება — რითი უნდა, რომ დაკავდეს. **მე შემიძლია მხოლოდ დაგეხმარო, როგორც მეანე მშობიარეს, შენი არჩევანის მიღებაში.**

ჰიპოკრატე — გემუდარები, უარი არ მითხრა, ძვირფასო სოკრატე, და თუ შენ ახლა თავისუფალი ხარ, დავიწყოთ საუბარი დაუყოვნებლივ.

სოკრატე — კეთილი, თუ შენ ასე დაბეჯითებით ითხოვ. მოდი ამ ჭადრის ჩრდილს შევაფაროთ თავი და დავიწყოთ. მაგრამ, თავდაპირველად მითხარი, თანახმა ხარ ვისაუბროთ ისე, როგორც ეს ჩემთვისაა ხელსაყრელი? მე მოგცემ შეკითხვებს, შენ კი მათზე გასცემ პასუხებს. შედეგად შენ უკეთ გაიგებ, რაც უკვე შეიცანი, აქედან კი აღმოცენდება ცოდნის მარცვლები, რომლებიც შენ სულშია განბნეული. იმედი მაქვს, შენ არ დაემგვანები მეფე დარიოსს, რომელმაც სიკვდილით დასაჯა სპილენძის მაღაროების უფროსი, რათა მან სპილენძის საბადოებიდან მხოლოდ სპილენძის მოპოვება შეძლო და არა ოქროსი, როგორც ეს მეფეს სურდა. იმედი მაქვს, შენ ყოველთვის გემახსოვრება, რომ მაღაროდან მხოლოდ იმის ამოღებაა შესაძლებელი, რასაც ის შეიცავს.

ჰიპოკრატე — ვფიცავ, რომ არაფერს არ დაგაყვედრი, მაგრამ, ზევსის გულისათვის, დავიწყოთ დაუყოვნებლივ.

სოკრატე — თანახმა ვარ. მხოლოდ მიპასუხე, იცი თუ არა შენ რა არის მათემატიკა? იმედი მაქვს, შენ შეძლებ მოიტანო მათემატიკის განსაზღვრება, რადგან აპირებ მის შესწავლას.

ჰიპოკრატე — ვფიქრობ, ბავშვიც კი შესძლებს ამის გაკეთებას. მათემატიკა — ერთერთი მეცნიერებაა, თანაც ერთერთი უმშვენიერეს მეცნიერებათაგანი.

სოკრატე — მე გთხოვე აღგეწერა მათემატიკის არსი და არა შეგექო ის. შესაძლოა უკეთ გაიგო, თუ რა მინდა გავარკვიოთ, თუ განვიხილავთ რაიმე სხვა მეცნიერებას, თუგინდ, მაგალითად, მედიცინას. აი მე, რომ მეკითხა შენთვის ექიმობის ხელოვნების შესახებ, შენ მიპასუხებდი, რომ მედიცინას საქმე აქვს ჯანმრთელობასთან და დაავადებებთან. მისი მიზანია — უმკურნალოს დაავადებულებს და დაიცვას ჯანმრთელები. ასე არაა?

ჰიპოკრატე — შენ მართალი ხარ.

სოკრატე — იმის შესახებ, თუ როგორ უნდა განასხვაონ და უმკურნალონ დაავადებებს იციან, მხოლოდ ექიმებმა, და მათთვისაც ჯერ კიდევ ძალიან ცოტა რამ არის ცნობილი. მაგრამ, მედიცინის ამოცანაც იმაში მდგომარეობს, რომ გაარკვიოს ყველაფერი ამის შესახებ. მათემატიკასთან საქმე ხომ სხვანაირადაა?

ჰიპოკრატე — გთხოვ, ამ შემთხვევაში ამიხსნა განსხვავება, რადგან მკაფიოდ ვერ ვხედავ.

სოკრატე — მაშინ მიპასუხე: მკურნალობის ხელოვნებას საქმე აქვს იმასთან, რაც არსებობს, თუ იმასთან, რაც არ არსებობს? ექიმები, რომ არ იყვნენ, მაშინ დაავადებებიც არ იქნებოდა?

ნახ. 8. ცოცხალი ორგანიზმები პროფ. ერნსტ ჰეკელის (1834-1919) ალბომიდან

ჰიპოკრატე — რა თქმა უნდა, იქნებოდა და უფრო მეტი, ვიდრე ახლაა.

სოკრატე — ახლა სხვა ხელოვნებას შევხედოთ, თუგინდაც მაგალითად, ასტრონომიას. მეთანხმები იმაში, რომ ასტრონომები შეისწავლიან ვარსკვლავთ მოძრაობას?

ჰიპოკრატე — მე ამაში დარწმუნებული ვარ.

სოკრატე — და რომ გკითხო — აქვთ თუ არა ასტრონომებს საქმე იმასთან, რაც არსებობს, როგორი იქნება შენი პასუხი?

ჰიპოკრატე — მე გიპასუხებ — დიახ.

სოკრატე — და იარსებებდა ვარსკვლავები, ასტრონომები, რომ არ ყოფილიყვნენ?

ჰიპოკრატე — რა თქმა უნდა. იმ შემთხვევაშიც კი, ზევსს სიბრაზეში მთელი კაცობრიობა, რომ მოესპო ვარსკვლავები მაინც იკიაფებდნენ ცაზე. მაგრამ, რატომ ვსაუბრობთ ასტრონომიის შესახებ და არა მათემატიკაზე?

სოკრატე — ნუ იქნები ასეთი მოუთმენელი, ძვირფასო მეგობარო. მოდი ვიმსჯელოთ ზოგიერთი სხვა ხელოვნების შესახებაც, რომ გვქონდეს საშუალება შევადაროთ ისინი მათემატიკას. რას დაარქმევ შენ ადამიანს, რომელმაც იცის ყველაფერი ცოცხალი არსებების შესახებ, რომლებიც ტყეებსა და ზღვის სიღრმეებში ცხოვრობენ?

ჰიპოკრატე — ესაა მეცნიერი, რომელიც ცოცხალ ბუნებას სწავლობს.

სოკრატე — შენ მეთანხმები, რომ ასეთი მეცნიერები სწავლობენ მხოლოდ იმას, რაც არსებობს?

ჰიპოკრატე — გეთანხმები.

სოკრატე — და რას დაარქმევ ადამიანს, რომელიც დაინტერესებულია მთის ქანებით და იცის, რომელი მათგანი შეიცავს რკინას?

ჰიპოკრატე — მინერალთ მცოდნეს.

სოკრატე — დაკავებულია თუ არა ეს ადამიანი იმით, რაც არსებობს, თუ იმით, რაც არ არსებობს?

ჰიპოკრატე — თავის თავად იგულისხმება, რომ იმით, რაც არსებობს.

სოკრატე — ახლა, შეგვიძლია თუ არა ვამტკიცით, რომ ყოველი მეცნიერება სწავლობს იმას, რაც არსებობს?

ჰიპოკრატე — მეჩვენება, რომ ეს ასეა.

სოკრატე — ახლა მითხარი, ჩემო ახალგაზრდა მეგობარო, რა არის მათემატიკის შესწავლის ობიექტი? რას სწავლობენ მათემატიკოსები?

ჰიპოკრატე — მე შევეკითხე ამის შესახებ თეატეტუსს. მან მიპასუხა, რომ მათემატიკა სწავლობს რიცხვებსა და გეომეტრიულ ფორმებს.

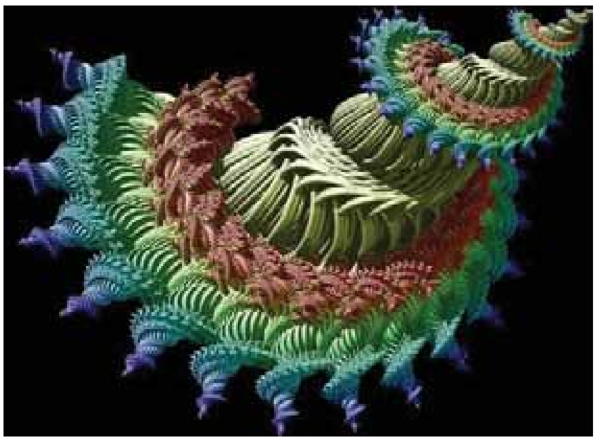
სოკრატე — პასუხი სწორია და შეუძლებელია უკეთესის მოძებნა, მაგრამ შეგვიძლია ვამტკიცოთ, რომ რიცხვები და ფორმები არსებობენ?

ჰიპოკრატე — რა თქმა უნდა. როგორ ვისაუბრებდით მათ შესახებ, ისინი რომ არ არსებობდნენ?

სოკრატე — მართალი ხარ. მაგრამ, აი რა მაწუხებს. განვიხილოთ, მაგალითად, მარტივი რიცხვები. არსებობენ ისინი, როგორც ვარსკვლავები ან თევზები? იარსებებდნენ კი მარტივი რიცხვები, მათემატიკოსები, რომ არ ყოფილიყვნენ?

ჰიპოკრატე — ახლა ვიწყებ იმის მიხვედრას, რაც გინდა, რომ მიხრა? ყველაფერი ისე მარტივად არაა, როგორც თავიდან მეგონა, და უნდა გამოგიტყდე, არც კი ვიცი, როგორ გიპასუხო ამ შეკითხვაზე.

სოკრატე — დავსვათ საკითხი ცოტა სხვაგვარად: თვლი თუ არა შენ, რომ ვარსკვლავები ცაზე მაინც ამოვლენ, მიუხედავად იმისა — დააკვირდება მათ ვინმე თუ არა, ხოლო თევზები გააგრძელებენ ცხოვრებას ზღვაში მიუხედავად იმისა, რომ ვინმე დაიჭერს თუ არა მათ?



***ნახ. 9.** სივრცული ფრაქტალი — გეომეტრიული ფიგურა*

ნახ. 10. *დრაკონი*

ნახ. 11. *ანტიკური კილიკი*

ჰიპოკრატე — რა თქმა უნდა?

სოკრატე — მაშინ მითხარი, მათემატიკოსები, რომ არ არსებობდნენ იქნებოდა თუ არა მარტივი რიცხვები და თუ იქნებოდა — სად?

ჰიპოკრატე — არც კი ვიცი რა ვთქვა. ცხადია, რომ მათემატიკოსები ფიქრობენ მარტივ რიცხვებზე და შესაბამისად ისინი არსებობენ მათ ცნობიერებაში, მაგრამ მათემატიკოსები, რომ არ არსებობდნენ, მაშინ მარტივი რიცხვებიც არ იარსებებდა.

სოკრატე — ნიშნავს თუ არა ეს, რომ მათემატიკა სწავლობს არარსებულ ცნებებს?

ჰიპოკრატე — ვაღიარებ, ჩვენ ესეთი მოსაზრება უნდა დაუშვათ.

სოკრატე — ვიქნები თუ არა მართალი, თუ მე ვიტყვი, რომ მათემატიკოსები დაკავებული არიან იმის შესწავლით, რაც ან საერთოდ არ არსებობს ან კი არსებობს, მაგრამ არა ისე როგორც ვარსკვლავები ან თევზები?

ჰიპოკრატე — სრულიად.

სოკრატე — ახლა განვიხილოთ ეს საკითხი სხვა კუთხით. მე დავწერე ცვილის დაფაზე რიცხვი 37. ხედავ მას?

ჰიპოკრატე — დიახ.

სოკრატე — და შენ შეგიძლია მას შეეხო?

ჰიპოკრატე — რა თქმა უნდა.

სოკრატე — ეს ნიშნავს, რომ რიცხვები არსებობს?

ჰიპოკრატე — დამცინი? ჩემო სოკრატე. მომისმინე! მე იმავე დაფაზე შვიდთავიანი დრაკონი, რომ დავხატო, ნუთუ ეს იმის მანიშნებელია, რომ ის არსებობს? მე არავინ შემხვედრია, ვისაც დრაკონი უნახავს. მე დარწმუნებული ვარ, რომ დრაკონები მხოლოდ ზღაპრებში არსებობენ. შესაძლოა, მე ვცდები, და დრაკონები სინამდვილეში არსებობენ, სადღაც ჰერაკლეს სვეტების გადაღმა მხარეს, რასაც ვერ იტყვი იმის შესახებ, რაც მე დავხატე.

სოკრატე — შენ მართალი ხარ, ჩემო ჰიპოკრატე, მე გეთანხმები. ესე იგი თუმცა ჩვენ ვსაუბრობთ რიცხვებზე და შეგვიძლია დავწეროთ კიდეც ისინი, სინამდვილეში ისინი არ არსებობენ?

ჰიპოკრატე — რა თქმა უნდა.

სოკრატე — არ გააკეთო ნაჩქარები დასკვნები. მოდი გადავწყვიტოთ ერთი საკითხი. მართალი ვარ თუ არა, როდესაც ვამბობ, რომ შეგვიძლია დავთვალოთ ცხვრები ველზე, ანდა კიდევ ხომალდები ნავსადგურში?

ჰიპოკრატე — დიახ.

სოკრატე — არსებობენ თუ არა ცხვრები და ხომალდები?

ჰიპოკრატე — ეჭვ გარეშეა!

სოკრატე — მაგრამ, თუ ცხვრები და ხომალდები არსებობენ, მათი რიცხვიც ხომ უნდა არსებობდეს, ასე არაა?

ჰიპოკრატე — დამცინი, ჩემო სოკრატე? მათემატიკოსები არ ითვლიან ცხვრებს, ეს ხომ მეცხვარეების საქმეა.

სოკრატე — შენ ფიქრობ, რომ მათემატიკოსები სწავლობენ არა ცხვრების, ხომალდებისა ანდა სხვა რეალური ობიექტების რაოდენობას, არამედ თავის თავად რიცხვებს? და, ამიტომ, ისინი ინტერესდებიან მხოლოდ იმით, რაც არსებობს მათ შემეცნებაში?

ჰიპოკრატე — მე ზუსტად ასე ვთვლი.

სოკრატე — შენ მითხარი, რომ თეატეტუსი თვლის, რომ მათემატიკა სწავლობს რიცხვებსა და გეომეტრიულ ფორმებს. შენ, რომ გკითხო, არსებობენ კი ფორმები? — რას მიპასუხებ?

ჰიპოკრატე — არსებობენ. ჩვენ შეგვიძლია დავინახოთ, მაგალითად ჭურჭლის მშვენიერი ფორმა, ხელით შევეხოთ მას და შევიგრძნოთ ის.

სოკრატე — დარჩა ერთი გაურკვეველი რამ. თუ შენ უყურებ ჭურჭელს, რას ხედავ შენ — ჭურჭელს თუ ფორმას?

ჰიპოკრატე — ერთსაც და მეორესაც.

სოკრატე — ასეთივე რამ ხდება, როდესაც შენ უყურებ ბატკანს. შენ ხომ ხედავ ერთდროულად ბატკანსაც და მის მატყლსაც?

ჰიპოკრატე — ეს ძალზე ზუსტი შედარებაა.

სოკრატე — მე კი ვფიქრობ, რომ ის, როგორც ჰეფესტო მოიკოჭლებს. შენ შეგიძლია გაკრიჭო ცხვარი და დაინახო ბატკანი მატყლის გარეშე და მატყლი ბატკნის გარეშე. მეორეს მხრივ, ამგვარადვე შეძლებ თუ არა შენ გამოაცალკევო

ფორმა ჭურჭლიდან?

ჰიპოკრატე — ვთვლი, რომ ეს არავის შეუძლია.

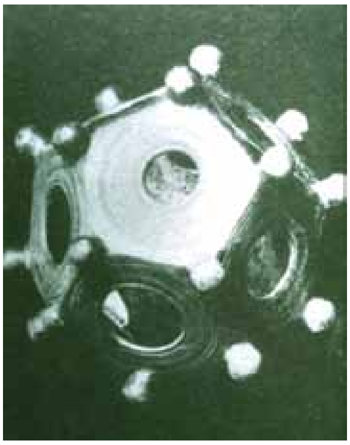
სოკრატე — და შენ კიდევ ხარ დარწმუნებული, რომ შესაძლებელია გეომეტრიული ფორმის დანახვა?

ჰიპოკრატე — ახლა უკვე ეჭვი მეპარება.

სოკრატე — გარდა ამისა, თუ მათემატიკოსები სწავლობენ ჭურჭლის ფორმას, ნიშნავს კი, რომ მათ შეგვიძლია დავარქვათ მეთუნეები?

ჰიპოკრატე — რა თქმა უნდა.

სოკრატე — მაშინ, თუ თეოდორე — საუკეთესო მათემატიკოსია, უნდა იყოს კი ის იმავდროულად საუკეთესო მეთუნე? ბევრი ადამიანი აქებს მას, მაგრამ ჯერ არავის არ უთქვია, რომ მას რაიმე მაინც გაეგება მეთუნეობაში. ვეჭვობ, რომ მან ყველაზე უბრალო ქოთანიც კი გააკეთოს. შეიძლება, მათემატიკოსებს საქმე აქვს შენობებისა ან ქანდაკებების ფორმებთან?



ნახ. 12. „ეტრუსკული დოდეკაედრი“ (500 წ. ძვ. აღ.) დანიშნულება უცნობია

ჰიპოკრატე — მაშინ ისინი არქიტექტორები ან კიდევ მოქანდაკეები იქნებოდნენ.

სოკრატე — ასეა, ჩემო მეგობარო, ჩვენ იმ დასკვნამდე მივედით, რომ მათემატიკოსები, შეისწავლიან რა გეომეტრიას, იკვლევენ არა რეალური ობიექტების ფორმებს, როგორებიცაა ჭურჭლები, არამედ ფორმებს, რომლებიც მხოლოდ მათ შემეცნებაში არსებობს. მეთანხმები?

ჰიპოკრატე — მე იძულებული ვარ დაგეთანხმო.

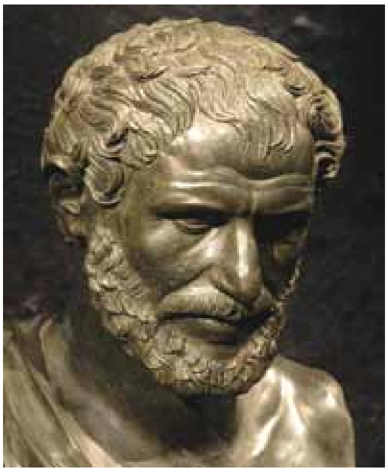
სოკრატე — ჩვენ დავადგინეთ, რომ მათემატიკოსები იკვლევენ ობიექტებს, რომლებიც არსებობენ არა რეალურად, არამედ მხოლოდ მათ აზრებში. ეხლა კი მოდი ვიმსჯელოთ თეატეტუსის იმ გამონათქვამზე, რომელიც შენ ადრე მოიტანე, რომ მათემატიკა იძლევა უფრო საიმედო და სარწმუნო ცოდნას, ვიდრე სხვა მეცნიერებები. მითხარი, მოიტანა თეატეტუსმა რაიმე მაგალითი?

ჰიპოკრატე — დიახ, მან თქვა, რომ არავის არ შეუძლია იცოდეს ზუსტი მანძილი ათენიდან სპარტამდე. რა თქმა უნდა, ადამიანები, რომლებიც მოგზაურობენ, იციან, რამდენი დღეა საჭირო ამ მანძილის გასავლელად, მაგრამ შეუძლებელია რომელიმე უბანზე ნაბიჯების ზუსტი რაოდენობის ცოდნა. მაგრამ ნებისმიერს, შეუძლია პითაგორას თეორემის საშუალებით კვადრატის დიაგონალის სიგრძის გამოთვლა. თეატეტუსმა კიდევ თქვა, რომ შეუძლებელია ელადის მაცხოვრებელთა ზუსტი რაოდენობის დათვლა. თუ ვინმე მაინც ეცდება გააკეთოს ეს, ის ვერ მიაღწევს რეალურ შედეგს, იმიტომ, რომ ამ დათვლის დროს ზოგირთი მოხუცებული ადამიანი გარდაიცვლება, ხოლო ამავდროულად დაიბადება ახალი თაობა, ამგვარად შედეგი იქნება მხოლოდ მიახლოებითი. მაგრამ, თუ მათემატიკოსს ჰკითხავ რამდენი წიბო აქვს წესიერ დოდეკაედრს, ის გიპასუხებს, რომ დოდეკაედრს 12 წახნაგი და თითოეულს ხუთი წიბო აქვს. ანუ ვღებულობთ, რომ 60 წიბოა, მაგრამ, რადგანაც თითოეული წიბო ერთდროულად ორ მეზობელ წახნაგს ეკუთვნის და შესაბამისად დათვლისას ორჯერაა ჩათვლილი, ამიტომ ვღებულობთ 30 წიბოს, და ეს რიცხვი, რაღა თქმა, უნდა ჭეშმარიტია.

სოკრატე — კიდევ რაიმე მაგალითი ხომ არ მოუტანია მას?

ჰიპოკრატე — მე ყველა არ მახსოვს. ის კიდევ ამბობდა, რომ ბუნებაში არ მოიძებნება ორი სრულიად ერთნაირი რაღაც. არ არსებობს ორი ერთნაირი კვერცხი, პოსეიდონის ტაძრის კოლონებიც კი ერთმანეთისაგან განსხვავდება. მაგრამ, უნდა ვიყოთ სრულიად დარწმუნებული, რომ მართკუთხედის ორი დიაგონალი ერთმანეთის აბსოლუტურად იდენტურია. ის ციტირებდა ჰერაკლიტეს, რომელმაც თქვა, რომ ყველაფერი არსებული მუდმივად იცვლება და ზუსტი მონაცემები შესაძლებელია მოვიპოვოთ მხოლოდ ცნებებზე, რომლებიც უცვლელი არიან, მაგალითად ლუწი და კენტი, ან წრფე და წრეწირი.

სოკრატე — საკმარისია. ეს მაგალითები მარწმუნებს, რომ მათემატიკაში ჩვენ მივიღებთ ისეთ ცოდნას, რომელიც უეჭველია, იმ დროს, როდესაც, სხვა მეცნიერებებში და ჩვეულებრივ ცხოვრებაში ეს შეუძლებელია. შევაჯამოთ ჩვენი გამოკვლევების შედეგები, მათემატიკის ბუნების შესახებ. მართალი ვარ თუ არა, როდესაც ვამბობ, რომ მათემატიკა სწავლობს არარსებულ ობიექტებს და შეუძლია სრულად აღწეროს ისინი?



ნახ. 13. ჰერაკლიტე (535-475 ძვ. წ. აღ.) „ერთ მდინარეში ორჯერ ვერ შეხვალ“

ჰიპოკრატე — დიახ, ზუსტად ეს დავადგინეთ.

სოკრატე — მაშინ მითხარი, ძვირფასო ჰიპოკრატე, გასაოცარი არაა, რომ ჩვენ ვიცით არარსებული ობიექტების შესახებ მეტი, ვიდრე რეალური ობიექტების შესახებ?

ჰიპოკრატე –ეს მართლაც უცნაურია! მე ვფიქრობ, რომ ჩვენს მსჯელობაში შეცდომა გაგვეპარა.

სოკრატე — არა, ჩვენ ძალზე ყურადღებიანები ვიყავით და ჩვენი მსჯელობისას ყოველ

ნაბიჯს გულდასმით ვამოწმებდით. აქ არ შეიძლება იყოს რაიმე შეცდომა. მაგრამ, მე მეჩვენება, რომ რაღაც გავიხსენე, და ეს დაგვეხმარება ჩვენი ამოცანის ამოხსნაში.

ჰიპოკრატე — თქვი ჩქარა, თორემ საერთოდ ამებნა თავგზა.

სოკრატე — დღეს დილით მე ვიყავი მეორე მოსამართლის დარბაზში, სადაც სოფელ პითოსის მაცხოვრებელი დურგლის ცოლს ბრალს დებდნენ ღალატსა და საყვარლის თანამონაწილეობით, ქმრის მკვლელობაში. ქალი კი იფიცებდა არტემიდასა და აფროდიტეს სახელებით, რომ უდანაშაულო იყო, რომ არავინ ქმრის გარდა არ ყვარებია, და რომ ის მძარცველების მიერ იყო მოკლული. მრავალი ადამიანი იყო გამოძახებული მოწმის სახით. ერთნი ამტკიცებდნენ, რომ ის დამნაშავეა, ხოლო მეორენი, რომ არა. და შეუძლებელი იყო სიმართლის დადგენა.

ჰიპოკრატე — შენ ისევ დამცინი? ჯერ თავგზა ამიბნიე, ახლა კი რაღაც ამბებს მიყვები.

სოკრატე — არ გაბრაზდე, ჩემო მეგობარო! მე სერიოზული საბაბი მაქვს, რომ გესაუბრო ამ ქალზე, რომლის დანაშაულის დადგენა შეუძლებელია. მაგრამ ერთი კი ცხადია: ქალი არსებობს, მე ის ჩემი თვალით ვნახე, და ყველა, ვინც იქ იყო, და ბევრ მათგანს არასოდეს ცხოვრებაში ტყუილი არ უთქვამს, ასევე დაგიდასტურებენ ამას.

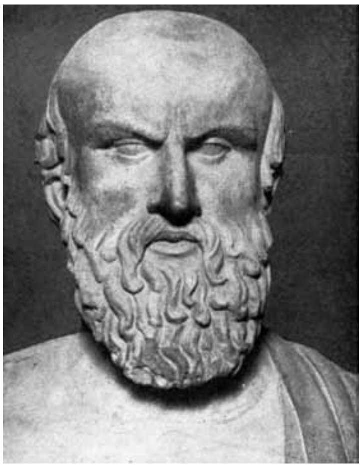
ჰიპოკრატე — შენი დამოწმება ჩემთვის სრულიად საკმარისია, ჩემო სოკრატე. დავუშვათ დამტკიცებულად ითვლება, რომ ქალი არსებობს. მაგრამ რა საერთო აქვს ამას მათემატიკასთან?

სოკრატე — უფრო მჭიდრო, ვიდე შენ გგონია. ოღონდ, ჯერ მითხარი: იცი თუ არა შენ გადმოცემა აგამემნონისა და კლიტემნესტრას შესახებ?

ჰიპოკრატე — ეს ისტორია ყველამ იცის. შარშან თეატრში მე ვნახე ესქილეს ტრილოგია.

სოკრატე — თუ შეიძლება მომიყევი რამდენიმე სიტყვით ეს ისტორია.

ჰიპოკრატე — სანამ აგამემნონი, მიკენეს მეფე, იბრძოდა



ნახ. 14. *ტრაგიკოსი ესქილე (525-456 ძვ. წ. აღ.)*

ნახ. 15. *არქიტასი ტარენტოდან (ძვ.წ.აღ. 428 — ძვ.წ.აღ. 347) ფილოსოფოსი, მათემატიკოსი და ასტრონომი, პლატონის თანამედროვე, გამოთქვა აზრი სამყაროს ჰელიოცენტრულობისა და უსასრულობის შესახებ!*

ნახ. 16. *ზღვაოსანი კოლუმბი (1451-1506)*

ტროას კედლებთან, მისმა ცოლმა კლიტემნესტრამ უღალატა, მის ბიძაშვილ, ეგისთესთან. როდესაც აგამემნონი სახლში დაბრუნდა, ტროას დაცემის შემდეგ, კლიტემნესტრამ და მისმა საყვარელმა ის მოკლეს.

სოკრატე — მითხარი, ჩემო ჰიპოკრატე, შენ დარწმუნებული ხარ, რომ კლიტემნესტრა დამნაშავეა?

ჰიპოკრატე — არ მესმის შენი, რატომ მისვამ ასეთ შეკითხვას? ამ ისტორიის ჭესმარიტება უდავოა. ჰომეროსის თანახმად, როდესაც ოდისევსი ჰადესში იმყოფებოდა, ის შეხვდა აგამემნონს და მან თვითონ მოუყვა თავისი სამწუხარო ბედის შესახებ.

სოკრატე — და შენ გჯერა, რომ აგამემნონი, კლიტემნესტრა და ამ ტრაგედიის დანარჩენი სხვა პერსონაჟები მართლა არსებობდნენ?

ჰიპოკრატე — შესაძლოა, მე გამაძევონ საზოგადოებიდან, მე რომ საჯაროდ განვაცხადო, მაგრამ ჩემი აზრი ასეთია, რომ ამდენი საუკუნის გასვლის შემდეგ შეუძლებელია დამტკიცება ან უარყოფა ჰომეროსის პოემებში მოტანილი ფაქტების ჭეშმარიტებისა. მაგრამ, ეს ხომ ჩვენ საქმეს არ ეხება. როდესაც ვამბობ, რომ კლიტემნესტრა დამნაშავეა, ვგულისხმობ არა რეალურ კლიტემნესტრას, თუ ის სადმე და როდესმე არსებობდა, არამედ კლიტემნესტრას ჰომეროსის პოემიდან, ან ესქილეს ტრილოგიიდან.

სოკრატე — შემიძლია ვთქვა, რომ ჩვენ არაფერი არ ვიცით რეალურ კლიტემნესტრაზე? უფრო მეტიც, მისი არსებობაც კი ეჭვქვეშაა, მაგრამ, მისი, როგორც ესქილეს ტრაგედიის პერსონაჟის განხილვისას, ჩვენ დარწმუნებული ვართ, რომ ის მზაკვარი ქალია და მართლა მოკლა აგამემნონი, იმიტომ, რომ ზუსტად ასე მოგვიყვა ესქილემ.

ჰიპოკრატე — გეთანხმები. მაგრამ, რატომაა, რომ დაბეჯითებით ხაზს უსვამ ამას?

სოკრატე — მოიცა. ჯერ შევაჯამოთ ყველაფერი, რაც გავარკვიეთ. ჩვენ ვერ ვამტკიცებთ, დღესდღეისობით,

არის თუ არა დამნაშავე ათენში მაცხოვრებელი, რეალურად არსებული, ცოცხალი ქალი, მაგრამ ამავე დროს ეჭვიც არ გვეპარება, რომ ტრაგედიის პერსონაჟი — კლიტემნესტრა, რომელიც შესაძლოა, საერთოდ არც კი არსებობდა, დამნაშავეა. ამაში მეთანხმები?

ჰიპოკრატე — მე ვხვდები რის თქმას აპირებ, მაგრამ უკეთესი იქნება, თუ შენვე გააკეთებ დასკვნებს.

სოკრატე — დასკვნა ასეთია: ჩვენთვის უფრო მეტი რამ არის ცნობილი იმ ადამიანებზე, რომლებიც მხოლოდ წარმოდგენაში არსებობენ, მაგალითად პიესების პერსონაჟებზე, ვიდრე რეალურ ადამიანებზე. თუ ჩვენ ვამბობთ, რომ კლიტემნესტრა დამნაშავეა, ვინაიდან ასე გამოსახა ესქილემ თავის პიესაში. იგივე მდგომარეობაა მათემატიკაში. აქ დარწმუნებული ვართ, რომ მართკუთხედის დიაგონალები აბსოლუტურად იდენტურია, რადგან მათემატიკოსების მიერ დადგენილი მართკუთხედის განმარტება ასეთია.

ჰიპოკრატე — ჩემო სოკრატე, შენ მხედველობაში გაქვს, რომ პარადოქსული შედეგი, რომელიც მივიღეთ მართლა ჭეშმარიტებაა. გამოდის, რომ შესაძლოა ვიქონიოთ უფრო მეტი გარკვეული ცოდნა არარსებულზე, მაგალითად მათემატიკურ ცნებებზე, ვიდრე არსებულ ობიექტებზე? მეჩვენება, რომ ახლა უკვე მესმის, რატომ გამოდის ასე. ცნებები, რომლებიც ჩვენ თვითონ შევქმენით, ჩვენთვის სრულადაა ცნობილი თაავისი ბუნებით, ასევე შეგვიძლია მათ ირგვლივ გავიგოთ ყველაფერი, რადგან მათ არ გააჩნიათ სხვა ცხოვრება, თუ არა ჩვენივე წარმოდგენაში. რეალურ სამყაროში არსებული ობიექტები, კი არ არიან ჩვენი მათზე წარმოდგენების ტოლფასნი, ამიტომაცაა, რომ ჩვენი ცოდნა რეალურად არსებულ ობიექტებზე არასოდეს არ შეიძლება იყოს ამომწურავი და საბოლოო.

ნახ.17. *ფერმწერი ჯორჯონე (1477-1516)*

სოკრატე — სავსებით გეთანხმები, ჩემო ძვირფასო მეგობარო, შენ უკეთესად თქვი, ვიდრე მე თვითონ შევძლებდი ამას.

ჰიპოკრატე — ეს შენი დამსახურებაა, ჩემო სოკრატე, იმიტომ, რომ დამეხმარე გავრკვეულიყავი. ახლა მე არა მარტო ვხედავ, რომ თეატეტუსი სრულიად მართალი იყო, როდესაც მირჩევდა შემესწავლა მათემატიკა, თუკი მსურდა მიმეღო საიმედო ცოდნა. ამ საუბრის წყალობით არა მარტო ვხედავ, არამედ ვიცი კიდეც, რატომ იყო ის მართალი. ბევრი რამ განმიმარტე მოთმინებით და დიდად გემადლიერები ამისათვის, მაგრამ გთხოვ, არ მიმატოვო ახლა, რადგან ჩემთვის ყველაზე მნიშვნელოვანი კითხვა, ჯერ კიდევ პასუხგაუცემელია.

სოკრატე — რომელი კითხვა?

ჰიპოკრატე — გაიხსენე, ჩემო სოკრატე, აქ ხომ რჩევის მისაღებად მოვედი, შევისწავლო თუ არა მე მათემატიკა? შენ დამეხმარე იმის გაგებაში, რომ მათემატიკა და მხოლოდ მათემატიკა შეძლებს მომცეს საფუძვლიანი ცოდნა, რომელიც მე მინდა, რომ მქონდეს. მაგრამ რა სარგებელია ამ ცოდნისაგან? ცხადია, რეალური სამყაროს შესახებ გარკვეული ცოდნა, თუგინდ არასრული და არაამომწურავი, მაინც ღირებულია, როგორც ერთი ადამიანისათვის, ასევე მთელი ქვეყნისათვისაც. ვარსკვლავების შესწავლაც კი სასარგებლოა, მაგალითად ზღვაოსნებისათვის. მაგრამ რა სარგებელი აქვს არარსებული ობიექტების შესწავლას, რითიც არის დაკავებული მათემატიკა?

სოკრატე — ჩემო ძვირფასო მეგობარო, დარწმუნებული ვარ, რომ შენც იცი პასუხი და მხოლოდ გინდა შემამოწმო.

ჰიპოკრატე — ვფიცავ ჰერაკლეს, მე არ ვიცი პასუხი. გთხოვ დამეხმარე.

სოკრატე — თანახმა ვარ. შევეცადოთ ვიპოვნოთ ის. ჩვენ უკვე დავრწმუნდით, რომ მათემატიკური ცნებები შექმნილია მათემატიკოსების მიერ. მაგრამ, ირჩევს თუ არა მატემატიკოსი ამ ცნებებს თავისი სურვილისამებრ?

ჰიპოკრატე — მე უკვე გითხარი, რომ ჯერ არ ვიცი მათემატიკა საკმარისად. მაგრამ მეჩვენება, რომ მათემატიკოსი ისეთივე თავისუფალია თავისი საკვლევი ობიექტების არჩევისას, როგორც პოეტია თავისუფალი პერსონაჟების არჩევისას თავისი პიესისათვის, პოეტი თავისი ნების მიხედვით ურჩევს პერსონაჟებს ხასიათს. ასევე იქცევა მათემატიკოსი და იმდაგვარადვე ანიჭებს ცნებებს სასურველ თვისებებს.

სოკრატე — მაგრამ, მაშინ იმდენი მათემატიკური ჭეშმარიტება იარსებებდა, რამდენიც თვით მათემატიკოსი. აბა როგორ ახსნი იმ გარემოებას, რომ მათემატიკოსები შეისწავლიან ერთი და იგივე ცნებებსა და პრობლემებს? ან რატომაა, რომ ხშირად მათემატიკოსები, რომლებიც ერთმანეთისაგან დაშორებით ცხოვრობენ და ერთმანეთს არც კი იცნობენ, აღმოაჩენენ ერთიდაიგივე ჭეშმარიტებებს და შეისწავლიან ერთი და იგივე ცნებებს? თუ რიცხვებზე ლაპარაკობენ, მხედველობაში ერთი და იგივე რიცხვები აქვთ, ხოლო წრფეები, წრეები, კვადრატები, ბირთვები და წესიერი სხეულები ყველასათვის ერთნაირია.

ჰიპოკრატე — იქნებ ეს იმით შეიძლება აიხსნას, რომ ყველა ადამიანი ერთნაირად ფიქრობს და რაღაცეებზე მსგავსი წარმოუდგენები აქვთ?

სოკრატე — ძვირფასო ჰიპოკრატე, ჩვენ ვერ მივიღებთ სასურველ ახსნას მანამ, სანამ, არ განვიხილავთ განსჯის საგანს ყველა თვალსაზრისიდან. როგორ ავხსნათ ის ხშირი მოვლენა, როდესაც მათემატიკოსები, რომლებიც ერთ-

მანეთისაგან შორი-შორს ცხოვრობენ, ვთქვათ ერთი ტარენტოში და მეორე კუნძულ სამოსზე, აღმოაჩინენ ერთი და იგივე ჭეშმარიტებას ისე, რომ არც კი იცნობენ ერთმანეთს? ამავ დროულად მე არასოდეს არ გამიგია, რომ ორ პოეტს დაეწეროს ერთი და იგივე პოემა.

ჰიპოკრატე — მეც არ გამიგია ასეთი შემთხვევის შესახებ. მაგრამ მახსენდება, რომ თეატეტუსმა მიამბო მის მიერ დამტკიცებული, ძალზე საინტერესო თეორემის შესახებ, რომელიც არათანაზომად სიდიდეებს შეეხება. ეს თეორემა გააცნო თავის მასწავლებელ თეოდორეს. მან კი თავის მხრივ ამოიღო წერილი, რომელიც მას არქიტასმა მოწერა, რომელშიც თითქმის სიტყვასიტყვით იყო მოტანილი იგივე მტკიცება.

სოკრატე — პოეზიაში ეს შეუძლებელია. აი, ხომ ხედავ, გაჩნდა ახალი პრობლემა. განვაგრძოთ, როგორ ახსნი იმას, რომ სხვადასხვა ქვეყნის მათემატიკოსები ყოველთვის თანხმდებიან მათემატიკური ჭეშმარიტებების შესახებ, იმ დროს როდესაც სახელმწიფო საკითხებში, მაგალითად სპარსელებს და სპარტანელებს სრულიად საწინააღმდეგო თვალსაზრისი გააჩნიათ ათენელებისაგან, და უფრო მეტიც, ხშირად ადამიანები, ერთმანეთშიც კი ვერ ვთანხმდებით?

ჰიპოკრატე — ბოლო კითხვაზე მე გიპასუხებ. სახელმწიფო საქმეებში, ნებისმიერი ადამიანი შეიძლება დაინტერესდეს. ეს კერძო ინტერესები ხანდახან ძალზე ურთიერთგამომრიცხავია. აი, რატომაა ძნელი თანხმობის მიღწევა. მათემატიკოსი კი ხელმძღვანელობს უბრალოდ ჭეშმარიტებისკენ სწრაფვით.

სოკრატე — შენ გინდა თქვა, რომ მათემატიკოსები ცდილობენ ჭეშმარიტების პოვნას, რომელიც სრულებით არ არის დამოკიდებული მათ საკუთარ ინტერესებზე?

ჰიპოკრატე — დიახ.

სოკრატე — მაშინ შეცდომით ვფიქრობდით, რომ მათემატიკოსები ირჩევენ თავისი კვლევის ობიექტებს თავისი სურვილისამებრ. გამოდის, რომ მათი შესწავლის ობიექტს გააჩნია არსებობის რამდენიმე ფორმა და ისინი არ არიან დამოკიდებული მათემატიკოსის პიროვნებაზე. ჩვენ უნდა ამოვხსნათ ეს ახალი გამოცანა.

ჰიპოკრატე — მე არც კი ვიცი რითი დავიწყოთ.

სოკრატე — თუ კიდევ შეგრჩა მოთმინება, მაშინ მოდი ერთად შევეცადოთ. ჯერ მითხარი, რა საერთოა უკაცრიელი კუნძულის მაძებარ ზღვაოსანსა და ახალი საღებავის, რომელიც არასოდეს ყოფილა გამოყენებული, მაძიებელ ფერმწერს შორის?

ჰიპოკრატე — მე მგონი, რომ ისინი ამდიდრებენ კაცობრიობას აღმოჩენებით.

სოკრატე — მაგრამ, შენი აზრით, რაში მდგომარებს სხვაობა?

ჰიპოკრატე — მე ვფიქრობ, რომ ზღვაოსანს შეგვიძლია ვუწოდოთ აღმომჩენი, ხოლო ფერმწერს — გამომგონებელი. ზღვაოსანმა აღმოაჩინა კუნძული, რომელიც არავისათვის არ იყო ცნობილი, მაგრამ ის არსებობდა. ფერმწერმა კი გამოიგონა აქამდე არარსებული ახალი საღებავი.

სოკრატე — არავის შეეძლო ეპასუხა ამ კითხვაზე შენზე უკეთესად. მაგრამ, მითხარი, ახალი ჭეშმარიტების მაძიებელი მათემატიკოსი აღმოაჩენს თუ იგონებს? აღმომჩენია ის, როგორც მეზღვაური, თუ გამომგონებელი როგორც, ფერმწერი?

ჰიპოკრატე — მე ვერ გიპასუხებ მაგ შეკითხვაზე, რადგან არავითარი საკუთარი გამოცდილება არ გამაჩნია. მაგრამ, თეატეტუსმა მომიყვა მისი და თეოდორეს საერთო გამოკვლევების შესახებ, რის შედეგადაც ვფიქრობ, რომ მათემატიკოსი უნდა ჩავთვალოთ უფრო აღმომჩენად, რომელიც რაღაცით გამომგონებელსაც ჰგავს.

სოკრატე — კარგადაა ნათქვამი. მეჩვენება, რომ მათემატიკოსი თანაბრადაა აღმომჩენიცა და გამომგონებელიც. მაგრამ, რატომ მიპასუხე ასე სწრაფად? შენ გინდოდა გეთქვა, რომ მატემატიკოსი გარკვეული აზრით აგრეთვე გამომგონებელიცაა?

ჰიპოკრატე — მათემატიკოსი თვითონ ქმნის ცნებებს, რომელსაც ის სწავლობს. ამასთან, როდესაც მათემატიკოსი ქმნის ახალ ცნებას, ის იქცევა როგორც გამომგონებელი. ხოლო, როდესაც ის სწავლობს ცნებას, რომელიც თავის ან სხვის მიერაა შემოღებული, ანდა როდესაც ის აყალიბებს მათემატიკის ენაზე ახალ თეორემას და ამტკიცებს მას, ის იქცევა, როგორც აღმომჩენი. ყველაფერი იმის შემდეგ რაც თეატეტუსმა მომიყვა, თეორემის "აღმოჩენა" მათემატიკოსების ცხოვრებაში, როგორც ჩანს, უფრო მნიშვნელოვან როლს თამაშობს, ვიდრე ცნების "გამოგონება", რადგან ყველაზე მარტივი ცნებები, მაგალითად რიცხვის ცნებასა და მისი გაყოფადობას მივყევართ მრავალ ძალზე ღრმა და რთულ პრობლემებამდე, რომელთა მხოლოდ მცირე ნაწილის ამოხსნა შეძლეს დღეისათვის მათემატიკოსებმა.

სოკრატე — ცხადია, ძვირფასო ჰიპოკრატე, როგორც ვხედავ, შენმა მეგობარმა თეატეტუსმა უკვე ბევრის შესწავლა მოასწრო წარმატებულად. მეჩვენება, რომ მათემატიკოსი უფრო წააგავს აღმომჩენს. ის — მამაცი ზღვაოსანია, რომელიც უცნობ ზღვაში დაცურავს და იკვლევს უცნობ სანაპიროებს, კუნძულებსა და მორევებს. მე მინდა მხოლოდ დავამატო, რომ მათემატიკოსი რაღაცა აზრით გამომგონებელიცაა, განსაკუთრებით მაშინ, როდესაც მას ახალი ცნებები შემოაქვს. აკი ნებისმიერი აღმომჩენი, რაღაცა აზრით, გამომგონებელიც უნდა იყოს. მან უნდა ააგოს ხომალდი, რომელიც მანამდე არსებულებს აჯობებს. მათემატიკოსების მიერ შემოღებული ახალი ცნებები ამგვარი ხომალდების სადარია, ისინი მკვლევარს ეხმარებიან აზრთა უსაზღვრო ოკეანეში. მაგრამ უპირველეს ყოვლისა, მათემატიკოსი აღმომჩენია; ის იმდენადაა გამომგონებელი, რამდენადაც ეს საჭიროა აღმოჩენისათვის.

ჰიპოკრატე — ჩემო ძვირფასო სოკრატე, მე დარწმუნებული ვარ, რომ ათენსა და მთელს ელადაშიც კი არ მოიპოვება ადამიანი, რომელიც ფლობს საუბრის შენნაირ ხელოვნებას. ყოველ ჯერზე, როდესაც შენ განსჯი ჩემს სიტყვებს, შენ

ამბობ იმას, რასაც მე შესაძლოა ვეჭვობ, მაგრამ ვერ გამოვხატავ ასეთი სიცხადით. შენი დასკვნიდან გამოდის, რომ მათემატიკოსის მთავარი მიზანი — ადამიანთა აზროვნების საიდუმლოებებისა და გამოცანების ოკეანის გამოკვლევაა. ისინი მათემატიკოსის პიროვნების გარეშეც არსებობენ, მაგრამ არა ზოგადად კაცობრიობის გარეშე. მათემატიკოსს შეუძლია შემოიტანოს თავისი შეხედულებისამებრ ახალი ცნებები, როგორც დამხმარე სამუშაო ინსტრუმენტები. მაგრამ ის არც ისე თავისუფალია თავის არჩევანში, რადგან ახალი ცნებები მისი საქმისათვის სასარგებლო უნდა იყოს. ასეთივე წარმატებით, ზღვაოსანსაც შეუძლია ააგოს, თავისი შეხედულებისამებრ, ნებისმიერი ახალი ხომალდი, მაგრამ ჩვენ მას გიჟათ ჩავთვლით, თუ ის ააგებს ხომალდს ისე, რომ ის პირველივე შტორმში ნაწილებად დაიშლება. ახლა, მგონი, ყველაფერი ცხადია.

სოკრატე — თუ ასე ცხადად წარმოგიდგენია ყველაფერი, კვლავ ცადე და გაეცი შემდეგ კითხვას პასუხი, — რას შეისწავლის მათემატიკა?

ჰიპოკრატე — შევეცდები, თუნმცა ეს ისევ არასრული პასუხი იქნება. ვინაიდან მე ისევ და ისევ ჭეშმარიტების მხოლოდ ნაწილი მესმის.

სოკრატე — მაშ თამამად! მამაცი ზღვაოსანივით წინ გასწი!

ჰიპოკრატე — ახლა ვხედავ, ჩვენ აქამდე მცდარად ვამტკიცებდით, რომ მათემატიკა განიხილავს რეალობაში არარსებულ ობიექტებს. ეს ობიექტები არსებობენ, როგორც ქვა ან ხე. ჩვენ არ შევიძლია დავინახოთ ისინი ან შევეხოთ მათ. ჩვენ მხოლოდ შევძლებთ აზრით მოვიცვათ ისინი. არსებობს სხვა სამყარო — სამყარო მათემატიკისა, განსხვავებული იმისაგან, რომელშიც ჩვენ ვცხოვრობთ. ხოლო მათემატიკოსი კი მამაცი ზღვაოსანია, რომელიც მიუყვება გაუკვალავ გზას და არ უფრთხის სიძნელეებს, ხიფათებსა და რისკს, რომელიც მას ამ მოგზაურობაში ელოდება.

სოკრატე — ჩემო მეგობარო, შენმა ახალგაზრდულმა ენერგიამ თითქმის წამაქცია, მაგრამ ვფიქრობ, ენუზიაზმით აღტყინებული, შენ ვერ შეამჩნიე ზოგიერთი საკითხი.

ჰიპოკრატე — ჩემო სოკრატე, უკვე იმდენი დრო დამითმე, მაგრამ გთხოვ, ნუ მიმატოვებ შუა გზაზე, გთხოვ, მითხარი რა დამავიწყდა?

სოკრატე — მეჩვენება, რომ ჩვენ ჯერ კიდევ ვერ ვიპოვნეთ პასუხი შენ კითხვაზე. ალბათ ორივეს ახლა უკეთ გვესმის რა არის მათემატიკა. მაგრამ პასუხი შეკითხვაზე მათემატიკის აზრისა და მიზნის, ადამიანის აზრების ოკეანის შესახებ ჯერ ჩვენ არ გაგვიცია.

ჰიპოკრატე — შენ მართალი ხარ. მე დავრწმუნდი, რომ მათემატიკის შესწავლისას ვიძენ ფუძემდებლურ, საიმედო ცოდნას. როდესაც მე ჩავეფლობი ამ საოცარ სამყაროში, ალბათ მომივა ის შესანიშნავი გრძნობა, რომელსაც მე დღემდე ვერ ვპოულობდი: არის ჭეშმარიტება, რომელიც არ ტოვებს ადგილს ეჭვისათვის. მე გავიგე, რომ მათემატიკის სამყარო არსებობს ჩემგან დამოუკიდებლად, მართალია ისე არა როგორც ქვები და ხეები, მაგრამ არსებობს. და მაინც რისთვისაა საჭირო ამ სამყაროს გამოკვლევა? ამჯერად მაინც, ხომ არ გადადებ შენი საუბრის მეთოდს გვერდზე და უბრალოდ გამცემ კითხვაზე პასუხს? ვშიშობ, რომ თვითონ ვერ ვიპოვნი სათანადო პასუხს.

სოკრატე — არა, ჩემო მეგობარო, რომც შემეძლოს, მე ამას არ გავაკეთებ. შენთვისაც არ ვარგა ეს, პირველ რიგში. ცოდნა, რომელიც მიღებულია შრომის გარეშე, არაფერი არ ღირს. ბოლომდე ჩვენ გვესმის მხოლოდ ის, შესაძლოა გარე ძალის დახმარებითაც, რასაც ჩვენ თვითონ გავიგებთ, მსგავსად მცენარისა, რომელიც მხოლოდ თავისი ფესვებით ამოწოვილ წყალს იყენებს ზრდისათვის.

ჰიპოკრატე — კეთილი. განვაგრძოთ ჩვენი ძიებანი იგივე მეთოდით, მაგრამ მაშინ მომეშველე შეკითხვით.

სოკრატე — ახლა ვხედავ, ძვირფასო ჰიპოკრატე, თუ გვინდა, რომ წინ წავიწიოთ ჩვენ უკან უნდა დავბრუნდეთ.

ჰიპოკრატე — რამდენად უკან მოგვიწევს დაბრუნება?

სოკრატე — ვფიქრობ, ჩვენ უნდა დაუბრუნდეთ იმ მომენტს, როდესაც დავადგინეთ, რომ მათემატიკოსს საქმე აქვს არა ცხვრების, ხომალდების ან სხვა ნივთების რიცხვებთან, არამედ უშუალოდ თვით რიცხვებთან, როგორც ასეთებთან. შენ ფიქრობ, რომ მათემატიკური აღმოჩენა, რომელიც სამართლიანია მარტივი რიცხვებისათვის, ასეთივე იქნება რეალური ობიექტების რიცხვებისათვისაც? მაგალითად, 17 — მათემატიკოსის განსაზღვრებით, ესაა მარტივი რიცხვი. ისიც მართალია, რომ 17 ცხვარი ვერ განაწილდება თანაბრად ადამიანებს შორის, თუ ადამიანების რაოდენობაც აგრეთვე 17 არაა.

ჰიპოკრატე — რა თქმა უნდა ეს სიმართლეა.

სოკრატე — მაშასადამე, მათემატიკოსმა იცის რიცხვების შესახებ ის, რაც შესაძლებელია გამოყენებულ იქნას არსებული ობიექტებისათვის?

ჰიპოკრატე — გეთანხმები.

სოკრატე — ახლა, რაც შეეხება გეომეტრიას? როდესაც არქიტექტორი შენობის ნახაზს აკეთებს, ის გეომეტრიის თეორემებს არ ეყრდნობა? განა პითაგორას ცნობილ თეორემას არ ეყრდნობა, როდესაც ის მართ კუთხეს აგებს?

ჰიპოკრატე — შენ მართალი ხარ...

სოკრატე — და მიწათმზომელიც გეომეტრიას არ იყენებს?

ჰიპოკრატე — ეს ხომ ყველასათვის ცნობილია.

სოკრატე — და ხომალდის ამგები დურგალი ან სახურავის დამგები ოსტატი?

ჰიპოკრატე — ისინიც ასე იქცევიან.

სოკრატე — და როდესაც მეთუნე ქოთანს ამზადებს ან ზღვაოსანი ანგარიშობს, რამდენ ხორბალს ჩაიტევს მისი ხომალდი, არ საჭიროებენ ისინი მათემატიკურ ცოდნას?

ჰიპოკრატე — რა თქმა უნდა, თუმცა, მეჩვენება, რომ ხელოსნის საქმიანობაში არაა

ნახ. 18. *პითია — მისანი კუნძულ დელფოსიდან (მიქელანჯელო, ვატიკანი, სიქსტის კაპელა)*

ნახ. 19. *პეიზაჟი და ანარეკლი*

საჭირო ძალიან ბევრი მათემატიკა. აქ საკმარისია მარტივი წესების ცოდნა, რომელთა შესახებ, ჯერ კიდევ ეგვიპტის ფარაონთა მწერალმა — მოხელეებმა იცოდნენ, ხოლო ის ახალი აღმოჩენები, რომლებზეც ასე აღფრთოვანებული მელაპარაკებოდა თეატეტეტუსი, სრულიადაც არ გამოიყენება პრაქტიკული საქმიანობისას.

სოკრატე — ერთი მხრივ, მართალი ხარ, ჩემო ჰიპოკრატე, ხოლო, მეორე მხრივ, ისევ ცდები. შესაძლოა, დადგეს დრო, როდესაც ადამიანები მათემატიკური აღმოჩენებიდან შეძლებენ ნახონ სარგებელი პრაქტიკულ საქმიანობაშიც. ის, რაც დღეს მხოლოდ თეორიაა, ოდესმე შესაძლოა რეალურ ცხოვრებაში გახდეს აუცილებელი. ასე არაა?

ჰიპოკრატე — მე დღევანდელობა მაინტერესებს.

სოკრატე — შენ, ჩემო ჰიპოკრატე, არათანამიმდევრული ყოფილხარ. თუ გინდა გახდე მათემატიკოსი, უნდა გესმოდეს, რომ იმუშავებ უფრო მეტად მომავლისათვის. ახლა კი მთავარ კითხვას მოუბრუნდეთ. ჩვენ დავინახეთ, რომ იდეების სამყაროს შეცნობა, ანუ შეცნობა ობიექტებისა, რომლებიც ჩვეული სახით არ არსებობენ, შესაძლოა გამოდგეს ყოველდღიურ ცხოვრებაში, რეალური სამყაროში წამოჭრილი კითხვების ასახსნელად. განა ეს საოცარი არ არის?

ჰიპოკრატე — უფრო მეტიც, გაუგებარია! და ეს მართლაც სასწაულია!?

სოკრატე — შესაძლოა, არც თუ ისეთი საიდუმლოა ამაში. თუ ჩვენ ჩავწვდებით ამ საკითხის არსს, მაშინ შევძლებთ მოვძებნოთ ნამდვილი მარგალიტი.

ჰიპოკრატე — გთხოვ, ძვირფასო სოკრატე, ნუ საუბრობ გამოცანებით, პითიასავით.

სოკრატე — მაშინ მითხარი, გაკვირვებს როდესაც ვინმე, რომელმაც მოიარა შორეული ქვეყნები, ბევრი ნახა და გამოცადა, შინ დაბრუნებული იყენებს შეძენილ ცოდნას იმისათვის, რომ კარგი რჩევა მიცეს თავის თანამოქალაქეებს?

ჰიპოკრატე — სრულიადაც არა.

სოკრატე — უფრო მეტიც, თუ ის ქვეყნები, რომლებიც მან მოიარა, ძალიან შორს მდებარეობენ და დასახლებული არიან სრულიად სხვა ჯურის ხალხით, სხვა ენაზე მეტყველებენ და სხვა ღმერთებს ეთაყვანებიან?

ჰიპოკრატე — არა, არც ამ შემთხვევაში, თუმცა ვთვლი, რომ განხვავებულ ხალხებს შორისაცაა ბევრი საერთო.

სოკრატე — აბა ახლა მითხარი: თუ აღმოჩნდა, რომ მათემატიკის სამყარო მისი თავისებურებების მიუხედავად, რაღაცით წააგავს ჩვენ რეალობას, გაგაკვირვებს შესაძლებლობა იმისა, რომ მათემატიკა გამოყენებულ იქნას რეალური სამყაროს კვლევისას?

ჰიპოკრატე — ასეთ შემთხვევაში არა, მაგრამ მე ვერ ვამსგავსებ ამ ორ სამყაროს.

სოკრატე — ხედავ კლდეს, იქითა ნაპირზე, იქ, სადაც მდინარე ფართოვდება და წარმოქმნის ტბის მსგავს მორევს?

ჰიპოკრატე — ვხედავ.

სოკრატე — და ხედავ კლდის ანარეკლს წყალში?

ჰიპოკრატე — რა თქმა უნდა.

სოკრატე — მაშინ მითხარი, რა განსხვავებაა კლდესა და მის ანარეკლს შორის?

ჰიპოკრატე — კლდე, მყარი, მძიმე ნივთიერების ნაგლეჯია. ის მზეზე ცხელდება, შეხებისას უხეშია. ანარეკლს კი ვერ შეეხები. თუ ვეცდებით ხელი დავადოთ მას, მხოლოდ წყლის სიგრილის შეგრძნება გვექნება, ვინაიდან სინამდვილეში ანარეკლი არ არსებობს. ეს ილუზიაა და მეტი არაფერი.

სოკრატე — ესე იგი არაფერია საერთო კლდესა და მის ანარეკლს შორის?

ჰიპოკრატე — გარკვეული აზრით ანარეკლი კლდის ზუსტი ანალოგიაა. კლდის კონტურები, ყველაზე მცირე ნაკეციც კი მკვეთრადაა გამოსახული ანარეკლზე. მაგრამ რა? ნუთუ შენ გინდა თქვა, რომ მათემატიკის სამყარო არის რეალური სამყაროს ანარეკლი ჩვენი აზროვნების სარკეში.

სოკრატე — შენ თვითონ ეს ძალიან კარგად თქვი.

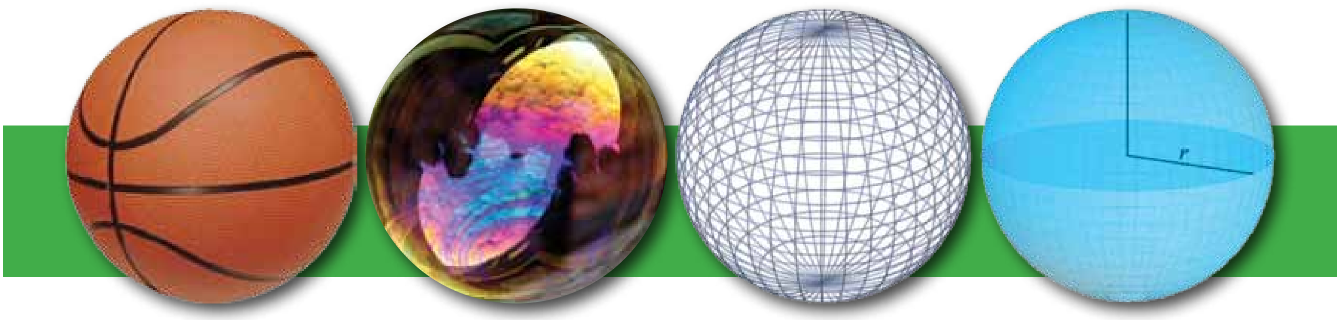
ჰიპოკრატე — მაგრამ, როგორ არის ეს შესაძლებელი?

სოკრატე — გაიხსენე აბსტრაქტული მათემატიკური ცნებების ისტორია. ჩვენ შევნიშნეთ, რომ მათემატიკოსებს საქმე აქვთ განყენებულ რიცხვებთან და არა რეალური ობიექტების რაოდენობებთან. მაგრამ განა ის, ვისაც არასოდეს არ დაუთვლია კონკრეტული საგნები, შეძლებს შეიცნოს აბსტრაქტული რიცხვის ცნება? ასევეა საქმე გეომეტრიასთან. ბავშვი მიდის ბირთვის ცნებამდე მრგავალ საგნებთან ურთიერთობით, მაგალითად ბურთებთან. ყველა ძირითად მათემატიკურ ცნებამდე კაცობრიობა ამავე გზით მივიდა. ისინი გამოკრისტალდნენ რეალური სამყაროს შესახებ მიღებული ცოდნიდან. ამიტომ სრულიად ბუნებრივია, რომ ისინი ინარჩუნებენ თავისი წარმომავლობის კვალს, როგორც ბავშვები ინარჩუნებენ თავიანთი მშობლების იერს. როგორც ბავშვები, რომლებიც იზრდებიან და ხდებიან თავიანთი მშობლების საყრდენი, ასევე მათემატიკის ზოგიერთი განხრა, თუკი ის საკმარისად განვითარდა, ხდება რეალური სამყაროს გამოკვლევის სასარგებლო ინსტრუმენტი.

ჰიპოკრატე — ახლა ჩემთვის სრულიად ნათელია, რომ მათემატიკურ სამყაროში რეალურად გასაგები გახდა, რომ მათემატიკის სამყაროში გაკეთებული ნებისმიერი აღმოჩენა გვაძლევს გარკვეულ ინფორმაციას რეალურ სამყაროზე. მე სრულიად დამაკმაყოფილა ამ პასუხმა.

სოკრატე — გეტყვი, რომ პასუხი არაა სრული. ამას გეუბნები არა იმიტომ, რომ შეგარცხვინო, არამედ იმიტომ, რომ დარწმუნებული ვარ, ადრე თუ გვიან, შენ თვითონ დაისვამ ამგვარ შეკითხვას და მერე მისაყვედურებ, რატომ არ მივაქციე შენი ყურადღება აქეთკენ. შენ იკითხავ: „მითხარი, სოკრატე, რა აზრი აქვს ანარეკლების შესწავლას, თუ ჩვენ თვითონ რეალური ობიექტები შეგვიძლია შევისწავლოთ?“

ჰიპოკრატე — შენ სრულიად მართალი ხარ, ეს კითხვა ცხადია დაისმება. ჯადოქარი ხარ, ჩემო სოკრატე, ისევ შემარცხვინე. რამოდენიმე სიტყვითა და გარეგნულად მიამიტი შეკითხვით შესაძლოა დაანგრიო მთელი შენობა, რომელიც დიდი ძალისხმევის შედეგად არის აგებული. გიპასუხებდი, რომ თუ არსებობს შესაძლებლობა დახედო ორიგინალს, უაზრობაა შეისწავლო მისი ანარეკლი. მაგრამ, დარწმუნებული ვარ, ჩვენი შედარება უადგილოა. პასუხი კი სადღაც ახლოსაა, მაგრამ არ ვიცი როგორ ვიპოვნო.



ნახ. 20. *ბურთი, საპნის ბუშტი, სფერო და ბირთვი*

არარსებული ობიექტების შესწავლა თავისუფლად შეიძლება გახდეს სასარგებლო რეალურ ცხოვრებაში. გმადლობთ, რომ დამეხმარე ამის გაგებაში.

სოკრატე — მშურს შენი, ჩემო ძვირფასო ჰიპოკრატე, რადგან მე პირადად მინდა რაღაც დავასაბუთო. ალბათ შენ შეძლებ ჩემ დახმარებას.

ჰიპოკრატე — მე დიდი სიამოვნებით გავაკეთებ ამას, მაგრამ, ვშიშობ, ისევ რაღაც ოინს მიწყობ. მარცხვენ, როდესაც დახმარებას მთხოვ, უკეთესია ამიხსნა საკითხი, რომელიც მე ვერ შევნიშნე.

სოკრატე — შეეცადე შეაჯამო ჩვენი საუბარი და ყველაფერს თვითონ მიხვდები.

ჰიპოკრატე — კეთილი, ნათელი გახდა, თუ რატომ შეუძლია მათემატიკას მოგვცეს გარკვეული ცოდნა სამყაროს შესახებ. ეს ცოდნა კი განსხვავდება იმ რეალური სამყაროსაგან, რომელშიც ჩვენ ვცხოვრობთ. ასევე განასხვავებს ადამიანის წარმოდგენას სამყაროს შესახებ. იბადება კითხვა, რა სარგებელია აქედან? ვინაიდან ახლახანს გავარკვიეთ, რომ მათემატიკის სამყარო სხვა არაფერია, თუ არა რეალური სამყაროს ანარეკლი ჩვენ გონებაში, შესაბამისად

სოკრატე — სწორად მიხვდი. პარადოქსი წარმოიშვა, რადგან ჩვენ დაუშვით აზრი, რომლის თანახმად, მსგავსება ანარეკლსა და ორიგინალს შორის ძალზე დიდია. ეს მსგავსება ჰგავს მშვილდს, რომელიც გატყდება, თუ ძალზე ძლიერად მოჭიმავ ლარს. თავი დავანებოთ ამ შედარებას და განვიხილოთ სხვა მაგალითი. შენ, რა თქმა უნდა, იცი, რომ მოგზაურები და ზღვაოსნები სარგებლობენ რუკებით.

ჰიპოკრატე — ეს საკუთარი გამოცდილებიდან ვიცი. შენ თვლი, რომ მათემატიკოსები აგდენენ რეალური სამყაროს რუკას.

სოკრატე — დიახ. ახლა შეძლებ მიპასუხო კითხვაზე: რა უპირატესობა აქვს რუკაზე ყურებას რეალურ ლანდშაფტის ყურებასთან შედარებით?

ჰიპოკრატე — აქ ყველაფერი გასაგებია: ვსარგებლობთ რა რუკით, ვსწავლობთ უზარმაზარ მანძილებს, რომელთა დავათვალიერება, რეალობაში, მხოლოდ მრავალკვირიანი ანდა მრავალთვიანი მგზავრობისასაა შესაძლებელი.

სოკრატე — შესანიშნავია. მაგრამ, კიდევ რაღაც მომივიდა თავში.

ჰიპოკრატე — მაინც რა?

სოკრატე — არის მეორე მიზეზიც, თუ რა-

ტომაა შესაძლებელი სამყაროს მათემატიკური წარმოდგენის შესწავლა გახდეს სასარგებლო. როდესაც მათემატიკოსები აღმოაჩენენ წრეწირის რაიმე თვისებას, ეს იმავდროულად იძლევა რაღაც ინფორმაციას ნებისმიერი ტიპის მრგვალი ფორმების მქონე სხეულების შესახებ. ამგვარად, მათემატიკური მეთოდი იძლევა საშუალებას ერთდროულად საქმე ვიქონიოთ განსხვავებულ ობიექტებთან.

ჰიპოკრატე — განვიხილოთ შემდეგი მაგალითები: რა შემთხვევაში შეიქმნის პიროვნება უფრო სრულ შთაბეჭდილებას ქალაქის შესახებ, როცა ის ახლომდებარე მთიდან დაჰყურებს მას, თუ როდესაც ამავე ქალაქის დახვეულ ქუჩებს მიუყვება? ვინ ღებულობს უფრო ზუსტ სურათს, მთავარსარდალი, რომელიც მტრის ჯარის მანევრს ბორცვიდან ადევნებს თვალყურს, თუ მოწინავე ხაზზე მყოფი ჯარისკაცი, რომელიც ზუსტად მაგრამ მხოლოდ იმას ხედავს, თუ რა ხდება უშუალოდ მის წინ.

სოკრატე — კარგია, შენ ახალი, ჩემზე უკეთესი, შედარებები მოგიფიქრებია, მაგრამ არც მე მინდა ჩამოგრჩე და ნება მომეცი ერთი იგავი გიამბო. ამას წინათ ვაკვირდებოდი, როგორ ხატავდა აგლაოფონის ვაჟი არისტოფანე. მხატვარმა გამაფრთხილა: "სოკრატე, ნუ მიხვალ ძალიან ახლოს, რადგან ასეთ შემთხვევაში მხოლოდ ფერად ლაქებს დაინახავ, მთლიანად ნახატის აღქმა კი გაგიჭირდებაო".

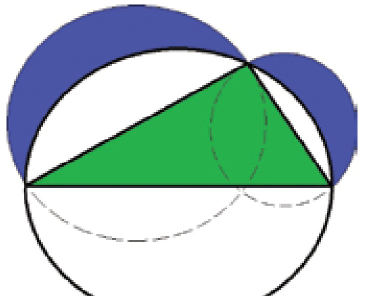
ჰიპოკრატე — რა თქმა უნდა, ის მართალი იყო, და შენც მართალი იყავი, საუბარი რომ არ გაწყვიტე მანამ, სანამ ჩვენ საკითხის არსს არ ჩავწვდით. ახლა კი ვფიქრობ, დროა დავბრუნდეთ ქალაქში. უკვე ბნელდება, მე კი მშია და მწყურია. თანაც მინდა გზაში რაღაც გკითხო, თუ შენ ჯერ კიდევ შემოგრჩა მოთმინება.

სოკრატე — შესანიშნავია, წავიდეთ და ყურადღებით გისმენ.

ჰიპოკრატე — ჩვენმა საუბარმა საბოლოოდ დამარწმუნა, რომ მე უნდა შევისწავლო მათემატიკა და ამისათვის შენი დიდად მადლიერი ვარ. მაგრამ მითხარი, რატომ თავად არ გახდები მათემატიკოსი? გამომდინარე იქიდან, თუ რა ღრმად გესმის გარემომცველი სამყარო და გათვითცნობიერებული გაქვს მათემატიკის მნიშვნელობა, ვგონებ, რომ შენ ელადის ყველა მათემატიკოსს აჯობებდი, თუკი ამით დაკავდებოდი.

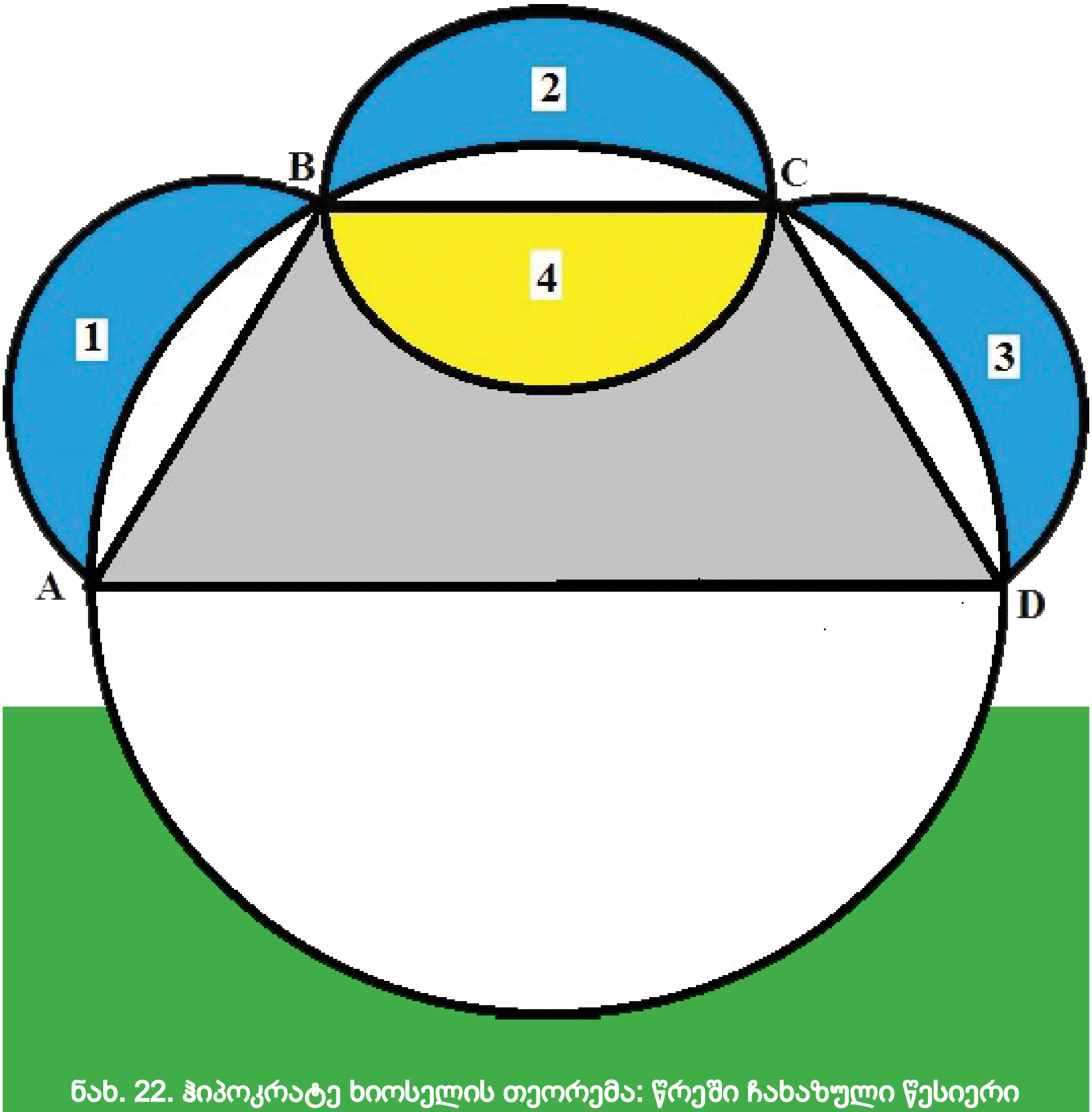
სოკრატე — არა, ჩემო ძვირფასო ჰიპოკრატე, ეს ჩემი საქმე არაა. თეოდორემ გაცილებით მეტი იცის მათემატიკაში, ვიდრე მე. შენ ვერ მოძებნი უკეთეს მასწავლებელს. რაც შეეხება შენ შეკითხვას, რატომ არა ვარ მე მათემატიკოსი, გეტყვი ამის მიზეზს. არასოდეს დამიმალავს ჩემი მაღალი წარმოდგენა ამ მეცნიერებაზე. ვფიქრობ, რომ ჩვენ, ელინები, არც ერთ სხვა ხელოვნებაში არ წავწეულვართ ისე შორს, როგორც მათემატიკაში, და ეს მხოლოდ დასაწყისია. მის შემდეგ, თუ ერთმანეთს არ გავანადგურებთ უაზრო ომებში, კიდევ მეტს მივაღწევთ, როგორც აღმომჩენები და როგორც გამომგონებლები. შენ მკითხე, თუ რატომ არ შეუერთდი მათ, რომლებიც ამ ბუმბერაზ მეცნიერებას ანვითარებენ? მოკლედ გიპასუხებ: მე ერთი მათემატიკოსთაგანი ვარ, მაგრამ სხვა ყაიდის. შინაგანმა ხმამ, ამას წინასწარმეტყველებაც შეგიძლია დაარქვა, რომელსაც მე ყოველთვის ყურადღებით ვუსმენ, მრავალი წლის წინათ მკითხა: „რა არის წყარო, იმ დიდი წარმატებისა, რომელთაც მათემატიკოსები თავიანთ კეთილშობილურ მეცნიერებაში აღწევენ?" მე ვუპასუხე: „ვფიქრობ, რომ ეს პირველწყაროებია: ლოგიკური მოთხოვნები, კვლევის მეთოდები, მაღალი სტანდარტები, ჭეშმარიტებისაკენ უკომპრომისო სწრაფვა, ყველაფრის პირველადი პრინციპებიდან დაწყების თვისება, ყოველი ცნების განსაზღვრა და ზუსტად გამოყენება, ამ განსაზღვრის შინაგანი წინააღმდეგობებისაგან თავისუფალება".

შინაგანი ხმა აგრძელებდა: „ძალიან კარგი, მაგრამ რატომ ფიქრობ, ჩემო სოკრატე, რომ აზროვნების ეს მეთოდები და მტკიცებულებანი შეიძლება სასარგებლო იყოს მხოლოდ რიცხვებისა და გეომეტრიული ფორმების შესწავლისას? რატომ არ ცდილობ დაარწმუნო თანამოქალაქენი გამოიყენონ იგივე სტანდარტები ცოდნის სხვა მიმართულებით, მაგალითად ფილოსოფიასა და პოლიტიკაში, ყოველდღიური პირადი ან საზოგადოებრივ ცხოვრებაში?". ამ დროიდან ზუსტად ეს გახდა ჩემი ცხოვრების მიზანი. მე უკვე დავამტკიცე (რა თქმა უნდა შენ გახსოვს ჩემი პროტაგორასთან კამათი?), რომ ის, ვინც თავის თავს ბრძნად თვლის, უმეტესწილად სულელი ბრიყვია. ნებისმიერ მათ მსჯელობას აკლია მყარი საფუძველი, რადგან მათემატიკისაგან გასხვავებით, იყენებენ განუსაზღვრელ და ნახევრად გააზრებულ ცნებებს. საუბრისას ბუნდოვან ტერმინებს ხმარობენ, რათა დაფარონ შინაარსის გაურკვევლობა. მე კი ასეთ ხალხს ბრალს ვდებ. სწორედ ამიტომაც, გამიჩნდა ასე ბევრი მტერი, რაც სრულიადაც არ მიკვირს. ადამიანებს ხომ არ უყვართ, როცა მუდმივად უთითებენ იმ ნაკლზე, რომლის გამოსწორებაც მათ არ ძალუძთ ან არ სურთ. დადგება დღე, როდესაც ჩემი მტრები თავს დამესხმებიან და მომსპობენ. მაგრამ სანამ ეს დღე არ დამდგარა, მე ჩემს დანიშნულებას არ ვუღალატებ. შენ კი მაინც წადი თეოდორესთან.



ნახ. 21. ჰიპოკრატე ხიოსელის თეორემა: მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებზე, როგორც დიამეტრებზე, აგებულია წრეები; ნიჟარების საერთო ფართობი სამკუთხედის ფართობის ტოლია

მათემატიკა

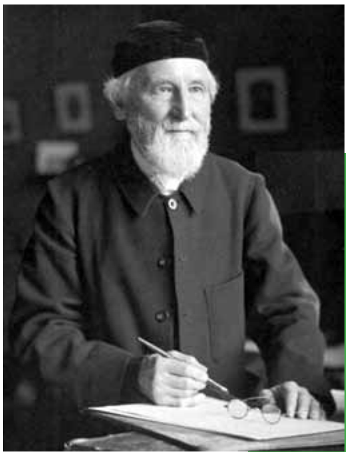


ნახ. 22. ჰიპოკრატე ხიოსელის თეორემა: წრეში ჩახაზული წესიერი ექვსკუთხედი. ექვსკუთხედის გვერდებზე როგორც დიამეტრებზე აგებულია წრეები. შესაბამისი ნიჟარების ფართობების ჯამი და ერთი პატარა ნახევარწრის ფართობი ნახევარი ექვსკუთხედის ფართობის ტოლია, ანუ

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_{ABCD}$$

ფლეტლენდი, ანუ რომანსი მრავალ განზომილებაზე

ქართულ ენაზე ითარგმნა ედვინ ებოტ ებოტის ცნობილი ნაწარმოები „ფლეტლენდი“ (ბრტყელი სამყარო), ანონიმურად გამოვიდა 1884 წელს. წიგნის ავტორად მოხსენიებული იყო კვადრატი, ორგანზომილებიანი სამყაროს მკვიდრი მათემატიკოსი. რადგანაც ნაწარმოებმა ბევრი ორაზროვნება გამოიწვია, იმავე წელს გამოვიდა ამ წიგნის მეორე, შევსებული გამოცემა. რომელშიც თითქოსდა რედაქტორი, სინამდვილეში კი ავტორი, ედვინ ებოტ ებოტი, წინასიტყვაობაში განსაზღვრავს თავის პოზიციას საკამათო საკითხებს.
ამ ნაწარმოებს უნიკალური ადგილი უკავია მეცნიერული ფანტაზიის ჟანრში. ის ნათარგმნია მსოფლიოს ყველა ენაზე.



ედვინ ებოტ ებოტი
(Edwin Abbott Abbott 1838-1926 წწ.)

ცნობილი იყო თავისი თანამედროვეებისათვის, როგორც განმანათლებელი, შექსპირის შემოქმედების მკვლევარი, თეოლოგი. მისი ხელმძღვანელობით City of London School გახდა ერთერთი საუკეთესო სკოლა ინგლისში. მას გამოქვეყნებული აქვს 50-ზე მეტი წიგნი. მის შრომებში განსაკუთრებული ადგილი უკავია მათემატიკურ ფანტაზიას, "ფლეტლენდს".

ქართული თარგმანის ავტორია ია გიორგობიანი
მხატვრულად გააფორმა მარინა ლეჟავამ

მაღალი განზომილების გეომეტრიის თეორიული აგების მცდელობა ვიქტორიანული ეპოქის მეცნიერების დებატების მთავარ თემას წარმოადგენდა. მეცხრამეტე საუკუნის დასაწყისში გამოჩნდა გაუსის, ლობაჩევსკის, ბოიაის შრომები არაევკლიდურ გეომეტრიაში. ჰერმან ჰელმჰოლცმა აჩვენა, რომ ევკლიდური გეომეტრია არაა ერთადერთი თეორია სივრცის ბუნების ასახსნელად. 1870 წელს, „ფლეტლენდის“ გამოსვლამდე რამოდენიმე წლით ადრე, ჰელმჰოლცმა გამოაქვეყნა „გეომეტრიის აქსიომები“, სადაც აღწერს, როგორი იქნებოდა ორგანზომილებიანი არსებების ცხოვრება ფლეტლენდის მსგავს სიბრტყეზე და ასევე, სფეროს ზედაპირზე, სადაც ევკლიდეს აქსიომები სრულდება მხლოდ ძალიან მცირე, ლოკალურ არეებში. ფიზიკოსმა ჯეიმს მაქსველმა წარმოიდგინა თავისი სული, როგორც კვანძი (ფელიქს კლეინის ცნობილი ზედაპირის მიხედვით), რომლის გახსნაც მხოლოდ მეოთხე განზომილებაშია შესაძლებელი.

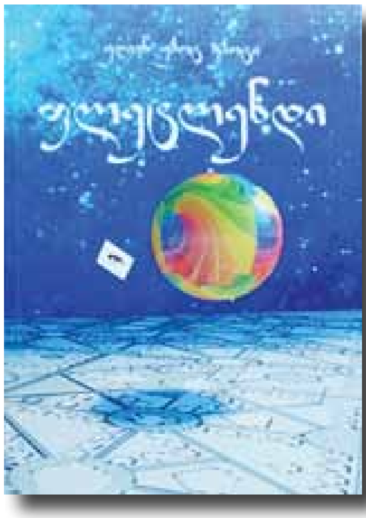
მეცხრამეტე საუკუნის 70–იან წლებში ასევე გამოქვეყნდა რამოდენიმე ნაწარმოები, რომელთაც, როგორც ჩანს, გავლენა იქონიეს ებოტის შრომაზე. „ფლეტლენდის“ გამოსვლამდე რამოდენიმე წლით ადრე (1875 წ., 1878 წ.) გამოვიდა ტაიტის და სტუარტის შრომები, სადაც ლაპარაკია ფუნდამენტურ უწყვეტ კავშირზე ჩვენს ხილულ სამყაროსა და სპირიტუალურ სამყაროს შორის, რომელიც ამ ავტორებისათვის ოთხგანზომილებიან სივრცეს წარმოადგენს.

იგივე პერიოდს (1859, 1868, 1871 წწ.) განეკუთვნება აგრეთვე ჩარლზ დარვინის შრომების სერიაც. ადამიანის წარმოშობას მატერიალისტურად ხსნის დარვინი წიგნში „ადამიანის წარმოშობა და სქესობრივი გადარჩევა“ (1871 წ.). რომელშიც გატარებულია იდეა, რომ ორგანიზმთა ახალი ფორმების წარმოქმნა ხდება მემკვიდრული ცვლილებების და ბუნებრივი გადარჩევის გზით, რაც მიზანშეწონილებითაა განპირობებული.

კვადრატი თითქოს ეპასუხება დარვინს, როცა დარვინის თეორიის მსგავსად ყურადღებას უთმობს სელექციას და მიზანმიმართულ ქორწინებებს, რომლებიც ფლეტლენდში უმაღლესი ქურუმების — წრეების მეთვალყურეობით ხორციელდება. როგორც ჩანს, ებოტი არ იზი-

ია გიორგობიანი

დაამთავრა თბილისის თსუ ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი. ამჟამად ცხოვრობს ჩეხეთის რესპუბლიკაში, ქ.პრაღა.



არებდა დარვინის შეხედულებებს. სატირულად ჟღერს კვადრატის სიტყვები, როცა ამბობს, რომ „ბუნების კანონები დაბალი კლასის ფიგურებისათვის არ სრულდება..., რომ განვითარება დაბალი და მაღალი კლასის ფიგურებისათვის სხვადასხვანირად მიმდინარეობს და რომ განვითარებიდან სრულიად გამორიცხულნი არიან ქალები“. ებოტი დასცინის ვიქტორიანული ინგლისის დროინდელ „მეცნიერულ“ შეხედულებას ქალების შესახებ, რის გამოც, მაგალითად, 1870 წლამდე ბრიტანეთში ქალებს უმაღლესი განათლების მიღების უფლება არ ჰქონდათ.

ჰ. გ. უელსის ნაწარმოებში „დროის მანქანა“ რომელიც 1895 წელს გამოვიდა, მეოთხე განზომილებად დროა აღებული. მეოთხე განზომილების, როგორც დროის წარმოდგენის მთავარი პრობლემა არის ის, რომ ასეთი წარმოდგენის შემდეგ განზომილების მომატება აღარ ხდება. ამის მერე შეუძლებელი ხდება ვილაპარაკოთ მეხუთე განზომილებაზე.

როგორც ხდება ხოლმე, იმისათვის, რომ სივრცე — დროის გეომეტრია განსაზღვრონ, ფიზიკოსები განიხილავენ სივრცეს ერთი ან, ორი განზომილებით, რომელსაც მერე უმატებენ დროს, როგორც შემდეგ განზომილებას. რის შედეგადაც მთლიანი განზომილება ორზე, ან სამზე დადის, რაც აადვილებს ვიზუალიზაციას. საგნის პოპულარული ახსნა ყოველთვის იწყება ორ, სამ და ოთხ განზომილებიანი ანალოგების განხილვით. ყველა ამ კონცეპციების განხილვისას, მათში პირდაპირ მითითებულია „ფლეტლენდი“, ან ავტორი უთითებს “შპჰერელანდ” (სფეროს სამყაროს), ნაწარმოებს, რომელიც 1965 წელს დაწერა დანიელმა ფიზიკის მასწავლებელმა დიონის ბურგერმა. ამ წიგნში კვადრატის შთამომავლები შორეულ მოგზაურობაში მიდიან და აღმოაჩენენ, რომ მათი სამყარო სრულიადაც არაა ბრტყელი, არამედ გამრუდებულია და დიდი სფეროს ზედაპირს წარმოადგენს.

„ფლეტლენდში“ უპირატესობა ევკლიდურ გეომეტრიას აქვს მინიჭებული. ნაწარმოების მთავარი მოქმედი პირი, კვადრატი არ კმაყოფილდება მეოთხე განზომილებით და საერთოდ არასწორად მიიჩნევს განზომილების რაიმე რიცხვით შემოსაზღვრის იდეას.

ქვემოთ მოგვყავს მცირე ნაწყვეტი ნაწარმოებიდან: „ზრდასრული ფლეტლენდელის ყველაზე დიდი სიგრძე საშუალოდ 11 თქვენებური დუიმია. 12 დუიმი მაქსიმუმად ითვლება. ჩვენი ქალები სწორი ხაზებია. ჩვენი ჯარისკაცები და მშრომელი ხალხის ყველაზე დაბალი ფენების მამაკაცი წარმომადგენლები სამკუთხედები არიან ორი ტოლი გვერდით, სიგრძით დაახლოებით 11 დუიმი. ჩვენი საშუალო კლასი ტოლგვერდა სამკუთხედებისაგან შედგება. ჩვენი პროფესორები და ჯენტლმენები კვადრატები არიან (ამ კლასს მივეკუთვნები მეც), ან ხუთგვერდიანი ფიგურები, ანუ პენტაგონები.

შემდეგ მოდის თავად — აზნაურობა, რომელთათვისაც რამოდენიმე საფეხური არსებობს, დაწყებული ექვსი გვერდით, ანუ ჰექსაგონებით და შემდეგ გვერდების რაოდენობის მატებით, სანამ არ მიაღწევენ ტიტულს „პოლიგონი“, ანუ მრავალკუთხედი. როდესაც ფიგურის გვერდების რაოდენობა უსასრულო ხდება, გვერდის სიგრძე კი ისე მცირე, რომ ფიგურა თითქმის არ განსხვავდება წრისაგან, მაშინ ეს ფიგურა ჩაირიცხება წრიულ ქურუმთა ორდენში და ეს არის უმაღლესი კლასი ჩვენთან“.

„ფლეტლენდი“ ფანტასტიკური ნაწარმოებია, რომლის მოქმედი პირების სამყარო თითქოს ჩვენი სამყაროს აჩრდილს წარმოადგენს. ფლეტლენდელებს შეზღუდული შესაძლებლობები არ აძლევთ საშუალებას, რომ მათზე უფრო განვითარებული, უფრო მეტი განზომილებების მქონე არსებები არა თუ აღიქვან, არამედ არ შეუძლიათ მათი არსებობის დაჯერებაც კი.

ებოტი თვლიდა, რომ წარმოსახვის უნარი წარმოადგენს ყველანაირი ცოდნის ბაზისს და ამ მხრივ, „ფლეტლენდი“ მართლაც წარმოსახვის უნარის ვარჯიშს წარმოადგენს. რაც, ავტორის აზრით, მკითხველს მისცემს ცოდნის შეძენის შესაძლებლობას.

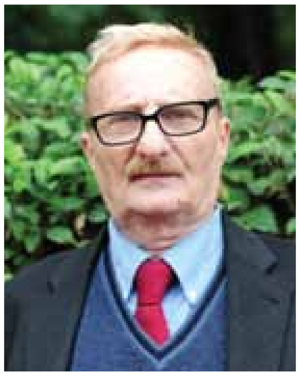
წიგნის ნახვა შეიძლება ეროვნულ სამეცნიერო ბიბლიოთეკაში და საქართველოს პარლამენტის ეროვნულ ბიბლიოთეკაში. ელექტრონული ვერსია http://dspace.nplg.gov.ge/handle/1234/23366

ავტორის ელ. ფოსტის მისამართი:
iagiorgobiani@yahoo.com

მათემატიკა

გეომეტრიული ფიგურებს გამოიყენებენ დღეს დიზაინერებიც. სურათზე გამოხატული ფიგურა არის ჰუვილი, ალუმინი, 35 ინჩი. ეს ფორმა გამომდინარეობს ერთმანეთთან შერწყმული იკოსაედრიდან და დოდეკაედრიდან, რომლებიც უნდა მოთავსდეს სკულპტურის ცარიელ ცენტრალურ ნაწილში. ხუთმმხრივი ღრმულები იკოსაედრის წვეტებს შეესაბამება, ხოლო სამმხრივი ღრმულები (სამგვერდიანი „ნაგებობების“ „საძირკვლებში“) შეესაბამება დოდეკაედრის წვეტებს. სკულპტურის ხაზები ამ ფარული პოლიედრების გვერდებს ან მათ პარალელურად მიუყვება. თითოეული კარის სწორკუთხოვანი ფორმა ოქროს სწორკუთხედია, ხოლო სამკუთხედები შერჩეული იქნა ერთ სიბრტყეზე მდებარე წყვილების შესაქმნელად.

სიბრტყეზე გეომეტრიული აგების ამოცანების სწავლების შესახებ



თეიმურაზ ვეფხვაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, სრული პროფესორი, ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ლამარა ქურჩიშვილი

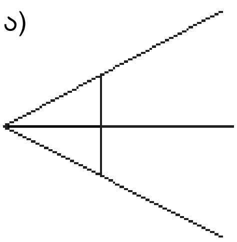
პედაგოგიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, სკოლა "ალბიონის" პედაგოგი

მასწავლებელთა სასერტიფიკაციო გამოცდებზე, ან გამოცდებისათვის მომზადების მიზნით ჩატარებული ტესტირებისას მასწავლებლებს ეძლეოდათ საკითხები, რომლებიც ამოწმებდა ფარგლის და სახაზავის საშუალებით აგების ამოცანების შესრულების ცოდნას. იყო ამოცანები, რომლებშიც მითითებული იყო სავარაუდო პასუხები, მოითხოვებოდა მათგან სწორი პასუხის შერჩევა (ამოცანა 1 და ამოცანა 2).

ამოცანა 1. *ქვემოთ მოყვანილი ნახაზებიდან რომელზეა ნაჩვენები ფარგლითა და სახაზავით კუთხის ბისექტრისის აგების სწორი მათემატიკური კონსტრუქცია?*

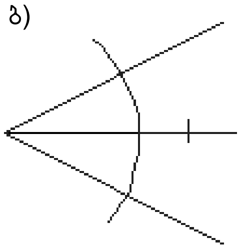
ამოცანა 2. *ქვემოთ მოყვანილი ნახაზებიდან რომელზეა ნაჩვენები ფარგლითა და სახაზავით c წრფის მიმართ A წერტილის სიმეტრიული A_1 წერტილის აგების სწორი მათემატიკური კონსტრუქცია?*

ა)



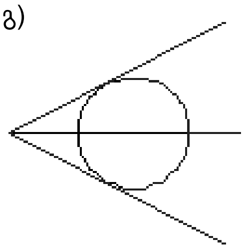
ნახ. 1

ბ)



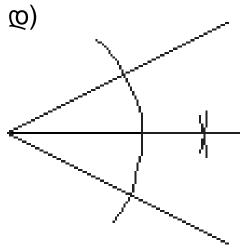
ნახ. 2

გ)



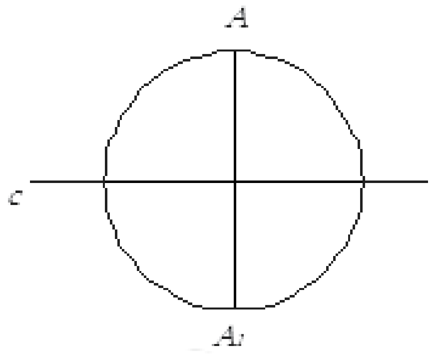
ნახ. 3

დ)

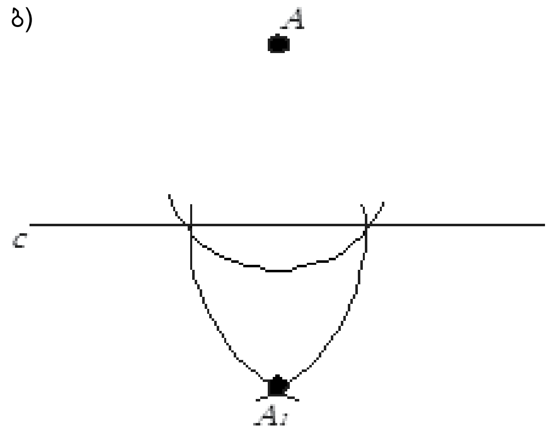


ნახ. 4

ა)



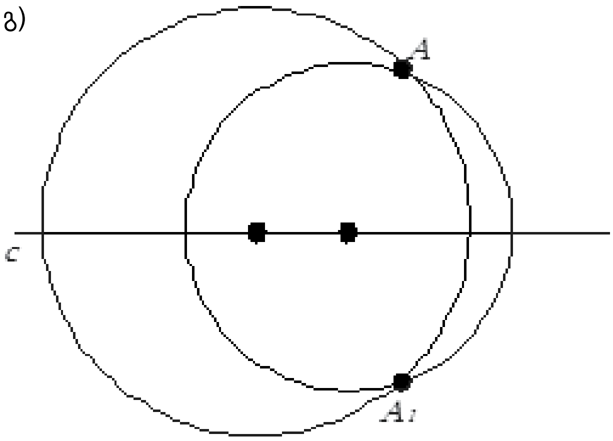
ბ)



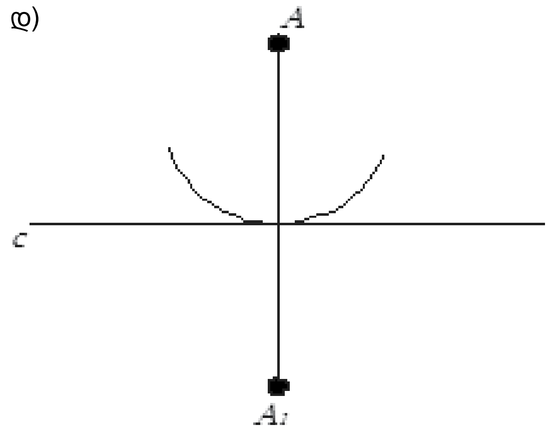
ნახ. 5

ნახ. 6

გ)



დ)



ნახ. 7

ნახ. 8

ამოცანა 3. *შეასრულეთ შემდეგი აგება ფარგლითა და სახაზავით. ფარგლის და სახაზავის გამოყენებით მოცემულ სამკუთხედში ჩახაზეთ რომბი, რომელსაც მოცემულ სამკუთხედთან აქვს საერთო კუთხე, ხოლო წვეროები სამკუთხედის გვერდებზე მდებარეობს (ფარგლითა და სახაზავით აგება გულისხმობს ნახაზის აგების ალგორითმის გადმოცემას და მის დასაბუთებას).*

მიუხედავად იმისა, რომ ამ ამოცანების ამოხსნები ეროვნული სასწავლო გეგმით გათვალისწინებულ მოთხოვნებთან სრულ შესაბამისობაშია, ბევრისთვის მოულოდნელი აღმოჩნდა ბილეთში მათი გამოჩენა, მასწავლებლებს გაუჭირდათ სწორი პასუხის მიგნება და დასაბუთება. სამწუხაროდ, სკოლაში ნაკლები ყურადღება ექცევა სასწავლო გეგმით მოთხოვნილი იმ საკითხების სწავლებას, რომლებიც უმაღლესი სასწავლებლების მისაღები გამოცდების პროგრამებში არ არის წარმოდგენილი, მასწავლებელთა პროფესიულ სტანდარტში კი ფარგლისა და სახაზავის გამოყენებით აგების შემდეგი ამოცანებია შეტანილი: სამკუთხედის აგება მისი ელემენტების მიხედვით; მოცემული კუთხის ტოლი კუთხის აგება; კუთხის ბისექტრისის აგება; მოცემულ წერტილზე მოცემული წრფის მართობული წრფის გავლება; მოცემულ წერტილზე მოცემული წრფის პარალელური წრფის გავლება; მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით (იხ., მაგ., [1]). მათგან ეროვნული სასწავლო გეგმის მიხედვით სკოლაში უნდა ისწავლებოდეს: მოცემული სამკუთხედის ტოლი სამკუთხედის აგება; კუთხის ბისექტრისის აგება; მონაკვეთის შუამართობის აგება ([2], გვ. 468, VII კარი). მე-9 კლასის პროგრამაში კი მითითებულია გეომეტრიული ადგილის ცნება და მისი გამოყენება აგების ამოცანებში. ზემოთ ჩამოთვლილი სამივე ამოცანა ამ საკითხების ცოდნას უკავშირდება.

ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით გეომეტრიული ფიგურების აგების ამოცანების თემა სასკოლო მათემატიკის ტრადიციული საკითხია. „ამ აგებებიდან ზოგიერთი მარტივი შემთხვევა გამოიყენება ხოლმე პრაქტიკულ საქმიანობაში, სხვა მხრივ მათი პრაქტიკული მნიშვნელობა მცირეა. მიუხედავად ამისა, სწავლების პროცესში ამ აგებების ჩართვა გამართლებულია, რადგან ისინი გეომეტრიული ფიგურების გაცნობისა და ამოცანების ამოხსნების გზების ათვისების საქმეში ძალიან მნიშვნელოვან როლს ასრულებს" ([3], გვ. 26). ამიტომ დიერდ პოია თავის მეთოდიკურ სახელმძღვანელოში [3] დიდ ყურადღებას უთმობს გეომეტრიული აგებების შესახებ თეორიის გადმოცემას.

პოია მიუთითებს, რომ გეომეტრიული აგებების თეორია ევკლიდეს „საწყისებშიც" იყო

გადმოცემული და ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით სამი გვერდით სამკუთხედის აგების ამოცანის გარჩევის მაგალითზე წარმოგვიდგენს ერთ-ერთ მეთოდს — წერტილთა გეომეტრიული ადგილის მეთოდს. ამ მეთოდის არსი შემდეგია: ვთქვათ, აგებაზე ამოცანის ამოხსნისას მივედით იმ დასკვნამდე, რომ ამოცანის ამოხსნა დაკავშირებულია რაღაც X წერტილის აგებაზე, რომელიც ორ პირობას აკმაყოფილებს; წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც პირველ პირობას აკმაყოფილებს, არის F_1 ფიგურა და წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც მეორე პირობას აკმაყოფილებს, არის F_2 ფიგურა. საძიებელი X წერტილი ეკუთვნის F_1 და F_2 ფიგურებს, ე.ი. არის მათი თანაკვეთა. F_1 და F_2 ფიგურების თანაკვეთის X წერტილის საპოვნელად საჭირო ხდება ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ამ F_1 და F_2 ფიგურების აგება. თუ F_1 და F_2 ფიგურები წარმოადგენს წრფეებს, ან წრეწირებს, მაშინ, ცხადია, შესაძლებელია მათი აგება და საერთო წერტილის პოვნა ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით. ამასთან დაკავშირებით, ინტერესს წარმოადგენს ის შემთხვევები, როცა წერტილთა გეომეტრიული ადგილი წრფე, ან წრეწირია. შეგვიძლია დავასახელოთ რამდენიმე მაგალითი:

ა) იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც ტოლი მანძილებითაა დაშორებული მოცემული წერტილიდან, წრეწირია.

ბ) იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც მოცემული მანძილითაა დაშორებული მოცემული წრფიდან, ამ წრფის პარალელური ორი წრფეა (ისინი მოცემული მანძილითაა დაშორებული მოცემული წრფიდან).

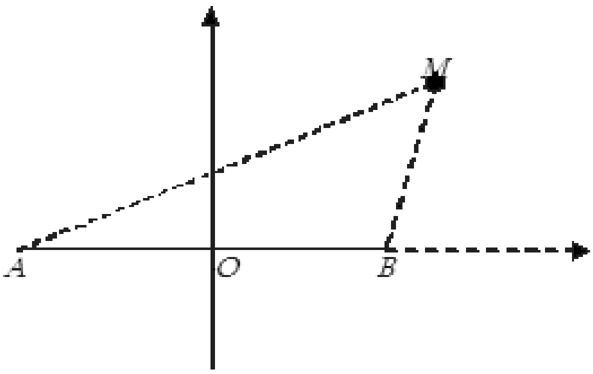
გ) მოცემული ორი წერტილიდან ტოლად დაშორებულ წერტითა გეომეტრიული ადგილი არის იმ მონაკვეთის შუამართობი წრფე, რომლის ბოლოები მოცემული წერტილებია.

დ) ორი გადამკვეთი წრფიდან ტოლად დაშორებულ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი არის იმ კუთხის ბისექტრისა, რომელიც ამ წრფეების გადაკვეთით მიიღება.

ე) იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიდანაც ორ მოცემულ წერტილებამდე მანძილების შეფარდება მოცემული ერთისგან განსხვავებული დადებითი რიცხვია, არის წრეწირი.

პირველ ოთხ შემთხვევას კარგად იცნობს მასწავლებელი. ისინი საშუალო სკოლის ტრადიციულ თემებთან არის დაკავშირებული. სასურველია, რომ მასწავლებელი იცნობდეს მეხუთე დებულების დამტკიცებას კოორდინატთა მეთოდით და კოორდინატთა მეთოდის გამოყენების გარეშეც. მითითება კოორდინათა მეთოდის გამოყენების გარეშე დამტკიცებაზე, როცა $\lambda = 2$, მოცემულია ჩვენს სახელმძღვანელოში ([4], გვ. 351).

ეროვნულ სასწავლო გეგმაში მითითებულია სკოლაში მათემატიკის სწავლების მიზნები და ამოცანები. სხვადასხვა მიზნებთან ერთად (მაგალითად, აზროვნების უნარის განვითარება, დედუქციური და ინდუქციური მსჯელობის, შეხედულებათა დასაბუთების, მოვლენებისა და ფაქტების ანალიზის უნარის განვითარება და სხვა) აღნიშნულია სწავლის შემდგომი ეტაპისთვის მომზადების მნიშვნელობა. კოორდინატთა მეთოდით ზემოთაღნიშნული დებულების დამტკიცება უმაღლეს სკოლაში მეორე რიგის წირთა კანონიკური განტოლებების გამოყვანის ათვისებისთვის მნიშვნელოვანი პროპედევტიკური მასალაა.



ნახ. 9

მოცემული წერტილები იყოს A და B. ვეძებთ იმ M წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელთათვისაც გვაქვს $BM : AM = \lambda$. შევარჩიოთ კოორდინატთა სისტემა — აბსცისათა ღერძი გავავლოთ A და B წერტილებზე, ორდინატთა ღერძი — მათ შორის შუა წერტილზე. ვთქვათ, $AB = 2a$, მაშინ $A = (-a; 0)$ და $B = (0; a)$. თუ $M = (x; y)$, მაშინ, პირობის თანახმად,

$$\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}=\lambda^2,$$

$$x^2+y^2+\frac{2(\lambda^2+1)}{\lambda^2-1}\cdot ax+a^2=0,$$

$$\left(x+\frac{(\lambda^2+1)}{\lambda^2-1}\cdot a\right)^2+y^2=\left(\left(\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}\right)^2-1\right)\cdot a^2.$$

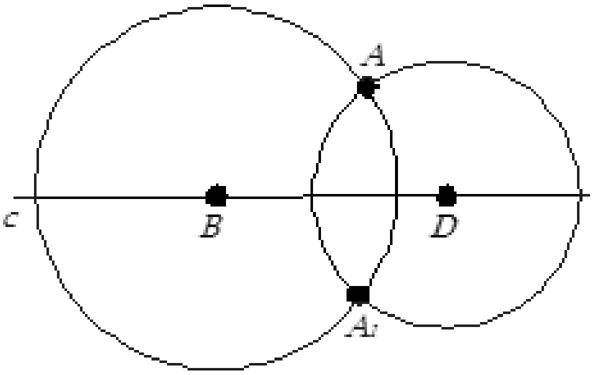
ეს კი წრეწირის განტოლებაა.

მასწავლებლებისთვის შეთავაზებული ამოცანებიდან პირველი ამოცანა მე-7 კლასში განიხილება. მეორე ამოცანის ამოხსნისას კი შეიძლება გამოვიყენოთ წერტილთა გეომეტრიული ადგილის მეთოდი. უნდა ავაგოთ A წერტილის სიმეტრიული A_1 წერტილი c წრფის მიმართ.

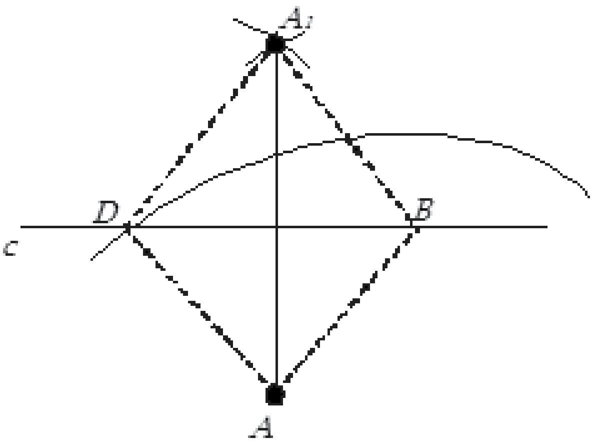
ვთქვათ, აგება შესრულებულია და A_1 არის A წერტილის სიმეტრიული წერტილი c წრფის მიმართ. c წრფის მიმართ სიმეტრიისას ამ წრფის ნებისმიერი წერტილი თავის თავზე აისახება. ამიტომ A და A_1 წერტილი ტოლი მანძილებითაა დაშორებული c წრფეზე აღებული B წერტილიდან და ისინი BA რადიუსის მქონე წრეწირზეა. თუ ავიღებთ სხვა D წერტილს — ანალოგიურად, A და A_1 წერტილები DA რადიუსის მქონე წრეწირსაც ეკუთვნის. მაშასადამე, A და A_1 წერტილები ამ ორი ფიგურის გადაკვეთის წერტილებია. აქედან ჩანს, რომ სწორი კონსტრუქცია ნახაზი 7-ითაა წარმოდგენილი.

თუმცა, ამ ამოცანის ამოხსნის საილუსტრაციოდ შემდეგი სურათიც გამოდგება. A წერტილი იმ წრეწირის ცენტრია, რომელიც კვეთს c

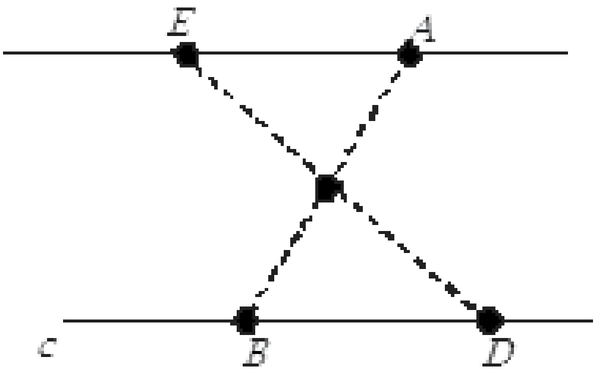
წრფეს D და B წერტილებში. D და B წერტილებიდან იმავე რადიუსით შემოვხაზავთ ორ წრეწირს, მათი თანაკვეთა გვაძლევს A_1 წერტილს; შევნიშნოთ, რომ ADA_1B რომბია.



ნახ. 10



ნახ. 11

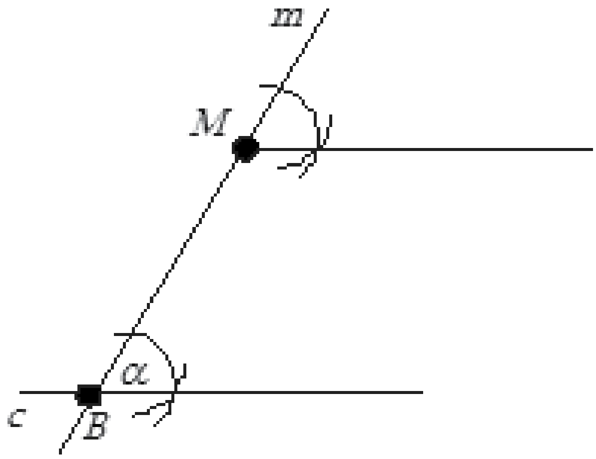


ნახ. 12

ამ სურათზე კი A წერტილზე c წრფის პარალელური წრფის გავლებაა ილუსტრირებული; B და D c წრფის ნებისმიერი ორი წერტილია. ავაგებთ O წერტილს, რომელიც არის AB-ს შუა წერტილი, შემდეგ — D წერტილის სიმეტრიულ E წერტილს AB-ს მიმართ. AE საძიებელი წრფეა.

წრფეთა პარალელობის ნიშნების გავლის დროს მოსწავლეებს შეიძლება შევთავაზოთ მოცემულ წერტილზე მოცემული წრფის პარალელური წრფის გავლების სხვა ხერხიც.

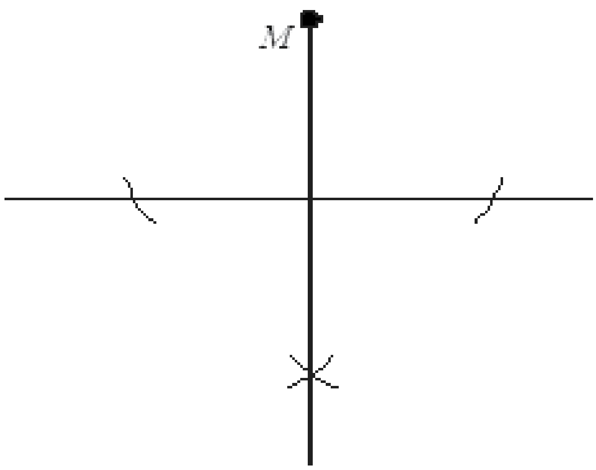
M წერტილზე ვავლებთ ნებისმიერ m წრფეს, რომელიც კვეთს c წრფეს. შემდეგ მიღებული α კუთხის ტოლ კუთხეს ავაგებთ, რომლის წვერო M წერტილია, ერთი გვერდი m წრფეს ეკუთვნის.



ნახ. 13

ახლა, შემდეგი სურათების მიხედვით აღწერეთ იგივე ამოცანის ამოხსნისას შესრულებული ნაბიჯები.

ამ ამოცანის ამოხსნისას გამოყენებულია აგებები, რომელთა შესრულება ცნობილად ითვლება — მონაკვეთის შუა წერტილის აგება, მოცემული წრფის მიმართ მოცემული წერტილის სიმეტრიული წერტილის აგება, მოცემული კუთხის ტოლი კუთხის აგება.



ნახ. 14

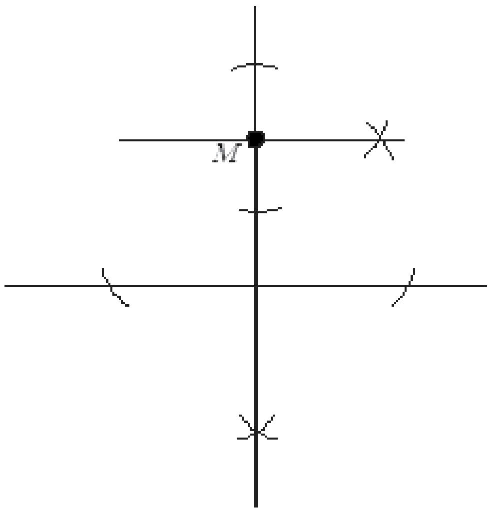
ანალოგიურად, ზემოთ წარმოდგენილი მე-3 ამოცანის ამოხსნაც დაიყვანება აგების ცნობილ ამოცანებზე.

ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ჩავხაზოთ რომბი სამკუთხედში (ამოცანა 3).

ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ავაგებთ A კუთხის AM ბისექტრისას, AM მონაკვეთის შუამართობის გავლებით მიიღება რომბის სხვა ორი წვერო — N და K. შესაძლებელია N და K წერტილების პოვნა M წერტილზე AB-ს და AC-ს პარალელური წრფეების გავლებით.

ეროვნულ სასწავლო გეგმაში, ძირითადად, აგების ამოცანების შესრულების ერთ მეთოდზეა გამახვილებული ყურადღება (გეომეტრიული ადგილის მეთოდი). „წერტილთა გეომეტრიული

ადგილის“ ცნება არისტოტელეს შემოღებულია. იგი მიუთითებდა, რომ წრფე არის „ადგილი“, სადაც შეიძლება იყოს წერტილები; წერტილებს არა აქვს ზომები და ნებისმიერი რაოდენობა წერტილებისა, რამდენიც არ უნდა იყოს ერთმანეთზე „მიდებული“ წერტილის გარდა არაფერს მოგვცემს. 70-იან წლეში ა. კოლმოგოროვის მიერ განხორციელებული რეფორმების პერიოდში ამ ტერმინის ნაცვლად გამოიყენებოდა „წერტილთა სიმრავლე“ (იხ. მაგ. [6], გვ. 181). წინა პლანზე მაშინ თეორიულ-სიმრავლური გადმოცემა და ფორმალიზმისადმი სწრაფვა შეინიშნებოდა. მაგრამ, როგორც ალექსანდრე შენმა [7] აჩვენა სიმკაცრის დაცვა საშუალო სკოლის მასალის გადმოცემისას შეუძლებელია და, მთავარია, ინტუიციის გამოყენებით მისი ზომიერი დაცვა. ზოგიერთი ტერმინი კი, რომლებიც მათემატიკის ცნობილ მეთოდისტებს ეკუთვნის, შეიძლება შევინარჩუნოთ. ეს თვალსაზრისია გაზიარებული ეროვნული სასწავლო გეგმის შედგენის დროსაც.



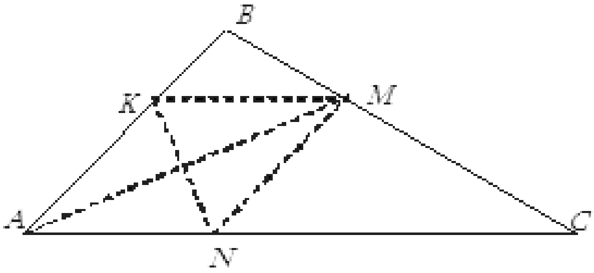
ნახ. 15

ფარგლისა და სახაზავის გამოყენებით აგებაზე ამოცანების განხილვისას მასწავლებელმა კარგად უნდა აუხსნას მოსწავლეებს ინსტრუმენტების დასაშვები გამოყენებების შესაძლებლობები: სახაზავის საშუალებით შეიძლება გავავლოთ ნებისმიერი წრფე, რომელიც მოცემულ წერტილზე გადის; ნებისმიერი წრფე, რომელიც ორ მოცემულ წერტილზე გადის. სხვა ოპერაციები სახაზავით არ შეიძლება რომ შესრულდეს, მაგალითად, ვერ გადავზომავთ მონაკვეთს.

ფარგლის გამოყენებით შეიძლება მოცემული ცენტრისა და რადიუსის მქონე წრეწირის გავლება. კერძოდ, ფარგლის გამოყენებით შეიძლება მოცემულ წრფეზე მოცემული წერტილიდან მოცემული სიგრძის მონაკვეთის გადადება.

აგებაზე ამოცანები, როგორც წესი, შემდეგი ეტაპებისგან შედგება: 1) ამოხსნის ძიება; 2) აგების შესრულება; 3) ამოხსნის სისწორის შემოწმება; 4) ამოხსნის გამოკვლევა.

ამოხსნის ძიება იწყება იმ დაშვების გაკეთებით, რომ ამოცანა ამოხსნილია. შემდეგ იწყება აგებული ფიგურის შესწავლა, კავშირები მოცემულობებთან. ამას მივყავართ აგების თანამიმდევრობის აღმოჩენამდე. აგების შესრულება არ არის აუცილებელი. თუმცა, აუცილებელია დავამტკიცოთ, რომ ამოხსნაში მითითებულ პროცედურებს მოთხოვნილი თვისების მქონე ფიგურამდე მივყავართ. ამ გამოკვლევისას უნდა შევამოწმოთ — აქვს თუ არა ამოცანას ამოხსნა ნებისმიერი კონკრეტული მოცემულობების განხილვისას და რამდენი ამოხსნა არსებობს.



ნახ. 16

გარდა გეომეტრიულ ადგილთა მეთოდისა ლიტერატურაში განიხილება სხვა მეთოდებიც: მსგავსების მეთოდი, სიმეტრიის მეთოდი, მობრუნების მეთოდი, ინვერსიის მეთოდი. მასწავლებელს შეუძლია ისარგებლოს ჩვენს მიერ მითითებული მასალით (იხ. მაგ., [9], [10], [11]), რომლებითაც ფარგლისა და სახაზავის გამოყენებით აგების ამოცანების შესახებ ბევრ საინტერესო მასალას გაეცნობა.

ლიტერატურა

1. საბაზო და საშუალო საფეხურის მათემატიკის საგნის პროფესიული სტანდარტი, www.tpdc.ge

2. ეროვნული სასწავლო გეგმა 2011-2016, www.mes.gov.ge

3. Д. Пойа. Математическое открытие. Перевод с английского В.С.Бермана, Москва,1976

4. გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე, ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი. მათემატიკა IX. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2012

5. Philip L.Cox. Informal Geometry. PrenticeHall, 1999

6. В.Г.Болтянский, И.М.Яглом. Преоброзования и векторы. Москва, Просвещение, 1964

7. А.Шень. О математической строгости в школьном курсе математики.www.mccme.ru, 2006 (pdf, 0,8M)

8. А.В.Погорелов. Геометрия. Москва, „Наука“, 1984

9. ე. იმერლიშვილი. გეომეტრიული აგებები სიბრტყეზე, ნაწ. II. თბილისი, 2001

10. Задачи по геометрии. Построения, www.Problems.ru

11. А.Шень. Геометрия в задачах www.mccme.ru, 2013 (pdf.9M)

ავტორების ელექტრონული მისამართები
t-vepkhvadze@hotmail.com
lkurchishvili@hotmail.com

მათემატიკის სწავლების პროცესში კომპიუტერული ტესტირების გამოყენების შესახებ

ია მებონია

ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა
კანდიდატი, აკადემიური დოქტორი,
მასწავლებელთა პროფესიული განვითარების
ეროვნული ცენტრის ტრენერ-კონსულტანტი,
ქართულ-ამერიკული სკოლის ზუსტ
მეცნიერებათა კათედრის ხელმძღვანელი.

საშუალო და უმაღლესი სკოლების პედაგოგებისთვის კარგადაა ცნობილი ის თავისებურებები, რომელიც მათემატიკური განათლების მიმდინარე ეტაპს ახასიათებს და მდგომარეობა, რომელშიც საგანმანათლებლო პროცესის მონაწილეები აღმოჩნდნენ. საშუალო სკოლის მათემატიკის სტანდარტი უკანასკნელი ათწლეულის განმავლობაში რამდენჯერმე გადახალისდა; შეიცვალა პროგრამა, სახელმძღვანელოები და საათური ბადე. უმაღლეს სკოლაში საგანთა ჩამონათვალიც ახალია და თანამიმდევრობაც, ამასთანავე, კვირეული საათური დატვირთვის შეზღუდვის გამო, შემცირდა მათემატიკური დისციპლინების წილი საათებიც. დიდ პრობლემას ქმნის წყვეტა, რომელიც უნებლიედ შეიქმნა საშუალო სკოლის კურსდამთავრებულის ცოდნის დონესა და უმაღლესი სკოლის მხრიდან პირველკურსელისადმი წაყენებულ მოთხოვნებს შორის. ყოველ დასახელებულ პრობლემას აქვს თავისი მიზეზები და შედეგები, რომელთა ანალიზის გზით არსებული რთული ვითარებიდან გამოსავალი უნდა ვეძიოთ.

დავიწყოთ იმით, რომ კეთილ განზრახვას გავზარდოთ სტუდენტების დამოუკიდებელი მუშაობის მოცულობა სააუდიტორიო დატვირთვის შემცირების გზით, ნამდვილად არ მოჰყვა სასურველი შედეგები. ჩანაფიქრის მიხედვით, სტუდენტს აუდიტორიაში მოსმენილი ინფორმაცია უნდა გამოეყენებინა ერთგვარ ნიმუშად, გზამკვლევად წყაროზე დამოუკიდებელი მუშაობის დროს; თავის მხრივ, წყაროს შეიძლება წარმოადგენდეს სახელმძღვანელო, ლექციების და/ან სავარჯიშოების კრებული, სამეცნიერო სტატია, ელექტრონული საძიებო სისტემები და სხვა. ამ გზაზე ხელისშემშლელ ფაქტორად გვევლინება როგორც მშობლიურ ენაზე არსებული დიდაქტიკური რესურსების სიმცირე, ასევე დამოუკიდებლად მუშაობის უნარ-ჩვევების სრული დეფიციტი. სამწუხაროდ, უმაღლესი სასწავლებელი ვერ/არ უწყობს ხელს ამ დეფიციტის აღმოფხვრას და პასუხისმგებლობა მთლიანად დაეკისრა სტუდენტს.

საფიქრალია, რომ სწავლების არსებულ ფორმატზე გადასვლამდე უნდა გვეზრუნა დიდაქტიკური ბაზის შექმნაზე, სწავლების ახალი მეთოდების დამუშავებაზე, პედაგოგების მეთოდიკური კვალიფიკაციის ამაღლებაზე. მაგრამ ასე არ მოხდა. საშუალო სკოლაში გამოსავალი მასწავლებლების სავალდებულო სერტიფიცირებაში ნახეს — გამოყოფილი ვაუჩერების საზღაუ-

რად, მასწავლებლებს სთავაზობენ აკრედიტებული ტრენინგების გავლას, რის შემდეგაც მათ უნდა ჩააბარონ კვალიფიკაციის დამადასტურებელი გამოცდა. მაგრამ თეორიული გამოცდის ჩაბარება სულაც არ ადასტურებს პრაქტიკაში ამ თეორიების გამოყენების უნარების ფლობას. ასეც აღმოჩნდა — სერტიფიცირებული პედაგოგების რიცხვი იზრდება, მოსწავლეთა მათემატიკური ცოდნის დონე კი არ მატულობს. უმაღლეს სასწავლებლებს გადამზადების გზაზე ჯერ რეალური არაფერი განუხორციელებიათ, გარდა, შეიძლება, ახალი ფორმის თანმდევი საბუთების (მაგალითად, სილაბუსების) დანერგვისა, ხარისხის მართვის სამსახურების დაარსებისა, რაც სტუდენტების ცოდნაზე სასიკეთო გავლენას ჯერ-ჯერობით ვერ ახდენს. უმაღლესი სასწავლებლის ლექტორების შერჩევის კრიტერიუმები მჭიდრო კავშირშია კანდიდატების სამეცნიერო მოღვაწეობასთან, რაც, ყოველგვარ ეჭვს გარეშე, უაღრესად მნიშვნელოვანია; მაგრამ განა პედაგოგიური ინტერესები და დიდაქტიკური პროდუქტის შექმნა ნაკლებად ღირებული უნდა იყოს?აუცილებელია ამ კუთხით ლექტორების მოღვაწეობის წახალისება.

უმაღლესი სასწავლებლების სასწავლო გეგმები არ ითვალისწინებს მათემატიკაში დამოუკიდებელი მუშაობის რაიმე კონკრეტულ ფორმებს, ცხადია, თუ არ ჩავთვლით, ჩვეულებრივ საშინაო დავალებებს, რომელთა მოცულობაც ლექციების პროპორციულად მცირდება.

იმისთვის, რომ შექმნილ სიტუაციაში არსებითად გავაუმჯობესოთ მათემატიკის სწავლების ხარისხი, აუცილებელია მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის გადახედვა. ამასთანავე, ცვლილებები უნდა შეეხოს არა სწავლების რომელიმე კონკრეტულ საფეხურს, არამედ მათემატიკის სწავლების საერთო სქემას, როგორც სკოლაში, ასევე უმაღლეს სასწავლებელში. დავიწყოთ იმით, რომ გვაქვს შემცირებული საკონტაქტო საათები. შესაბამისად, პედაგოგი მოსწავლესთან უწინდელზე ნაკლებ დროს ატარებს მაშინ, როცა სასწავლო პროგრამა არაა შემცირებული, პირიქით, ხშირ შემთხვევაში გაზრდილია კიდეც. ცხადია, შეუძლებელია ძველი სქემით სწავლება, არც დრო გვეყოფა და ვერც ხარისხს მივიღებთ. ამ სიტუაციიდან ერთ-ერთი გამოსავალია სწავლების პრიორიტეტების გადატანა ტექნიკური შემადგენლიდან იდეურზე, სწავლების მთავარ მიმართულებად უნდა შეირჩეს არა პასუხი კითხვაზე „როგორ?“, არამედ, „რატომ?“ და „რისთვის?“. ეს გაამდიდრებს სასწავლო პროცესს იდეურად, ხელს შეუწყობს მოსწავლის შემეცნებითი და შემოქმედებითი აქტივობის ზრდას. მაგრამ მათემატიკის შესწავლა წარმოუდგენელია თეორიული საკითხების ირგვლივ კრიტიკული დიალოგისა და ტექნიკური უნარ-ჩვევების შეძენა/განმტკიცების გარეშე. როგორ მოვიქცეთ, თუ პედაგოგთან ურთიერთობა დროში ძალზე შეზღუდულია? შეიძლება, თუ არა მასწავლებლის რაიმე ფორმით ჩანაცვლება?

სკოლაში დიდი ხანია იგრძნობა კვალიფიცირებული კადრების მწვავე ნაკლებობა. ამ ვითარებამ უკვე ბიზნესმენთა ყურადღებაც მიიპყრო. მაგალითად, საკაბელო ტელევიზია „სილქნეტი“ მომხმარებელს სთავაზობს ახალ საგანმანათლებლო პროდუქტს „საშინაო სკოლა“, რომლის საშუალებითაც მოსწავლეს შეუძლია სკოლის ნებისმიერი კლასის საგნობრივი სტანდარტის ნებისმიერი საკითხის შერჩევა და ამ თემაზე ჩატარებული ვიდეო გაკვეთილის ნახვა. ცხადია, კარგი იდეაა. ერთი პრობლემაა — მოსწავლე პასიური მსმენელის როლში რჩება და ვერ ხერხდება ათვისების ხარისხის შემოწმება/კორექცია.

გთავაზობთ იდეას, რომლის განხორციელებისას სასწავლო პროცესი იყოფა ორ ფაზად, პირობითად, „საკონტაქტო“ და „არასაკონტაქტოდ“. საკონტაქტო ფაზის შემადგენელი ნაწილებია თემის ახსნა/განხილვა, ახალი ცოდნის გამოყენების ნიმუშების გაცნობა, ახალი ცოდნის გამოყენების სფეროს შემოწერა/შეფასება — ეს ფაზა პედაგოგთან (ან ვიდეოჩანაწერთან) უშუალო კონტაქტის პირობებში მიმდინარეობს. არასაკონტაქტო ფაზა მოიცავს თემის თეორიული ნაწილის დამოუკიდებლად შესწავლას, გამოყენების ტექნიკაში გაწაფვას — ეს ფაზა კომპიუტერის დახმარებით ტარდება და არ მოითხოვს პედაგოგის უშუალო მონაწილეობას, თუმცა საჭიროებს სპეციალისტის მიერ წინასწარ შერჩეულ და დამუშავებულ სასწავლო მასალას.

აღნიშნული მეთოდი ეფექტურია მათემატიკის (და, სავარაუდოდ, არა მარტო მათემატიკის) სწავლების ყველა საფეხურზე, ხოლო მისი არსის ახსნა შესაძლებელია ნებისმიერი თემის ნიმუშზე. მაგალითად, განვიხილოთ თემა „პითაგორას თეორემა“. საკონტაქტო ფაზაში, ანუ გაკვეთილზე, პედაგოგი გააცნობს მოსწავლეს პითაგორას თეორემას და მისი დამტკიცების რომელიმე (ან რამდენიმე) გზას (აქ შეგნებულად არ ვამახვილებთ ყურადღებას ახსნის მეთოდიკებზე, რადგან ეს არაა ჩვენი განხილვის საგანი); მოსწავლეები გაიგებენ ახალი ფორმულის — $a^2 + b^2 = c^2$ — შინაარსს; შემდეგ, დარჩენილი დროის შესაბამისად, ამოიხსნება რამდენიმე ამოცანა — ეს ცოდნის გამოყენების ნიმუშების გაცნობაა. გაკვეთილის დასასრულს, პედაგოგი განსაზღვრავს სავალდებულო საშინაო დავალებას, რომელიც მოიცავს ახალი თეორიული მასალის შესწავლასა და ამოცანების ამოხსნას. გაკვეთილი დამთავრდა. შემდეგი ეტაპი არასაკონტაქტო ფაზაა. მოსწავლე რჩება პირისპირ საშინაო დავალებასთან. ჯერ უნდა ისწავლოს თეორიული მასალა. როგორ უნდა გამოარჩიოს განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი ნაწილი? როგორ უნდა დარწმუნდეს, რომ სწორად გაიგო და კარგად ისწავლა მასალა? თანაც ამოცანები უნდა ამოხსნას. რამდენად შესძლებს ამას?მოდით შევთავაზოთ მოსწავლეს კომპიუტერული ტესტი, რომელიც ასეთი სქემით არის აწყობილი:

ფაქტის ცოდნა ⇒ ფაქტის გააზრება ⇒ გამოყენება.

ტესტის მუშაობის პრინციპი მარტივია

— ყოველ დასმულ შეკითხვასა თუ ამოცანას ახლავს რამდენიმე (ორი, ან მეტი) პასუხი, რომელთაგან მხოლოდ ერთია სწორი. ეს პასუხები პანელის აქტიური ღილაკებითაა წარმოდგენილი და მოსწავლე ღილაკის მინიშნებით აფიქსირებს არჩევანს. მაგალითად, შერჩეული თემის შესაბამისად, პირველ შეკითხვებად („ფაქტის ცოდნა“) შეიძლება შევთავაზოთ:

1. პითაგორას თეორემაა: “ნებისმიერი სამკუთხედის ერთი გვერდის კვადრატი დანარჩენი გვერდების კვადრატების ჯამის ტოლია“.

ვეთანხმები	არ ვეთანხმები

2. პითაგორას თეორემაა:“მართკუთხა სამკუთხედის ნებისმიერი ორი გვერდის კვადრატების ჯამი მესამე გვერდის კვადრატის ტოლია“.

ვეთანხმები	არ ვეთანხმები

3. პითაგორას თეორემაა: “ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდების კვადრატების ჯამი ფუძის კვადრატის ტოლია“.

ვეთანხმები	არ ვეთანხმები

4. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტის სიგრძე ჰიპოტენუზის სიგრძეზე ნაკლებია.

ვეთანხმები	არ ვეთანხმები

5. პითაგორას თეორემაა: “სამკუთხედის მცირე გვერდების კვადრატების ჯამი უდიდესი გვერდის კვადრატის ტოლია“.

ვეთანხმები	არ ვეთანხმები

6. პითაგორას თეორემაა: “მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების კვადრატების ჯამი ჰიპოტენუზის კვადრატის ტოლია“

ვეთანხმები	არ ვეთანხმები

შევნიშნოთ, რომ ტესტზე მუშაობისას სრულად დასაშვებია სახელმძღვანელოში „ჩახედვა“ და ფრაზების უშუალო შედარებაც კი — ასე ხომ თეორიის კიდევ ერთხელ წაკითხვა ხდება. საფიქრალია, რომ ამ ამოცანების ამომხსნელი პითაგორას თეორემას დაიმახსოვრებს. გადავდივართ მეორე ფაზაზე („ფაქტის გააზრება“):

7. პითაგორას თეორემა სამართლიანია ნებისმიერი სამკუთხედისთვის.

ვეთანხმები | არ ვეთანხმები

8. შესაძლებელია, რომ რომელიმე მართკუთხა სამკუთხედისთვის პითაგორას თეორემა არ შესრულდეს.

ვეთანხმები | არ ვეთანხმები

9. პითაგორას თეორემა ასეც შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ: “მართკუთხა სამკუთხედის მცირე გვერდების კვადრატების ჯამი უდიდესი გვერდის კვადრატის ტოლია“.

ვეთანხმები | არ ვეთანხმები

10. თუ სამკუთხედი ტოლფერდაა, მაშინ უდიდესი გვერდის კვადრატი არ შეიძლება ტოლი იყოს მცირე გვერდების კვადრატისა.

ვეთანხმები | არ ვეთანხმები

11. პითაგორას თეორემაა: „თუ სამკუთხედის რომელიმე გვერდის კვადრატი დანარჩენი გვერდების კვადრატების ჯამის ტოლია, მაშინ ეს სამკუთხედი მართკუთხაა.

ვეთანხმები | არ ვეთანხმები

ასეთი სახის ტესტებით მოწმდება, თუ რამდენად კარგად გაიაზრა მოსწავლემ ახალი ინფორმაცია, რამდენად შეუძლია მისი ამოცნობა სხვა სიტყვებით გადმოცემის შემთხვევაშიც (იხ. 9), რამდენად შექცევადია ამ ფაქტით მოცემული იმპლიკაცია (იხ. 11).

გადავდივართ მესამე ფაზაზე („გამოყენება“), რომელიც, თემატიკიდან გამომდინარე, შეიძლება დავყოთ სხვადასხვა სირთულის ამოცანებად. მაგალითად, შემდეგი სამი ამოცანა მზარდი სირთულის მიხედვითაა დალაგებული:

12. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების სიგრძეებია 5 სმ და 12 სმ. იპოვეთ ჰიპოტენუზის სიგრძე.

ა) 17 სმ ბ) 7 სმ გ) 13 სმ დ) $\sqrt{119}$ სმ

ა	ბ	გ	დ

13. მართკუთხა სამკუთხედის ერთ-ერთი კათეტი 2 სმ-ით გრძელია მეორეზე და 2 სმ-ით მოკლეა ჰიპოტენუზაზე.იპოვეთ უმცირესი კათეტის სიგრძე.

ა) 8 სმ ბ) 6 სმ გ) 5 სმ დ) 10 სმ

ა	ბ	გ	დ

14. მართკუთხედის პერიმეტრი 56 სმ-ია. ამასთანავე, ერთ-ერთი გვერდი მეორეზე 4 სმ-ით მოკლეა. იპოვეთ მართკუთხედის დიაგონალის სიგრძე.

ა) 20 სმ ბ) 10 სმ გ) 12 სმ დ) 16 სმ

ა	ბ	გ	დ

ტესტირების დასასრულს პროგრამა შეატყობინებს მოსწავლეს მიღწეულ შედეგს, რომელიც შემდეგ ინფორმაციას შეიცავს (თვალსაჩინოებისთვის, გრაფები შევსებულია):

რამდენად კარგად გახსოვთ შესწავლილი ფაქტი:	85%
რამდენად კარგად გესმით ამ ფაქტის შინაარსი:	60%
რამდენად კარგად იყენებთ ახალ ცოდნას:	55%

მოსწავლე შეწყვეტს მეცადინეობას, ან ხელახლა მიუბრუნდება სახელმძღვანელოს იმის მიხედვით, აკმაყოფილებს, თუ არა მიღებული შედეგი.

ტესტირების მიმართ პედაგოგების დამოკიდებულება არაერთგვაროვანია; ნაწილი თვლის, რომ ეს ლამის ერთადერთი ქმედითი დიდაქტიკური საშუალებაა, მრავალის რწმენით კი შესაძლებელია ტესტის პასუხის გამოცნობა და, ამრიგად, ის არ შეიძლება ჩაითვალოს სწავლების საშუალებად. შევთანხმდეთ, რომ, სწავლა-სწავლების პროცესი მაღალზნეობრივი პროცესია და, თუ მოსწავლეს მართლა სურს სწავლა, ის თავს არ მოიტყუებს, შესაბამისად, შედეგის გამოცნობასაც არ დაიწყებს. გარდა ამისა, ტესტირების პროცედურას არ უნდა მივანიჭოთ იმაზე მეტი ფუნქცია, ვიდრე ის ობიექტურად არის.

მსოფლიოში გავრცელებულია ავტომობილის მართვის შესწავლის მსურველთა მეცადინეობისას კომპიუტერული ტრენაჟორების გამოყენება; ასევე, სპორტის სხვადასხვა სახეობაში ვარჯიშისას სპორტსმენები იყენებენ ერთსა და იმავე საშუალებებს — სირბილსა და ტრენაჟორებს. ცალკე აღებული ეს საშუალებები არ წარმოადგენენ წარმატების გარანტიას, მაგრამ, ვარჯიშის კარგად გააზრებულ კომპლექსში მათი გონივრული ჩართვისას, დიდი დახმარების გაწევა შეუძლიათ. სავარაუდოდ, სასწავლო პროცესში ტესტირების შესაფერისად გამოყენებაც მნიშვნელოვან სიკეთეს მოგვიტანს. საჭიროა მხოლოდ ხარისხიანი მიზნობრივი ტესტების შექმნა და აუცილებელია ამაში ყველა პედაგოგის ჩართვა, მიუხედავად იმისა სკოლაში მოღვაწეობს იგი, თუ უმაღლეს სასწავლებელში.

ავტორის ელ. ფოსტის მისამართი
iamebonia@gmail.com

ამოცანების ამოხსნის სხვადასხვა ხერხები კრიტიკული აზროვნების განვითარებისათვის

მანანა დეისაძე

აკადემიური დოქტორი,
აკაკი წერეთლის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის
პედაგოგიური ფაკულტეტის
დეკანის მოადგილე

ვლადიმერ ადეიშვილი

ასოცირებული პროფესორი,
აკაკი წერეთლის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის
პედაგოგიური ფაკულტეტის
დეკანი

დაწყებითი განათლების საფეხურზე მათემატიკის სწავლებისას გამზადებული ცოდნის გადაცემა არ მოგვცემს ხარისხიან, გააზრებულ სწავლებას. მოსწავლეებს უნდა შეეძლოს დამოუკიდებლად დაფიქრების, საკუთარი ცოდნისა და გამოცდილებაზე დაყრდნობით ახალი საკითხების აღმოჩენა და დამუშავება. ცხადია, მოსწავლე შეცდომებსაც დაუშვებს, დაბრკოლებებსაც წააწყდება, მაგრამ საბოოლოდ შეეცდება შეძლოს ლოგიკური მსჯელობის საფუძველზე სწორი დასკვნის გამოტანა. ამით ჩვენ მივაღწევთ მოსწავლეთა კრიტიკული აზროვნების განვითარებას, რომლის დახმარებითაც ხდება არსებული ფაქტების, ჰიპოთეზების გააზრება და დასაბუთებული, არგუმენტირებული მსჯელობით, ყოველმხრივ აწონილ-დაწონილი და გააზრებული დასკვნის გამოტანა. ჩვენი მიზანია, რომ მოსწავლეებმა არა მხოლოდ დაიმახსოვრონ მზა ფაქტები, არამედ შეძლონ პრობლემის გადაჭრის რამდენიმე გზის მოძიება და მათ შორის ოპტიმალური, რაციონალური გზის არჩევა. ჯონ დიუი აღნიშნავდა, რომ ბავშვების ბუნებრივ ცნობისმოყვარეობას განვითარება სჭირდება: „ბავშვი მხოლოდ მაშინ იწყებს ფიქრს, თუ ჩვენ მას კონკრეტულ პრობლემასთან შებრძოლების საშუალებას ვაძლევთ და მას რთული სიტუაციიდან გამოსვლის ძიება უხდება“ [1]. მოსწავლეს უნდა მივცეთ ფიქრის, განსჯის და განსხვავებული ინტერპრეტირების საშუალება.

ამ მხრივ დაწყებით კლასებში მათემატიკის შესწავლისას უდიდესი ადგილი უჭირავს ამოცანების ამოხსნას. პირველივე კლასიდანვე იწყება ტექსტიან ამოცანებზე მუშაობა. მოსწავლემ დაწყებით კლასებშივე უნდა შეძლოს გაარკვიოს ამოცანის ტექსტში შემავალ სიდიდეებს შორის მიმართებანი. ღრმად, შინაარსიანად გაიაზროს ამოცანის სტრუქტურა და შეძლოს მისი მათემატიკური ფორმულირება; შეძლოს ერთი და იგივე ამოცანის ამოხსნის სხვადასხვა ხერხით ინტერპრეტაცია. მოსწავლისადმი გადაცემული ცოდნა არ უნდა იყოს მხოლოდ ინფორმაციული. სწორედ ამ მხრივ, მნიშვნელოვანი როლი მასწავლებელს აკისრია. მასწავლებელი უნდა დაეხმაროს მოსწავლეებს, რომ იმუშაონ ამოცანებზე და ისწავლონ საკუთარ აღმოჩენებზე დაყრდნობით.

მასწავლებელთა ტრენინგებზე შეხვედრებსა და დაწყებითი განათლების სპეციალობის სტუდენტებთან ხანგრძლივი პედაგოგიური მოღ-

ვაწეობის დროს გამოიკვეთა, რომ სტუდენტთა უმრავლესობას, და ზოგიერთ მასწავლებელსაც უჭირს ერთიდაიგივე ამოცანის სხვადასხვა ხერხით ინტერპრეტირება. ძირითადად, ამოცანებს ადვილად ხსნიან ალგებრული ხერხით, თუმცა, ზოგჯერ უფრო საინტერესო არითმეტიკული, გეომეტრიული ხერხებია.

განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანის ამოხსნის სხვადასხვა ხერხი.

ამოცანა 1. მამა 26 წლისაა, შვილი 6 წლის. რამდენი წლის მერე იქნება მამა შვილზე 3-ჯერ უფროსი?

ალგებრული ხერხი: ძალიან მარტივია ამ ამოცანის ამოხსნა ცვლადის შემოღებით, ანუ ალგებრული ხერხით. ვთქვათ, მამა შვილზე 3-ჯერ უფროსი იქნება x წლის შემდეგ. x წლის შემდეგ მამა იქნება — $(26 + x)$ წლის, ხოლო შვილი კი — $(6 + x)$ წლის; თუ მამა შვილზე 3-ჯერ უფროსი იქნება, ვწერთ განტოლებას

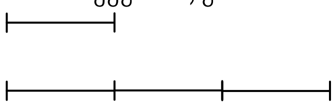
$$26 + x = 3(6 + x)$$
$$26 + x = 18 + 3x$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

ე.ი. 4 წლის შემდეგ მამა იქნება 26+4=30 წლის, ხოლო შვილი 6+4=10 წლის. მაშასადამე, 30:10=3, ე.ი. მამა შვილზე 3-ჯერ უფროსი იქნება 4 წლის შემდეგ.

განვიხილოთ ამ ამოცანის ამოხსნა **არითმეტიკული ხერხით**: თუ მამა 3-ჯერ უფროსი იქნება შვილზე, მაშინ მათი ასაკთა სხვაობა ორჯერ მეტი იქნება შვილის ასაკზე, მაგრამ ეს სხვაობა ხომ მუდმივია — 26–6=20. ამიტომ შვილის ასაკი ამ მომენტში იქნება 20:2=10 წლის, ე.ი. 10–6=4 წლის შემდეგ. 4 წლის შემდეგ შვილი იქნება — 10 წლის, მამა — 26+4=30 წლის. 30:10=3, ე.ი. 3-ჯერ უფროსია მამა შვილზე.

თუ დავუკვირდებით, რა თქმა უნდა, არითმეტიკული ხერხი უფრო მეტ დაკვირვებას, მსჯელობასა და გააზრებას მოითხოვს. მოსწავლეს უნვითარდებათ ანალიტიკური აზროვნების უნარი. პრაქტიკამ აჩვენა, რომ უმრავლესობა მაინც სტანდარტულ პირველ ხერხს - ალგებრულ ხერხს ამჯობინებს. ამიტომაცაა საჭირო ერთი და იგივე ამოცანის ამოხსნისადმი სხვადასხვანაირი მიდგომის უნარ-ჩვევები ჩამოუყალიბდეს მოსწავლეს ჯერ კიდევ დაწყებით კლასებშივე.

კიდევ უფრო საყურადღებოა იგივე ამოცანის ამოხსნა **გეომეტრიული ხერხით**: შვილის ასაკი გამოვსახოთ რაიმე მონაკვეთით, ხოლო მამის ასაკი კი 3 ისეთივე სიგრძის ანუ 3-ჯერ მეტი სიგრძის მონაკვეთით, ე.ი



სურათიდან ჩანს ამ ორ მონაკვეთებს შორის სხვაობას — 2 მონაკვეთის სიგრძე გამოსახავს მამა-შვილს შორის ასაკთა სხვაობას 20-ს, ე.ი ერთი მონაკვეთის სიგრძე არის 20:2=10. მაშასადამე, შვილის ასაკი არის 10 წელი, ხოლო მამის ასაკი 3-ჯერ მეტი, ანუ 30 წელი. მაგრამ რამდენი წლის შემდეგ გახდება მამა 30 წლის? 30–26=4 წლის შემდეგ.

ამოცანა 2. ანას უნდა ეყიდა რვეულები. თუ ის იყიდის 6 რვეულს, მას დარჩება 20 თეთრი, ხოლო თუ ის იყიდის 8 რვეულს, დაკლდება 60 თეთრი. რა ღირს ერთი რვეული?

ალგებრული ხერხი: ვთქვათ ერთი რვეული ღირს x თეთრი, მაშინ 6 რვეულს დასჭირდებოდა $6x$ თეთრი, და რადგანაც 20 თეთრი მორჩა ანას, ე.ი. ანას ჰქონია $(6x + 20)$ თეთრი. 8 რვეული ეღირება $8x$ თეთრი, მაგრამ რადგანაც ანას 60 თეთრი დააკლდა, ე.ი. ანას ჰქონდა $(8x - 60)$ თეთრი. ამოცანის პირობის თანახმად, ვწერთ:

$$6x + 20 = 8x - 60$$
$$2x = 80$$
$$x = 40$$

ე.ი. ერთი რვეული ღირს 40 თეთრი.

არითმეტიკული ხერხი: უფრო საინტერესოა ამ ამოცანის ამოხსნა, თუ ვიმსჯელებთ ასე: ანა თუ 6 რვეულს იყიდის, მას 20 თეთრი დარჩება, მაგრამ 8 რვეულისათვის თუ დააკლდება 60 თეთრი, ე.ი კიდევ 2 რვეულის შესაძენად აკლდება 60 თეთრი, ე.ი. მორჩენილი 20 თეთრი + 60 თეთრი (რაც დააკლდა) = 80 თეთრი ყიდულობს 2 რვეულს, ანუ 1 რვეული ღირს 20 თეთრი.

ძალიან მნიშვნელოვანია მათემატიკური რებუსების სწავლების როლი მათემატიკური აზროვნების განვითარებისათვის. მათემატიკური რებუსები ლოგიკური ამოცანების კერძო შემთხვევაა [2].

ამოცანა 3 [3]. რა ციფრები წერია მოცემული ასოების ნაცვლად, თუ ერთნაირი ასოებით ერთნაირი ციფრებია აღნიშნული და განსხვავებული ასოებით განსხვავებული ციფრები:

$$A + A + A + A + B = \overline{BA}$$

ასეთი მათემატიკური დავალებების შესრულების დროს ხშირად ცდილობენ მოსინჯონ ყველა ციფრი ყოველგვარი ფიქრის გარეშე და შეასრულონ არითმეტიკული მანიპულაციები. აბა ვნახოთ, მოვსინჯოთ A-ს და B-ს ნაცვლად ყველა ციფრის ჩასმით რამდენი შემთხვევა იქნება და შევძლებთ კი მოკლე დროში ყველა შესაძლო შემთხვევის ამოწურვას?

ამ ხერხით ამოცანის ამოხსნა არც საინტერესოა და არც ფაქტიურად შესაძლებელი. ამიტომაც მივცეთ მოსწავლეებს ფიქრის, მსჯელობის საშუალება. დავიწყოთ ასე:

A და B ასოების ნაცვლად უნდა ჩაისვას რომელიმე ციფრი: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. ყველაზე დიდი ერთნიშნა რიცხვიც 9-ც რომ ჩავსვათ A და B-ს ნაცვლად (თუმცა ეს არ შეიძლება, რადგან A-ს და B-ს განსხვავებული ციფრები შეესაბამება), გვექნება:

$$9 + 9 + 9 + 9 = 36$$

ე. ი. ყველაზე დიდი მნიშვნელობა რაც შეიძლება მიიღოს $\overline{BA}$ რიცხვმა, ნაკლებია 36-ზე, მაშ, BA რიცხვის ათეულების გამომსახველი ციფრის,

B-ს შესაძლო მნიშვნელობებია: 1, 2, 3. ანუ $\overline{BA}$ რიცხვი შეიძლება იყოს ამ ტიპის:

$$\overline{1A},\ \overline{2A},\ \overline{3A}$$

ე.ი.

$$1)\ A + A + A + 1 = \overline{1A}$$
$$2)\ A + A + A + 2 = \overline{2A}$$
$$3)\ A + A + A + 3 = \overline{3A}$$

განვიხილოთ თითოეული შემთხვევა ცალ-ცალკე. პირველ შემთხვევაში, თუ A-ს ნაცვლად ჩავსვამთ კენტი ციფრებიდან: 1, 3, 5, 7, 9 რომელიმეს, მაშინ $A+A+A+1=\overline{1A}$ შეუძლებელია შესრულდეს, რადგან $A+A+A$ — კენტი+კენტი+კენტი კვლავ კენტი იქნება და +1 გახდება ლუწი. მაგრამ $\overline{1A}$ ხომ კენტია, რადგან A-ს ნაცვლად კენტი ციფრი ჩავსვით. ანალოგიური მსჯელობით ვნახოთ რა მოხდება ლუწი ციფრების ჩასმის შედეგად. A+A+A — ლუწი+ლუწი+ლუწი კვლავ ლუწი იქნება და +1 გახდება კენტი, მაგრამ $\overline{1A}$ ხომ ლუწია. ე.ი. არ გამოგვადგება არც ერთი ლუწი ციფრი. ამრიგად, პირველი შემთხვევა გამოირიცხა. ანალოგიური მსჯელობით გამოირიცხება 3) შემთხვევაც.

ახლა დაგვრჩა განვიხილოთ 2) შემთხვევა.

$$A + A + A + 2 = \overline{2A}$$

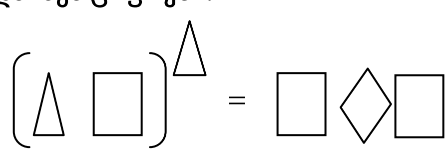
რა ციფრი შეიძლება ჩაისვას A-ს ნაცვლად?

$\overline{2A}$ ჩანაწერი ნიშნავს რომ იგი ორნიშნა რიცხვია და შეიცავს 2 ათეულს, ე.ი. ეს რიცხვი შეიძლება იყოს „ოცდა....“. ამიტომაც A-ს ნაცვლად ცხადია ვერ ჩავსვამთ 1, 2, 3 ,4, 5, იმიტომ რომ ამ რიცხვებიდან არც ერთი 3-ჯერ შესაკრებად აღებული და +2 არ მოგვცემს 2 ათეულს. ე. ი დაგვრჩა შევამოწმოთ 6, 7, 8, 9. ეს არაფერ დიდ ფიქრსა და განსჯას არ მოითხოვს.

$$6 + 6 + 6 + 2 \neq 26$$
$$7 + 7 + 7 + 2 \neq 27$$
$$8 + 8 + 8 + 2 \neq 28$$
$$9 + 9 + 9 + 2 = 29$$

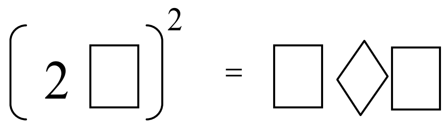
ე.ი. $A = 9$, $B = 2$.

ამოცანა 4. გაშიფრეთ, რა ციფრები შეიძლება ეწეროს შესაბამის ფიგურების ქვეშ, თუ ერთნაირი ფიგურების ქვეშ ერთნაირი ციფრები წერია, ხოლო სხვადასხვა ფიგურების ქვეშ სხვადასხვა ციფრები.



აქაც, თუ ყველა ციფრს მოვსინჯავთ, ამოცანა არ იქნება საინტერესო. დავუკვირდეთ მარცხენა მხარეს — ორნიშნა რიცხვის ახარისხებისას გვეძლევა სამნიშნა რიცხვი — □◇□. ცხადია, Δ 2-ზე მეტი ვერ იქნება, რადგან 2-ზე მეტ ხარისხში ახარისხებისას ორნიშნა რიცხვი (თუნდაც 10) სამნიშნა რიცხვს ვერ მოგვცემს. ე.ი შეიძლება იყოს 0, 1, 2.

ვერ იქნება 0, რადგან 0-ით რიცხვი ვერ დაიწყება. არც 1 იქნება, რადგან ორნიშნა რიცხვი 1 ხარისხში, კვლავ ორნიშნაა. ე.ი. დაგვრჩა = 2 გვექნება



ე.ი. ორნიშნა რიცხვი კვადრატში, ანუ ორნიშნა რიცხვის თავისთავზე ნამრავლი ბოლოვდება იმავე ციფრით, რაზეც მოცემული ორნიშნა რიცხვი. ასეთი ორნიშნა რიცხვის ბოლო ციფრი შეიძლება იყოს 0,1,5,6. ახლა უკვე ადვილია შემოწმება:

$$20^2 = 400,\ 21^2 = 441,\ 25^2 = 625,\ 26^2 = 676$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ △ = 2, □ = 6, ◇ = 7. ე.ი. $26^2 = 676$.

მსგავსი ტიპის ამოცანების ასეთი მსჯელობით ამოხსნა აჩვევს მოსწავლეს ფიქრს, აზრთა შეჯერებას და საკუთარი აღმოჩენების საფუძველზე არგუმენტირებული მსჯელობის ჩატარების შედეგად დასკვნების გამოტანას.

ამოცანების ამოხსნის სხვადასხვა ხერხით ინტერპრეტაცია ხელს უწყობს მოსწავლის მათემატიკური უნარ-ჩვევების ჩამოყალიბებას, სწორი, ლოგიკური, კრიტიკული აზროვნების განვითარებას. მოსწავლისათვის რომელიმე საკითხზე მუშაობა უდიდეს მნიშვნელობას იძენს მაშინ, როცა ის ლოგიკური მიზნისკენ არის მიმართული, როცა მოსწავლეს შეუძლია განიხილოს მიზეზები და წარმოადგინოს ამოცანის ამოხსნის გზები და შეძლოს მათგან ოპტიმალური გზის არჩევა.

ლიტერატურა:

1. სააზროვნო უნარების განვითარების ეფექტიანი სტრატეგიები. მასწავლებელთა პროფესიული განვითარების ეროვნული ცენტრის სატრენინგო მასალები, თბილისი, 2013. გვ.7

2. ა. ქურჩიშვილი, ლ. ქურჩიშვილი, ი. ჭელიძე - მათემატიკური კალეიდოსკოპი, გამომცემლობა ინტელექტი, თბილისი 2004, გვ.209

3. Thomas Sonnabend-Mathematics for elementary Teachers, Copyright 1993 by Saunders College Publishing. p.119

ავტორების ელ. ფოსტის მისამართები
mdeisadze@mail.ru
vladimer.adeishvili@atsu.edu.ge

წინა ნომრის ამოცანების ამოხსნები

$x_1, x_2, \ldots, x_n (n \geq 2)$ რიცხვები ღებულობენ მნიშვნელობებს $[-1, 1]$ სეგმენტიდან. იპოვეთ

$$E = \left|x_1 - \frac{x_2 + \cdots + x_n}{n}\right| + \cdots + \left|x_n - \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n}\right|$$

გამოსახულების უდიდესი მნიშვნელობა

ამოცანა 1

[redacted]

ამოცანა 2

ააგეთ ორი პერიოდული f და g ფუნქცია, რომელთაც გააჩნიათ თვისება: f ფუნქციის ნებისმიერი T_1 პერიოდის და g ფუნქციის ნებისმიერი T_2 პერიოდის ფარდობა ირაციონალური რიცხვია და ა) $f+g$ პერიოდულია; ბ) $f+g$ არ არის პერიოდული.

[redacted]

განვსაზღვროთ f და g ფუნქციები შემდეგნაირად

$$f(x)=\begin{cases}-b-c-b^2+c^2; & x=a\alpha+b\beta+c\gamma\in W,\\ 0; & x\notin W,\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}a+c+a^2-c^2; & x=a\alpha+b\beta+c\gamma\in W,\\ 0; & x\notin W.\end{cases}$$

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $r\alpha$ სახის რიცხვი, სადაც $r\in Q\setminus\{0\}$ წარმოადგენს f ფუნქციის პერიოდს და $s\beta$ სახის რიცხვი, სადაც $s\in Q\setminus\{0\}$ არის g ფუნქციის პერიოდი. ვაჩვენოთ, რომ აღნიშნული პერიოდების გარდა აგებულ ფუნქციებს სხვა პერიოდები არ გააჩნიათ. თუ T არის f ფუნქციის რაიმე პერიოდი, მაშინ $f(\beta+T)=f(\beta)$ და ვინაიდან $f(\beta)=-2$, გვექნება $\beta+T\in W$. მაშასადამე, $T\in W$ და ამიტომ სამართლიანია წარმოდგენა $T=r\alpha+s\beta+t\gamma$, სადაც $r,s,t\in Q$. ვინაიდან $f(T)=f(0)$, ამიტომ გვექნება $-s-t-s^2+t^2=0$, საიდანაც $(s+t)(1+s-t)=0$. ვაჩვენოთ, რომ $1+s-t\neq 0$. თუ $1+s-t=0$, მაშინ $T=r\alpha+s\beta+(1+s)\gamma$. თუ $f(x+T)=f(x)$ ტოლობაში ავიღებთ $x=-\gamma$, მივიღებთ $-s-s+s^2+s^2=1+1$. საიდანაც გვექნება $s=-1$. მაშასადამე $T=r\alpha-\beta$. თუ ახლა $f(x+T)=f(x)$ ტოლობაში ავიღებთ $x=\beta$, მივიღებთ $f(r\alpha)=f(\beta)$ და მაშასადამე $0=-1-1$, რაც წინააღმდეგობაა. მაშასადამე $1+s-t\neq 0$, ამიტომ გვექნება $s+t=0$. მაშასადამე გვაქვს წარმოდგენა $T=r\alpha+s\beta-s\gamma$. ვაჩვენოთ, რომ $s=0$. $f(\beta+T)=f(\beta)$ ტოლობაში ავიღოთ $x=\gamma$. მივიღებთ ტოლობას

$$-s+s-1-s^2+(s-1)^2=-1+1,$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ $s=0$. ზუსტად ანალოგიური მსჯელობით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ მხოლოდ $s\beta$ სახის რიცხვები , სადაც $s\in Q\setminus\{0\}$ არის g ფუნქციის პერიოდები. მაშასადამე f და g ფუნქციათა პერიოდების შეფარდება ირაციონალური რიცხვია. $h=f+g$ ფუნქცია მოიცემა შემდეგნაირად

$$h(x)=\begin{cases}a-b+a^2-b^2; & x=a\alpha+b\beta+c\gamma\in W,\\ 0; & x\notin W.\end{cases}$$

ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიური მსჯელობით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ h ფუნქციის პერიოდებია $t\gamma$ სახის რიცხვები სადაც $t\in Q\setminus\{0\}$.

ბ) ვთქვათ $f(x)=\sin x$ და $g(x)=x-[x], x\in R$. f და g ფუნქციები პერიოდული ფუნქციებია, შესაბამისად პერიოდებით 2π და 1. ცხადია f და g ფუნქციების ნებისმიერი პერიოდების ფარდობა ირაციონალურია. დაუშვათ $h=f+g$ პერიოდული ფუნქციაა და T მისი რაიმე პერიოდია. გვექნება

$$\sin T+T-[T]=0,\quad \sin(-T)-T-[-T]=0.$$

მაშასადამე, $(T-[T])+(-T-[T])=0$, საიდანაც $T-[T]=0$, ანუ T მთელი რიცხვია. გვექნება $\sin T=0$, რაც წინააღმდეგობაა.

ამოცანა 3

ბექა ამბობს, რომ ლუკა უარყოფს, რომ ნინო ამტკიცებს, რომ თეა იტყუება. დაუშვათ, რომ თითოეული ამბობს სიმართლეს ალბათობით $\frac{1}{3}$ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თეა ამბობს სიმართლეს.

რომ ბექა ცრუობს, ლუკა ამბობს მართალს, ნინო ცრუობს და თეა ამბობს მართალს, და ა.შ. ამოცანის პირობის თანახმად მოცემულია ალბათობები: $P(0) = 2/3$ და $P(1) = 1/3$. რადგან თითოეული მათგანი ამბობს სიმართლეს ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად, ამიტომ, ცხადია,

$$P(0000)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{81},P(0001)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{81},\ldots,P(1111)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{81}.$$

განვიხილოთ ხდომილებები:

C = {თეა ამბობს სიმართლეს};

A = {ბექა ამბობს,რომ ლუკა უარყოფს, რომ ნინო ამტკიცებს, რომ თეა იტყუება}.

ცხადია, რომ დასმული ამოცანის პასუხია შემდეგი პირობითი ალბათობის $(C\mid A) = P(C\cap A)/P(A)$ მნიშვნელობა. ადვილი შესამჩნევია, რომ ხდომილება A შეიძლება ასეც ჩამოვაყალიბოთ

A = {ბექა ამბობს, რომ ლუკა ამბობს,რომ ნინო ამბობს, რომ თეა ამბობს სიმართლეს}.

რას ნიშნავს ხდომილება $C\cap A$? ადვილია იმის დანახვა, რომ

$C\cap A$ = {(თეა ამბობს სიმართლეს და ბექა ამბობს, რომ ლუკა ამბობს, რომ ნინო ამბობს, რომ თეა ამბობს სიმართლეს)}.

ახლა ჩვენ ელემენტარული ხდომილებების საშუალებით უნდა გამოვსახოთ ხდომილება $C\cap A$. უპირველეს ყოვლისა, შევნიშნოთ, რომ $C\cap A$ ნიშნავს, რომ თეა ამბობს სიმართლეს. რა შეგვიძლია ვთქვათ დანარჩენებზე? თუ ბექა მართალია, როცა ამბობს, რომ ლუკა ამბობს, რომ ნინო ამბობს, რომ თეა ამბობს სიმართლეს, მაშინ ან ლუკა და ნინო ორივე ამბობს სიმართლეს, ან ლუკა და ნინო ორივე ცრუობს. ანუ, ხდომილება $C\cap A$ შეიცავს შემდეგ ელემენტარულ ხდომილებებს „1111“ და „1001“. რა ხდება იმ შემთხვევაში, როცა ბექა ცრუობს? მაშინ, რადგან ვიცით, რომ თეა სიმართლეს ამბობს, ამიტომ, ან მხოლოდ ლუკა ცრუობს, ან მხოლოდ ნინო ცრუობს. ანუ, ხდომილება $C\cap A$ შეიცავს აგრეთვე შემდეგ ელემენტარულ ხდომილებებს „0011“ და „0101“. ამრიგად, საბოლოოდ

$$C\cap A=\{1111,1001,0011,0101\}.$$

მაშინ, $C\cap A$ ხდომილების ალბათობა იქნება

$$P(C\cap A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{81}+\frac{4}{81}+\frac{4}{81}+\frac{4}{81}=\frac{13}{81}.$$

ახლა რაც შეეხება მხოლოდ A ხდომილებას, უშუალო შემოწმებით ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ ის ხდება მაშინ, როცა ცრუობს ლუწი რაოდენობის პიროვნებები, ანუ როცა ოთხივე ცრუობს, ან ორი მათგანი ცრუობს, ან არც ერთი მათგანი არ ცრუობს.

ამრიგად,

$$A=\{"0000,"\ 0011,"0101"\ ,0110,"1001"\ ,"1010"\ ,"1100"\ ,"1111"\ \}$$

და

$$(A)=P\,("0000,"\ 0011,"0101"\ ,0110,"1001"\ ,"1010"\ ,"1100"\ ,"1111"\ )=$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=$$

$$\frac{16}{81}+\frac{4}{81}+\frac{4}{81}+\frac{4}{81}+\frac{4}{81}+\frac{4}{81}+\frac{4}{81}+\frac{1}{81}=\frac{41}{81}.$$

საბოლოოდ,

$$P\,(C\mid A)=\frac{P(C\cap A)}{P(A)}=\frac{13/81}{41/81}=\frac{13}{41}.$$

ვთქვათ m და n ნატურალური რიცხვებია, ამასთანავე, $n\sqrt{23}-m>0$. აჩვენეთ, რომ $n\sqrt{23}-m>\frac{2}{m}$.

ამოცანა 4

ამოხსნა.

თუ $m\in\{1,2\}$, მაშინ $n\sqrt{23}-m>\frac{2}{m}$ ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის, ამიტომ ვიგულისხმოთ, რომ $m>2$. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ $23n^2-m^2\notin\{1,2,3,4\}$ ნებისმიერი m და n ნატურალური რიცხვებისათვის. მართლაც, თუ $23n^2-m^2\in\{1,2,3,4\}$, მაშინ $m^2(\mathrm{mod}\,23)\in\{19,20,21,22\}$. ეს შეუძლებელია ვინაიდან

$$m^2(\mathrm{mod}\,23)\in\{0,1,2,3,4,6,8,9,12,13,16,18\}.$$

გვაქვს, $23n^2-m^2\geq 5$. ვინაიდან $1>\frac{4}{m^2}$, გვექნება

$$23n^2\geq m^2+5=m^2+4+1>m^2+4+\frac{4}{m^2}=\left(m+\frac{2}{m}\right)^2,$$

მაშასადამე, $n\sqrt{23}-m>\frac{2}{m}$.

ამოცანა 5

წრეწირში ჩახაზულია ABC წესიერი სამკუთხედი. P წერტილი მდებარეობს წრეწირზე. აჩვენეთ, რომ სიდიდე $PA^4+PB^4+PC^4$ არაა დამოკიდებული P წერტილის მდებარეობაზე.

ამოხსნა.

ვთქვათ, O წრეწირის ცენტრია, ხოლო R არის რადიუსი. $\overline{OA}$ და $\overline{OP}$ ვექტორებს შორის კუთხე ავღნიშნოთ φ-ით. გვაქვს

$$PA^2=\left(\overline{OP}-\overline{OA},\,\overline{OP}-\overline{OA}\right)=\left(\overline{OP},\overline{OP}\right)-2\left(\overline{OP},\overline{OA}\right)+\left(\overline{OA},\overline{OA}\right)=2\left(R^2-\left(\overline{OP},\overline{OA}\right)\right),$$

ანალოგიურად,

$$PB^2=2\left(R^2-\left(\overline{OP},\overline{OB}\right)\right),\ PC^2=2\left(R^2-\left(\overline{OP},\overline{OC}\right)\right).$$

მაშინ $PA^2+PB^2+PC^2=6R^2-2\left(\overline{OP},\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}\right)=6R^2$.

$$PA^4=PA^2\cdot PA^2=2\left(R^2-\left(\overline{OP},\overline{OA}\right)\right)\cdot 2\left(R^2-\left(\overline{OP},\overline{OA}\right)\right)$$
$$=4\left[R^4-2R^2\left(\overline{OP},\overline{OA}\right)+\left(\overline{OP},\overline{OA}\right)^2\right].$$

ანალოგიური გამოსახულებები შეგვიძლია დავწეროთ PB^4 და PC^4 თვის.
გვექნება

$$PA^4+PB^4+PC^4=12R^4-8R^2\left(\overline{OP},\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}\right)+\left(\overline{OP},\overline{OA}\right)^2+\left(\overline{OP},\overline{OB}\right)^2+\left(\overline{OP},\overline{OC}\right)^2$$
$$=12R^4+4R^2[\cos^2\varphi+\cos^2(2\pi/3+\varphi)+\cos^2(2\pi/3-\varphi)]=18R^4.$$

ამოცანები

ამოცანა 1.

განვსაზღვროთ ნატურალურ რიცხვთა სამი მიმდევრობა $(a_n), (b_n)$ და (c_n) რეკურენტულად შემდეგი წესით:

1. $a_1=1, b_1=2, c_1=4$;
2. a_n არის უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომელიც არ ეკუთვნის სიმრავლეს $\{a_1,\dots,a_{n-1},b_1,\dots,b_{n-1},c_1,\dots,c_{n-1}\}$;
3. b_n არის უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომელიც არ ეკუთვნის სიმრავლეს $\{a_1,\dots,a_{n-1},a_n,b_1,\dots,b_{n-1},c_1,\dots,c_{n-1}\}$;
4. $c_n=2b_n+n-a_n$.

აჩვენეთ, რომ ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის სამართლიანია უტოლობა $0<n(1+\sqrt{3})-b_n<2$.

ამოცანა 2.

იპოვეთ $\left(\cdots(((x-2)^2-2)^2-2)^2-\cdots-2\right)^2$ გამოსახულების მრავალწევრის სახით წარმოდგენაში x^2-ის კოეფიციენტი თუ კვადრატში ახარისხება გვაქვს n-ჯერ.

ამოცანა 3.

იპოვეთ $\sigma:\{1,2,\dots,n\}\to\{1,2,\dots,n\}$ ურთიერთცალსახა ასახვა (გადანაცვლება) ისეთი, რომ $S(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}|\sigma(i)-i|$ იყოს მაქსიმალური.

ამოცანა 4.

მოცემულია $\vec{a_1},\vec{a_2},\dots,\vec{a_n}$ ვექტორები, რომელთა სიგრძეები არ აღემატება ერთს. აჩვენეთ, რომ $\vec{c}=\vec{a_1}\mp\vec{a_2}\mp\cdots\mp\vec{a_n}$ ვექტორის წარმოდგენაში შესაძლებელია ნიშნები ისე დავსვათ, რომ $|\vec{c}|\le\sqrt{2}$.

ამოცანა 5.

$P_1P_2\dots P_n$ $(n\ge4)$ ამოზნექილი მრავალკუთხედის პერიმეტრია p, ხოლო ყველა დიაგონალის სიგრძეთა ჯამია d. აჩვენეთ, რომ $n-3<2\frac{d}{p}<\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2.$

საერთაშორისო ოლიმპიადები სასკოლო მათემატიკაში

გიორგი ჭელიძე

გივი ნადიბაიძე

ასისტენტ პროფესორი ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ასისტენტ-პროფესორი ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

2013 წლის საერთაშორისო ოლიმპიადა სასკოლო მათემატიკაში ჩატარდა კოლუმბიის ქალაქ სანტა-მარტაში ივლისის თვეში. ასპარეზობაში მონაწილე გუნდები 6-6 მოსწავლისაგან შედგებოდა. საქართველოს ნაკრებს წარმოადგენდნენ: გელა მაღალთაძე (თბილისის კომაროვის სკოლა-პანსიონის XII კლასელი); აკაკი მარგველაშვილი (ქუთაისის ფიზიკა-მათემატიკის სკოლის XII კლასელი); გიორგი სვანაძე (თბილისის კომაროვის სკოლა-პანსიონის XI კლასელი); ზაურ მეშველიანი (თბილისის კომაროვის სკოლა-პანსიონის X კლასელი); თორნიკე მანძულაშვილი (თბილისის ილია ვეკუას სახელობის ფიზიკა-მათემატიკის სკოლის XII კლასელი) და ამირან მელია (თბილისის კომაროვის სკოლა-პანსიონის XI კლასელი).

საქართველოს ოლიმპიური ნაკრების ფორმირება მოხდა ოთხი შესარჩევი ტურის შედეგების საფუძველზე. შესარჩევ წერებს ადმინისტრირებას უწევდა შოთა რუსთაველის სახელობის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი. მკაცრად რეგლამენტირებულ 4-ტურიან წერითი გამოცდებში მონაწილეობის უფლება კი მოიპოვეს რესპუბლიკური სასკოლო მათემატიკური ოლიმპიადის დასკვნითი ტურის შედეგებზე დაყრდნობით გამოვლენილმა 18–მა საუკეთესო მოსწავლემ. მათ შორის იყო ათი მეთერთმეტე–მეთორმეტე კლასელი, ხუთი მეათე და სამი მეცხრე კლასელი. შესარჩევი წერების საფუძველზე დაკომპლექტდა 6-მოსწავლიანი ნაკრები.

ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების დაკომპლექტების შემდეგ ერთთვიანი საწვრთნელი შეკრება ჩატარდა კომაროვის სკოლაში ყოველდღიური 6-საათიანი მეცადინეობებით. ბოლო ეტაპზე კი ეროვნულმა სამეცნიერო ფონდმა უზრუნველყო ნაკრების წევრების ერთკვირიანი წვრთნები ბაკურიანში, სადაც მოსწავლეებს უტარდებოდათ სატრენინგო წერები საერთაშორისო ოლიმპიადების პირობების გათვალისწინებით.

გუნდის ლიდერისა და თანალიდერის გარდა მოსწავლეთა მომზადებაში ასევე მონაწილეობდნენ გამოცდილი ყოფილი ოლიმპიელები: გიორგი არაბიძე, ნიკა მაჭავარიანი და ლერი ბანცური.

საერთაშორისო ოლიმპიადას ხელმძღვანელობს ჟიური, რომლის წევრები არიან ქვეყნების წარმომადგენლები. ჟიურის შეკრება ჩატარდა კოლუმბიის ქ. ბარანკილიაში, სადაც ჟიურის სხდომებზე რამდენიმე ათეული ამოცანიდან (short list) შეირჩა 6 ამოცანა, რომლებიც გადანაწილდა 3–3 ამოცანად და მიეცათ მოსწავლეებს ორ ტურად, ზედიზედ ორ დღეს. საგანგებოდ უნდა აღინიშნოს, რომ შერჩევის კანდიდატ ამოცანათა შორის (short list) მოხვდა თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მაგისტრანტის გიორგი არაბიძის მიერ შედგენილი გეომეტრიული ამოცანა.

ხანგრძლივი და დამღლელი მგზავრობის შემდეგ ნაკრები გუნდი კოლუმბიის ქალაქ სანტა–მარტაში ჩავიდა 21 ივლისს. გამოცდები ჩატარდა 23 და 24 ივლისს. შემდეგ დღეებში კი ჟიურის წევრებმა კოორდინატორებთან ერთად მოახდინეს ნაწერების შეფასება და ქულების შეჯამება. შედეგად ჩვენმა ექვსივე მოსწავლემ ჯილდო დაიმსახურა: აკაკი მარგველაშვილმა და გიორგი სვანაძემ დაიმსახურეს ბრინჯაოს მედლები, ხოლო გელა მაღალთაძემ, თორნიკე მანძულაშვილმა, ზაურ მეშველიანმა და ამირან მელიამ დაიმსახურეს საპატიო სიგელები. ვუსურვოთ ჩვენს ნორჩ ოლიმპიელებს შემდგომი წარმატებები.

ქვემოთ მოვიყვანთ იმ ამოცანებს, რომლებიც მიეცათ მოსწავლეებს წერებზე:

ამოცანა 1. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი (k, n) წყვილისთვის, სადაც k და n მთელი დადებითი რიცხვებია, არსებობს k ცალი (არა აუცილებლად განსხვავებული) მთელი დადებითი რიცხვი $m_1, m_2,\dots,m_k$ ისეთი, რომ

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

ამოხსნა. წინადადება დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით k-ს მიმართ. როცა $k = 1$ მაშინ წინადადება ტრივიალურია. დავუშვათ წინადადება მართებულია $k = j - 1$-თვის და დავამტკიცოთ $k = j$-თვის. განვიხილოთ ორი შემთხვევა, როცა n კენტია და როცა n ლუწია.
1. ვთქვათ $n = 2t - 1$ რაიმე მთელი დადებითი t-თვის.

მაშინ $1+\dfrac{2^j-1}{n}=1+\dfrac{2^j-1}{2t-1}=\dfrac{2(t+2^{j-1}-1)}{2t}\cdot\dfrac{2t}{2t-1}=\left(1+\dfrac{2^{j-1}-1}{t}\right)\left(1+\dfrac{1}{2t-1}\right).$

ინდუქციის დაშვების თანახმად არსებობს ისეთი მთელი დადებითი $m_1, m_2,\dots,m_{j-1}$, რომ

$$1+\frac{2^{j-1}-1}{t}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_{j-1}}\right)$$

და ამრიგად, თუ $m_j = 2t - 1$, ვღებულობთ სასურველ წარმოდგენას $k = j$-თვის.
2. ვთქვათ $n = 2t$ რაიმე მთელი დადებითი t-თვის.
გვაქვს

$$1+\frac{2^j-1}{n}=1+\frac{2^j-1}{2t}=\frac{2t+2^j-1}{2t+2^j-2}\cdot\frac{2t+2^j-2}{2t}=\left(1+\frac{1}{2t+2^j-2}\right)\left(1+\frac{2^{j-1}-1}{t}\right)$$

და თუ m_j–ის როლში ავიღებთ $2t + 2^j - 2$ და კვლავ გამოვიყენებთ ინდუქციის დაშვებას მივიღებთ სასურველ წარმოდგენას. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამოცანა 2. ვუწოდოთ კოლუმბიური კონფიგურაცია სიბრტყეზე მდებარე 4027 წერტილს, თუ არც ერთი სამი წერტილი ერთ წრფეზე არ მდებარეობს და ამასთან, 2013 ცალი წერტილი არის წითელი ფერის, ხოლო დანარჩენი 2014 ცალი წერტილი არის ლურჯი ფერის. განვიხილოთ წრფეთა ოჯახი, რომელიც სიბრტყეს რამოდენიმე არედ ჰყოფს. მოცემული კოლუმბიური კონფიგურაციისთვის წრფეთა ამ ოჯახს ვუწოდოთ *კარგი*, თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

- არცერთი წრფე არ გადის კონფიგურაციის არცერთ წერტილზე;
- სიბრტყის არცერთი არე არ შეიცავს ორივე ფერის წერტილს.

იპოვეთ უმცირესი k ისეთი, რომ 4027 წერტილის ნებისმიერი კოლუმბიური კონფიგურაციისთვის მოიძებნება k ცალი წრფისგან შედგენილი კარგი ოჯახი.

ამოხსნა. პასუხი: $k = 2013$.

ჯერ მოვიყვანოთ მაგალითი, რომელიც გვიჩვენებს, რომ k აუცილებლად მეტია ან ტოლია 2013-ზე. ამისთვის დავყოთ წრეწირი 4026 წერტილით 4026 ტოლ რკალად, ისე, რომ თითოეული რკალის ბოლოები იყოს სხვადასხვა ფერის წერტილები, ხოლო დარჩენილი ერთი ცალი ლურჯი ფერის წერტილი ავიღოთ სიბრტყეზე ნებისმიერ ადგილას. თუ სიბრტყეზე გვაქვს k წრფისგან შექმნილი კარგი ოჯახი, მაშინ ყოველ რკალს აუცილებლად უნდა კვეთდეს ერთი წრფე მაინც. და რადგანაც ყოველ წრფეს მაქსიმუმ ორი საერთო წერტილი შეიძლება ჰქონდეს წრეწირთან ამიტომ უნდა გვქონდეს $2k \geq 4026$, ანუ $k \geq 2013$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ 4027 წერტილის ნებისმიერი კოლუმბიური კონფიგურაციისთვის მოიძებნება 2013 წრფისგან შემდგარი წრფეთა კარგი ოჯახი. ამისთვის გამოვიყენოთ შემდეგი ტრივიალური

ლემა. ყოველი ორი A და B წერტილისათვის არსებობს ორი პარალელური წრფე, რომლებიც გამიჯნავენ ამ ორ წერტილს დანარჩენი წერტილებისგან.

დამტკიცება. გავავლოთ წრფე A და B წერტილებზე. ამოცანის პირობის თანახმად, დანარჩენი 4025 წერტილიდან არცერთი წერტილი ამ წრფეზე არ მდებარეობს, ანუ მანძილები ამ წერტილებიდან AB წრფემდე დადებითი რიცხვებია. ვთქვათ d არის უმცირესი ამ მანძილთა შორის. ცხადია, რომ,

თუ განვიხილავთ AB წრფის პარალელურ და მისგან $d/2$-ით დაშორებულ ორ წრფეს, მაშინ ამ წრფეთა შორის იქნება მოქცეული მხოლოდ A და B წერტილები. ლემა დამტკიცებულია.

ახლა განვიხილოთ მოცემულ წერტილთა ამოზნექილი გარსი P, ანუ უმცირესი ამოზნექილი სიმრავლე, რომელიც მოცემულ 4027 წერტილს შეიცავს. შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1. ვთქვათ P-ს აქვს წითელი ფერის წვერო A. მაშინ ცხადია, რომ ერთი წრფის საშუალებით გავმიჯნავთ ამ წვეროს დანარჩენი წერტილებისგან. გამიჯნულ წერტილებში ახლა უკვე 2012 ცალი წითელი ფერის წერტილია. დავაწყვილოთ ისინი ორ-ორად 1006 ცალ წყვილად და თითოეული წყვილისთვის გამოვიყენოთ ლემა, ანუ თითოეული წყვილი ორი წრფით გავმიჯნოთ დანარჩენი 4025 წერტილისგან. ამრიგად, სულ გვექნება $1+2\cdot1006=2013$ წრფე.

2. ვთქვათ, ახლა P-ს არა აქვს წითელი ფერის წვერო, ანუ მისი ყველა წვერო ლურჯია. განვიხილოთ P-ს ორი მეზობელი ლურჯი A და B წვერო. ცხადია, რომ AB-ს პარალელური წრფით შეიძლება A-ს და B-ს გამიჯვნა დანარჩენი წერტილებისგან. გამიჯნულ წერტილებში უკვე 2012 ცალი ლურჯი წერტილია, რომლებსაც ისევ, როგორც წინა შემთხვევაში, გავმიჯნავთ დანარჩენი 4025 წერტილისგან 2012 წრფით. ანუ ამ შემთხვევაშიც 2013 წრფე საკმარისია. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამოცანა 3. ვთქვათ ABC სამკუთხედში წვეროს მოპირდაპირე გარეჩახაზული წრეწირი ეხება BC გვერდს A_1 წერტილში. ანალოგიურად განვსაზღვროთ B_1 წერტილი CA გვერდზე და C_1 წერტილი AB გვერდზე, შესაბამისად B და C წვეროს მოპირდაპირე გარეჩახაზული წრეწირების საშუალებით. დავუშვათ, რომ $A_1B_1C_1$ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი დევს ABC სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირზე. დაამტკიცეთ, რომ ABC მართკუთხა სამკუთხედია.

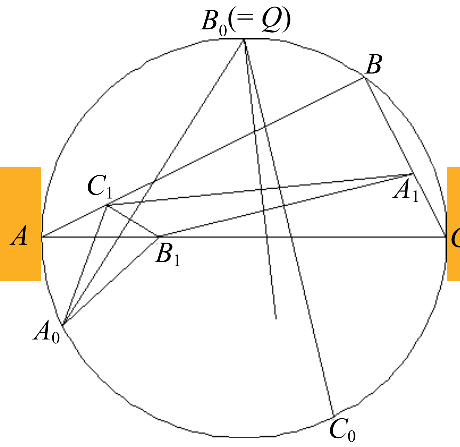
ABC სამკუთხედში, წვეროს მოპირდაპირე გარეჩახაზული წრეწირი ეწოდება ისეთ წრეწირს, რომელიც ეხება BC გვერდს და ასევე ეხება AB და AC გვერდების გაგრძელებებს. B და C წვეროს მოპირდაპირე გარეჩახაზული წრეწირები განისაზღვრება ანალოგიურად.

ამოხსნა. ვთქვათ A_0, B_0 და C_0 შესაბამისად CAB, ABC და BCA რკალების შუაწერტილებია.

ლემა. $A_0B_1=A_0C_1$. ამასთან A, A_0, B_1 და C_1 წერტილები ციკლურია, ხოლო A და A_0 წერტილები მდებარეობენ B_1C_1 წრფის ერთ მხარეს. ანალოგიური დებულებები სრულდება B_0 და C_0 წერტილებისთვისაც.

დამტკიცება. თუ $A = A_0$, მაშინ ABC სამკუთხედი ტოლფერდაა და ამიტომ ცხადია, რომ $AB_1 = AC_1$. ლემის დანარჩენი დებულებები კი ტრივიალურია. ამიტომ ვიგულისხმოთ, რომ $A \neq A_0$. დავამტკიცოთ, რომ $\Delta A_0C_1B = \Delta A_0B_1C$. A_0-ის განსაზღვრებიდან გამომდინარე $A_0B = A_0C$. ადვილი საჩვენებელია, რომ $BC_1 = CB_1$. მართლაც, განვიხილოთ C წვეროს მოპირდაპირე გარეჩახაზული წრეწირი. რადგანაც ერთი წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებული მხებები ტოლია, გვაქვს ტოლობა $CB+BC_1=CA+AC_1$. ამრიგად, $2(CB+BC_1) = CB+BC_1+CA+AC_1 = CB+AB+CA = 2p$ და ამიტომ $BC_1 = p-BC$. ანალოგიურად ვღებულობთ, რომ $CB_1 = p-BC$, ე.ი. $BC_1 = CB_1$. ასევე გვაქვს $\angle C_1BA_0 = \angle ABA_0 = \angle ACA_0 = \angle B_1CA_0$ და ამრიგად $\Delta A_0C_1B = \Delta A_0B_1C$, ე.ი. დავამტკიცეთ ტოლობა $A_0B_1 = A_0C_1$. შევნიშნოთ, რომ $\angle AC_1A_0 = \angle AB_1A_0$, რადგანაც ისინი ტოლ $\angle A_0C_1B$ და $\angle A_0B_1C$ კუთხეებს ავსებენ $\angle 180°$-მდე. ამრიგად, ვაჩვენეთ, რომ $AA_0B_1C_1$ მართლაც ციკლური ოთხკუთხედია AA_0 და B_1C_1 მოპირდაპირე გვერდებით. ლემა დამტკიცებულია.

ვინაიდან $\angle A_1B_1C_1$ სამკუთხედზე შემოხაზული Γ წრეწირის Q ცენტრი დევს ABC სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირზე, ამიტომ ცხადია, რომ A_1, B_1 და C_1 წერტილები დევს Γ-ს ნახევარი რკალის შიგნით, ე.ი. $\angle A_1B_1C_1$ სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ B_1 კუთხე არის ბლაგვი.



ამრიგად, Q და B_0 დევს A_1C_1 წრფის სხვადასხვა მხარეს, ასევე B და B_1-იც დევს A_1C_1 წრფის სხვადასხვა მხარეს და ე.ი. B და Q დევს A_1C_1 წრფის ერთ მხარეს. ლემის გამო B და B_0-იც A_1C_1 წრფის ერთ მხარესაა და ამიტომ Q და B_0 წერტილები არიან A_1C_1 წრფის ერთ მხარეს. ისევე ლემის გამო $B_0C_1 = B_0A_1$ და ამრიგად ვღებულობთ, რომ B_0 და Q წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა. იგივე ლემის თანახმად QA_0 და QC_0 შესაბამისად B_1C_1 და A_1B_1 მონაკვეთების შუამართობებია. ამიტომ

$$\angle C_1B_0A_1 = \angle C_1B_0B_1 + \angle B_1B_0A_1 = 2\angle A_0B_0B_1 + 2\angle B_1B_0C_0 = 2\angle A_0B_0C_0 = 180^\circ - \angle ABC\,.$$

მეორეს მხრივ, ლემის მეორე ნაწილის თანახმად $\angle C_1B_0\,A_1 = \angle C_1BA_1 = \angle ABC$ და ვღებულობთ, რომ $\angle ABC = 180° - \angle ABC$, ე.ი. $\angle ABC = 90°$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

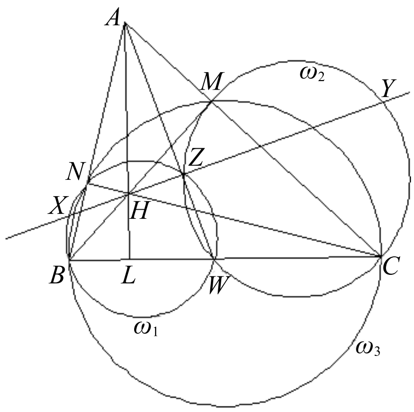
ამოცანა 4. მოცემულია მახვილკუთხა სამკუთხედი ABC, რომლის ორთოცენტრია H. ვთქვათ W არის BC გვერდის შიგა წერტილი, ხოლო M და N შესაბამისად B და C წვეროდან დაშვებული სიმაღლეების ფუძეებია. ვთქვათ, ω_1 არის BWN სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი, ხოლო X ისეთი წერტილია ω_1-ზე, რომ WX არის ω_1-ის დიამეტრი. ანალოგიურად, ვთქვათ ω_2 არის CWM სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი და Y ისეთი წერტილია ω_2-ზე, რომ WY არის ω_2-ის დიამეტრი.

დაამტკიცეთ, რომ X, Y და H ერთ წრფეზე მდებარეობს.

ამოხსნა. ვთქვათ Z არის ω_1 და ω_2 წრეწირების გადაკვეთის წერტილი განსხვავებული W-სგან. ვაჩვენოთ, რომ X, Y, Z და H ერთ წრფეზე მდებარეობს.

ვინაიდან $\angle BNC = \angle BMC = 90°$, ამიტომ B, C, N და M წერტილები მდებარეობენ ერთ წრეწირზე, აღვნიშნოთ იგი ω_3-ით. შევნიშნოთ, რომ WZ არის ω_1 და ω_2 წრეწირების რადიკალური ღერძი. ანალოგიურად, BN არის ω_1 და ω_3-ის, ხოლო CM – ω_2 და ω_3-ის რადიკალური ღერძები. ამრიგად $A = BN \cap CM$ არის ω_1, ω_2 და ω_3 წრეწირების რადიკალური ცენტრი, რაც ნიშნავს იმას, რომ WZ წრფე გადის A წერტილზე.

რადგანაც WX და WY წარმოადგენენ შესაბამისად ω_1 და ω_2 წრეწირების დიამეტრებს, ამიტომ $\angle WZX = \angle WZY = 90°$, რაც ნიშნავს იმას, რომ X და Y დევს წრფეზე რომელიც გადის Z წერტილზე და WZ-ის მართობულია.



ვთქვათ L არის წვეროდან დაშვებული სიმაღლის ფუძე. ცხადია, რომ ოთხკუთხედი $BNMC$ ციკლურია, ამიტომ გვაქვს $AL \cdot AH = AB \cdot AN = AW \cdot AZ$ და ე.ი. ტოლობა $\frac{AZ}{AH} = \frac{AL}{AW}$.

თუ, წერტილი დევს AW წრფეზე, მაშინ იგი აუცილებლად ემთხვევა Z წერტილს და ამრიგად ვღებულობთ დასამტკიცებელ დებულებას. თუ H არ დევს AW-ზე, მაშინ გვაქვს სამკუთხედები AHZ და ALW, რომლებიც მსგავსი სამკუთხედებია, რადგანაც მათ კუთხე $\angle HAZ$ საერთო აქვთ და ამასთან სრულდება ტოლობა $\frac{AZ}{AH} = \frac{AL}{AW}$. ამრიგად, $\angle HZA = \angle WLA = 90°$ რაც ნიშნავს იმას, რომ H წერტილი ასევე დევს XYZ წრფეზე. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამოცანა 5. ვთქვათ, $\mathbb{Q}_{>0}$ არის ყველა დადებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე. ვთქვათ $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

(i) ყოველი $x, y \notin \mathbb{Q}_{>0}$ სრულდება უტოლობა $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) ყოველი $x, y \notin \mathbb{Q}_{>0}$ სრულდება უტოლობა $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) არსებობს რაციონალური რიცხვი $a > 1$ ისეთი, რომ $f(a) = a$.

დაამტკიცეთ, რომ $f(x) = x$ ყოველი $x \notin \mathbb{Q}_{>0}$.

ამოხსნა. დამტკიცება განვახორციელოთ რამდენიმე ეტაპად.

1. $f(1) \geq 1$.

მართლაც, $f(1)f(a) \geq f(a) \Rightarrow f(1)a \geq a \Rightarrow f(1) \geq 1$.

2. ყოველი $x \Rightarrow \mathbb{Q}_{>0}$, $f(x) > 0$ და ყოველი მთელი დადებითი m-თვის $f(m) \geq m$.

მართლაც, თუ m მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ (ii)-ის გამო

$$f(m) = f(1+1+...+1) \geq mf(1) \Rightarrow f(m) \geq m.$$

ამიტომ, თუ $x = \frac{m}{n}$, სადაც m და n მთელი დადებითი რიცხვებია,

$$f(m/n)\,f(n) \geq f(m) \Rightarrow f(m/n) > 0.$$

3. თუ $x > y$ მაშინ $f(x) > f(y)$.

მართლაც, $f(x) \geq f(x-y) + f(y) > f(y)$.

4. თუ $x \geq 1$, მაშინ $f(x) \geq x$.

თუ $x = 1$ მაშინ 1-ის გამო $f(1) \geq 1$. ვთქვათ ახლა $x > 1$ და დავუშვათ წინააღმდეგობა, ანუ დავუშვათ $f(x) < x$. მაშინ არსებობენ მთელი დადებითი რიცხვები n და m, რომ $f^n(x) < m < x^n$. მართლაც, 2-ის გამო

$$x^n - f^n(x) = (x - f(x))(x^{(n-1)} + x^{(n-2)} f(x) + \ldots + f^{(n-1)}(x)) \geq (x - f(x))\, x^{(n-1)}$$

და n ავიღოთ ისეთი დიდი, რომ $(x-f(x))\,x^{(n-1)} > 1$. ეს ნიშნავს, რომ $(f^n(x), x^n)$ ინტერვალში მოხვდება რაღაც მთელი რიცხვი m, ანუ მართებულია უტოლობათა ჯაჭვი $f^n(x) < m < x^n$. ეს კი წინააღმდეგობაა, რადგანაც ზრდადობიდან და 2-დან გვაქვს $f(x^n) > f(m) \geq m > f^n(x) \geq f(x^n)$.

5. $f(a^n) = a^n$.

მართლაც, (i)-ის და 4-ის გამო $a^n = f^n(a) \geq f(a^n) \geq a^n$.

6. თუ $x \geq 1$, მაშინ $f(x) = x$.

მართლაც, ავიღოთ მთელი დადებითი რიცხვი m ისეთი დიდი, რომ $a^m - x > 1$. მაშინ 4-ის, 5-ის და (ii)-ის გამო გვექნება $a^m = f(a^m) \geq f(a^m - x) + f(x) \geq a^m - x + f(x)$, ანუ $f(x) \leq x$ და კვლავ 4-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ $f(x) = x$.

7. ყოველი $x \notin \mathbb{Q}_{>0}$, $f(x) = x$. მართლაც, თუ $x = \dfrac{m}{n}$, სადაც m და n მთელი დადებითი რიცხვებია, მაშინ

$$m = f(m) = f(x + x + \ldots + x) \geq nf\left(\frac{m}{n}\right) = f(n) f\left(\frac{m}{n}\right) \geq f(m) = m$$

ანუ $nf\left(\dfrac{m}{n}\right) = m \Rightarrow f\left(\dfrac{m}{n}\right) = \dfrac{m}{n}$. რ.დ.გ.

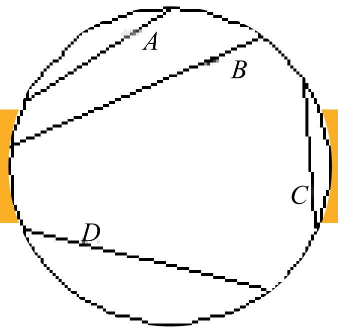
ამოცანა 6. ვთქვათ $n \geq 3$ არის მთელი რიცხვი. განვიხილოთ წრეწირი და მასზე განლაგებული $n+1$ ცალი წერტილი, რომელიც ამ წრეწირს ტოლი სიგრძის რკალებად ჰყოფს. განვიხილოთ ყველა ისეთი მარკირება ამ წერტილებისა 0, 1,…, n რიცხვების საშუალებით, რომ ყოველ მარკირებაში, თითოეული რიცხვი გამოიყენება მხოლოდ ერთხელ როგორც მარკერი. ორი ასეთი მარკირება ითვლება ეკვივალენტურად, თუ ერთი მათგანის მიღება შეიძლება მეორესგან წრეწირის მოტრიალებით. მარკირებას ეწოდება შესანიშნავი, თუ ყოველი ოთხი $a < b < c < d$ მარკერისთვის, სადაც $a + d = b + c$, ქორდა რომლის ბოლოებია a და d, არ კვეთს ქორდას რომლის ბოლოებია b და c.

ვთქვათ M არის შესანიშნავი მარკირებების რაოდენობა, და ვთქვათ N არის ისეთი დალაგებული (x, y) წყვილების რაოდენობა, რომ x და y მთელი დადებითი რიცხვებია, ამასთან $x + y \leq n$ და $gcd\,(x, y) = 1$.

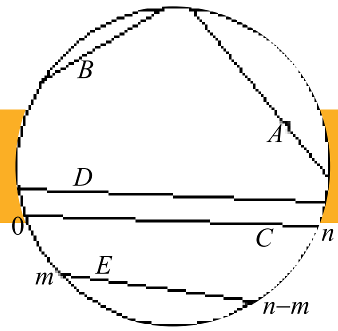
დაამტკიცეთ ტოლობა $M = N + 1$.

ამოხსნა. k-ქორდა ვუწოდოთ ქორდას რომლის ბოლოებზე მდებარე მარკერთა ჯამი არის k. (წერტილი, რომელიც მარკირებულია m რიცხვით წარმოადგენს გადაგვარებულ $2m$-ქორდას.) ვიტყვით, რომ ქორდათა სამეული არის ჩამწკრივებული, თუ ერთ-ერთი ქორდის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობს დანარჩენი ორი.

მაგალითად, ნახაზ 1-ზე მოცემული A, B, C ქორდათა სამეული ჩამწკრივებულია, ასევე A, B და D ქორდებიც ჩამწკრივებულია, ხოლო A, D, C და B, D, C არაა ჩამწკრივებული ქორდების სამეულები.



ნახ. 1



ნახ. 2

ვიტყვით, რომ ქორდათა სიმრავლე არის ჩამწკრივებული, თუ ამ სიმრავლიდან აღებული ნებისმიერი სამი ქორდა არის ჩამწკრივებული.

ლემა. შესანიშნავ მარკირებაში, ყოველი მთელი k-თვის, k-ქორდათა სიმრავლე ჩამწკრივებულია.

დამტკიცება. ლემა დავამტკიცოთ მკაცრი მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით. როცა $n \leq 4$ მაშინ ადვილი სანახავია, რომ წინადადება მართებულია. ვთქვათ ახლა წინადადება მართებულია ყოველი მთელი რიცხვისთვის n-მდე და დავამტკიცოთ n-თვის. დავუშვათ წინააღმდეგობა, ანუ დავუშვათ, რომ არსებობს შესანიშნავი მარკირება 0, 1,…, n რიცხვების საშუალებით და არსებობს ქორდები A, B და C, რომლებიც არ არიან ჩამწკივებული. თუ n არ წარმოადგენს A, B და C ქორდის ბოლოების მარკერს, მაშინ წავშალოთ ის წერტილი რომლის მარკერსაც n წარმოადგენს. ბუნებრივად მივიღებთ n ცალი წერტილისგან და 0, 1,…, n–1 მარკერებისგან შედგენილ შესანიშნავ მარკირებას არაჩამწკრივებული სამი ქორდით, რაც ეწინააღმდეგება ინდუქციის დაშვებას. (ბუნებრივ მიღებაში ვგულისხმობთ შემდეგს: ერთი წერტილის წაშლით მიღებული წერტილები წრეწირს თანაბარ რკალებად აღარ ჰყოფს, მაგრამ ჩვენ შეგვიძლია ჩავაჩოჩოთ ეს წერტილები თავისივე მარკერებით წრეწირის გასწვრივ ისე, რომ მათ შორის მანძილები ტოლი გახდეს, ხოლო მარკირებების თანმიმდევრობა უცვლელი დარჩეს. შემდგომში ბუნებრივად მიღებული მარკირების ქვეშ ვიგულისხმებთ

სწორედ ამას.) თუ 0 არ წარმოადგენს A, B და C ქორდის ბოლოების მარკერს, მაშინ თუ წავშლით იმ წერტილს, რომლის მარკერსაც 0 წარმოადგენს და ყველა მარკერს შევამცირებთ ერთით, ბუნებრივად მივიღებთ n ცალი წერტილისგან და $0, 1,\ldots, n–1$ მარკერებისგან შედგენილ შესანიშნავ მარკირებას არაჩამწკრივებული სამი ქორდით, რაც ეწინააღმდეგება ინდუქციის დაშვებას. ამრიგად 0 და n არის A, B და C ქორდების ბოლოების მარკერებს შორის. ადვილი საჩვენებელია, რომ 0 და n არის ერთი ქორდის, ვთქვათ C ქორდის ბოლოების მარკერები. (მართლაც, თუ ეს ასე არაა, მაშინ გვაქვს ქორდა ბოლოებით 0 და a. ასევე გვაქვს ქორდა ბოლოებით n და b. ეს კი შეუძლებელია ვინაიდან $n > 0 + a = k = n + b > n$.)

ვთქვათ, D არის პირველი ქორდა, რომელიც პარალელურია C ქორდის და რომელიც იმავე მხარესაა რომელშიც არის A და B (ნახაზი 2) ვთქვათ, მის ბოლოებზე მარკერთა ჯამი არის m, ანუ, ვთქვათ, არის m-ქორდა. ცხადია შესაძლებელია მხოლოდ სამი შემთხვევა $m = n$, ან $m < n$, ან $m > n$. ვაჩვენოთ, რომ სამივე შემთხვევაში მივიღებთ წინააღმდეგობას ინდუქციის დაშვებასთან. ეს კი დაასრულებს ლემის დამტკიცებას.

1. თუ $m = n$, მაშინ n-ქორდები A, B და D არ იქნებიან ჩამწკრივებული. ახლა, თუ წავშლით C ქორდას და ყველა მარკერს შევამცირებთ ერთით, ბუნებრივად მივიღებთ $n – 1$ წერტილითა და $0, 1,\ldots, n–2$ მარკერებით შედგენილ შესანიშნავ მარკირებას, რომელიც შეიცავს არაჩამწკრივებულ სამ ქორდას, რაც ეწინააღმდეგება ინდუქციის დაშვებას.

2. თუ $m < n$, მაშინ m-ქორდა რომელიც შედგენილია 0 და m მარკერით არ კვეთს D-ს, ამრიგად ქორდა C ანცალკევებს D ქორდასა და იმ წერტილს რომლის მარკერია m. ქორდა E, რომლის ბოლოების მარკერებია m და n-მ არ კვეთს C, ამრიგად C ანცალკევებს E და D-ს. ეს ნიშნავს, რომ n-ქორდები A, B და E, არ იქნებიან ჩამწკრივებული. თუ წავშლით C ქორდას და ყველა მარკერს შევამცირებთ ერთით, ისევ ბუნებრივად მივიღებთ $n – 1$ წერტილითა და $0, 1,\ldots, n–2$ მარკერებით შედგენილ შესანიშნავ მარკირებას, არაჩამწკრივებული სამი ქორდით. კვლავ წინააღმდეგობა. და ბოლოს

3. თუ $m > n$, მაშინ შევცვალოთ მოცემული შესანიშნავი მარკირება შემდეგნაირად: x მარკერის ნაცვლად დავწეროთ $n–x$, $0 \le x \le n$. ცხადია, რომ m-ქორდა გადავა $(2n–m)$-ქორდაში, ხოლო მიღებული ახალი მარკირება იქნება კვლავ შესანიშნავი. ასეთნაირად ეს შემთხვევა დაიყვანება წინა, $m < n$ შემთხვევაზე, რომელიც როგორც ვნახეთ შეუძლებელი იყო.

ლემა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ ტოლობა მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით. როცა $n = 3$, ადვილი სანახავია, რომ $N = 3$ და $M = 4$ ანუ $M = N + 1$ ტოლობა ჭეშმარიტია. ვთქვათ ახლა ტოლობა მართებულია $n–1$-სთვის და დავამტკიცოთ n-სთვის. განვიხილოთ შესანიშნავი მარკირება $0, 1,\ldots, n$ რიცხვების საშუალებით და ვუწოდოთ მას S. იმ წერტილის წაშლით, რომლის მარკერია n, ბუნებრივად მივიღებთ შესანიშნავ მარკირებას $0, 1,\ldots, n–1$ რიცხვების საშუალებით, ვუწოდოთ მას T, რომელშიც ყოველი

n-ქორდა იქნება ჩამწკრივებული. ცხადია, რომ ამ n-ქორდის ბოლოების მარკირებაში მონაწილეობს ყველა რიცხვი n–1-ის ჩათვლით გარდა 0-ისა. ვიტყვით, რომ მიღებული მარკირება არის პირველი ტიპის, თუ 0 მოთავსებულია ორ n-ქორდას შორის და ვიტყვით, რომ ის არის მეორე ტიპის, წინააღმდეგ შემთხვევაში. ვაჩვენოთ ახლა, რომ 0, 1,…, n–1 რიცხვების საშუალებით მიღებული ყოველი პირველი ტიპის მარკირება, ბუნებრივად წარმოიქმნება მხოლოდ ერთი მარკირებიდან, რომელშიც მონაწილეობს 0, 1,…, n რიცხვები. ხოლო 0, 1,…, n–1 რიცხვების საშუალებით მიღებული ყოველი მეორე ტიპის მარკირება, ბუნებრივად წარმოიქმნება ზუსტად ორი მარკირებიდან, რომელშიც მონაწილეობს 0, 1,…, n რიცხვები.

თუ T არის პირველი ტიპის, მაშინ 0 მოთავსებულია ორ n-ქორდას შორის მდებარე ერთ-ერთ რკალზე. ვთქვათ ეს ქორდებია A და B. განვიხილოთ n-ქორდა რომლის ბოლოებია 0 და n. მაშინ ეს ქორდა A და B ქორდასთან ერთად წარმოადგენს სამ ცალ n-ქორდას, რომლებიც უნდა იყვნენ ჩამწკრივებული S-ში. ამიტომ n-ით მარკირებული ბოლო აუცილებლად უნდა იდოს ორ n-ქორდას შორის მდებარე მეორე რკალზე, ანუ იმ რკალზე რომელზეც 0 არ დევს. აქედან გამომდინარე ვასკვნით, რომ S აღდგება T-დან ცალსახად. ვთქვათ, ახლა T არის ნებისმიერი პირველი ტიპის მარკირება და მას ვამატებთ ერთ წერტილს მარკერით n, ისე რომ n-ქორდები ჩამწკრივებულია. ვაჩვენოთ, რომ ამ ერთი წერტილის დამატებით, ბუნებრივად აღდგება შესანიშნავი S მარკირება. როცა $0 < m < n$, m-ქორდა S-ში ასევე m-ქორდაა T-სი, ასე რომ ისინი ჩამწკრივებულია, ანუ არ თანაიკვეთებიან. ვთქვათ ახლა $n < m < 2n$. განვიხილოთ პარალელურ n-ქორდათა სიმრავლე (რომლის ბოლოების მარკერებია ყველა რიცხვი 0, 1,…, n და t წრფე რომელიც ამ ქორდათა მართობულია და თითოეულ ქორდას შუაზე ჰყოფს. თუ ორი m-ქორდა თანაიკვეთება მაშინ ცხადია თანაიკვეთება ამ ქორდების სიმეტრიული ქორდებიც t წრფის მიმართ. მაგრამ ისინი $2n$–m-ქორდებია და რადგანაც $0 < 2n-m < n$ ამიტომ, როგორც წინა შემთხვევაში ვნახეთ, ეს შეუძლებელია.

თუ T არის მეორე ტიპის, მაშინ არის ორი განლაგება წერტილისა მარკერით n, 0-ის ერთ მხარეს წრეწირის გასწვრივ, ან 0-ის მეორე მხარეს ასევე წრეწირის გასწვრივ. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ ორივე განლაგებას ბუნებრივად მივყავართ შესანიშნავ მარკირებამდე 0, 1,…, n რიცხვების საშუალებით.

ვთქვათ M_n არის რაოდენობა შესანიშნავი მარკირებებისა 0, 1,…, n რიცხვების საშუალებით, ხოლო L_{n-1} არის რაოდენობა მეორე ტიპის შესანიშნავი მარკირებებისა 0, 1,…, n–1 რიცხვების საშუალებით. გვექნება

$$M_n = (M_{n-1} - L_{n-1}) + 2L_{n-1} = M_{n-1} + L_{n-1}.$$

ინდუქციის დაშვების ძალით, $M_{n-1} = N_{n-1} + 1$, სადაც N_{n-1} არის რაოდენობა იმ დალაგებული (x, y) წყვილებისა, სადაც $x + y \le n-1$ და $gcd(x, y) = 1$. ახლა თუ ვაჩვენებთ, რომ L_{n-1} არის რაოდენობა იმ დალაგებული (x, y) წყვილებისა, სადაც $x + y = n$ და $gcd(x, y) = 1$, მაშინ მივიღებთ

$$M_n = M_{n-1} + L_{n-1} = N_{n-1} + 1 + L_{n-1} = N_n + 1,$$

ანუ დასამტკიცებელ ტოლობას.

ამრიგად, დასამტკიცებელი დაგვრჩა, რომ L_{n-1} არის რაოდენობა იმ დალაგებული (x,y) წყვილებისა, სადაც $x + y = n$ და $gcd(x, y) = 1$. ბოლო ტოლობა გადავწეროთ ასე: $gcd(x, n-x) = 1$, ეს კი ცხადია ეკვივალენტურია პირობის $gcd(x, n) = 1$. ამრიგად, რაოდენობა იმ დალაგებული (x, y) წყვილებისა, სადაც $x + y = n$ და $gcd(x, y) = 1$, ტოლია $\varphi(n) = \#\{x:1 \le x \le n, gcd(x, n) = 1\}$, ანუ ეილერის ფუნქციის მნიშვნელობისა n-ში. $L_{n-1} = \varphi(n)$ ტოლობის საჩვენებლად განვიხილოთ მეორე ტიპის შესანიშნავი მარკირება, ანუ გვაქვს ჩამწკრივებული n-ქორდები და წერტილი მარკერით ნული არ იმყოფება არც ერთ ორ n-ქორდას შორის. დავიწყოთ მოძრაობა საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით იმ წერტილიდან რომლის მარკერია ნული და თანმიმდევრობით ამოვწეროთ მარკერები: $0, f(1), f(2)\ldots, f(n-1)$. ვინაიდან n-ქორდები ჩამწკრივებულია და ყოველი მარკერი 1-დან n–1-მდე მონაწილეობს მარკირებაში ამიტომ გვექნება.

$f(i) + f(-i) = n$ ყოველი $i = 1, 2,\ldots, n-1$-თვის. აქ $-i$ აღნიშნავს i-ურ ადგილს 0-დან, საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

ვთქვათ, $f(a) = n-1$. ლემის ძალით, n–1-ქორდები ჩამწკრივებულია. ცხადია ყველა მარკერი გამოიყენება ამ ქორდების ბოლოების მარკირებაში, ამიტომ ეს n–1-ქორდებიც პარალელურია და გვაქვს ტოლობა: $f(i) + f(a-i) = n-1$ ყოველი $i = 0, 1, 2,\ldots, n-1$.

ამრიგად ვღებულობთ $f(a-i) = f(-i) - 1$.
ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$f(-ak) = k \text{ ყოველი } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (*)$$

აქ ak-ს ქვეშ ვგულისხმობთ ak-ს მოდულით n.

მართლაც, როცა $i = a$, რადგანაც $f(0) = 0$ გვაქვს $f(-a) = 1$. ვთქვათ ახლა $f(-ak) = k$. ავიღოთ $i=a(k+1)$. გვექნება $f(a-a(k+1))=f(-a(k+1))-1$ ანუ $f(-ak)=f(-a(k+1))-1$ და ვღებულობთ დასამტკიცებელ ტოლობას $f(-a(k+1))=k+1$.

ამრიგად $f(-ak) = k$ ყოველი $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ და რადგანაც $\{0, f(1), f(2) \ldots, f(n-1)\} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ ამიტომ აუცილებლად უნდა გვქონდეს $gcd(a, n) = 1$. რაც ნიშნავს იმას, რომ $L_{n-1} \leq \varphi(n)$. რომ ვაჩვენოთ, რომ ეს უტოლობა აგრეთვე ტოლობაცაა შევნიშნოთ, რომ (*) მარკირება წარმოადგენს შესანიშნავ მარკირებას. მართლაც განვიხილო ოთხი მარკერი წრეწირზე x, y, z და t, ისეთი რომ $x + t = y + z$. მაშინ ამ მარკერების შესაბამისი წერტილების ადგილის ნომრები აკმაყოფილებს ტოლობას $-ax-at = -ay-az$ რაც ნიშნავს, რომ ქორდები ბოლოებით x და t, პარალელურია ქორდის ბოლოებით y და z. ამრიგად (*) მიღებული დალაგება შესანიშნავია და აგების თანახმად არის მეორე ტიპის. ე.ი. მივიღეთ, რომ $L_{n-1}=\varphi(n)$ რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ავტორთა ელექტრონული მისამართები:
g.nadibaidze@gmail.com
g.chelidze@mail.ru

თსუ

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

რამაზ ბოჭორიშვილი

თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო
მეცნიერებათა ფაკულტეტის
დეკანი, სრული პროფესორი

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მისია არის: მაღალი ხარისხის განათლების უზრუნველყოფა; მაღალი დონის ფუნდამენტური და გამოყენებითი კვლევების წარმოება; კვლევაზე დაფუძნებული სწავლების განხორციელება; მოტივირებული და ნიჭიერი სტუდენტების მიზიდვა; კვლევებისა და სწავლების ინტერნაციონალიზაცია.

ფაკულტეტი აერთიანებს 8 დეპარტამენტს, 19 სამეცნიერო-კვლევით ინსტიტუტს, 33 სასწავლო-კვლევით ლაბორატორიას. ძირითად სასწავლო და კვლევითი საქმიანობას ახორციელებს შემდეგი დეპარტამენტები: მათემატიკის, კომპიუტერული მეცნიერებების, ფიზიკის, ქიმიის, ბიოლოგიის, გეოლოგიის, გეოგრაფიის, ელექტრული და ელექტრონული ინჟინერიის.

სამეცნიერო კვლევების თვალსაზრისით ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი უდავო ლიდერია უნივერსიტეტში და საქართველოში: გვაქვს ყველაზე მეტი დაფინანსებული ადგილობრივი და საერთაშორისო პროექტი, ყველაზე მეტი პუბლიკაცია აღიარებულ მაღალრეიტინგულ საერთაშორისო გამოცემებში; ფაკულტეტის სახელით ასობით მოხსენება კეთდება სამეცნიერო კონფერენციებსა და სემინარებზე.

ფაკულტეტის სამეცნიერო პოტენციალზე ნათლად მეტყველებს ყოველწლიურ საფაკულტეტო კონფერენციაზე წარდგენილი მოხსენებები — http://conference.ens-2013.tsu.ge/, http://conference.ens-2014.tsu.ge/. კონფერენციის მუშაობაში პროფესორებთან ერთად მონაწილეობენ დოქტორანტურის, მაგისტრატურის და ბაკალავრიატის სტუდენტები.

ბაკალავრიატის საგანმანათლებლო პროგრამები

- კომპიუტერული მეცნიერება;
- მათემატიკა;
- ფიზიკა;
- ქიმია;
- ბიოლოგია;
- გეოგრაფია;
- გეოლოგია;
- ელექტრონიკა;
- გამოყენებითი ბიომეცნიერებები და ბიოტექნოლოგია;
- კომპიუტერული მეცნიერება (ქართულ-ფრანგული);
- ეკოლოგია;

მაგისტრატურის საგანმანათლებლო პროგრამები

- კომპიუტერული მეცნიერება;
- ინფორმაციული სისტემები;
- ინფორმაციული ტექნოლოგიები;
- მათემატიკა;
- გამოყენებითი მათემატიკა;
- ფუნდამენტური ფიზიკა;
- გამოყენებითი ფიზიკა;
- ქიმია;
- ქიმიური ექსპერტიზა;
- ბიოლოგია;
- ფიზიკური გეოგრაფია და გარემოს მდგრადი განვითარება;
- გეომორფოლოგია, კარტოგრაფია და ლანდშაფტური დაგეგმარება;
- გეოლოგია;
- ბიოფიზიკა (ინტერდისციპლინური);
- ელექტრული და ელექტრონული ინჟინერია;
- გამოყენებითი ბიომეცნიერებები;
- გამოყენებითი ბიომეცნიერებები (ინგლისურენოვანი);

3. საგანმანათლებლო პროგრამებზე მიღების პროცედურები

ბაკალავრიატი:

საბაკალავრო პროგრამაზე სწავლების უფლებით სარგებლობენ ერთიანი ეროვნული გამოცდების წესით ჩარიცხული აბიტურიენტები.

სავალდებულო გამოცდები:

- ზოგადი უნარები (კოეფიციენტი 4)
- მათემატიკა ან ბიოლოგია ან ქიმია ან გეოგრაფია ან ფიზიკა (კოეფიციენტი 6)
- უცხო ენა (კოეფიციენტი 1)
- ქართული ენა და ლიტერატურა (კოეფიციენტი 1)

ადგილების კვოტა არჩევითი საგნების მიხედვით: 360 მათემატიკა, 100 გეოგრაფია, 70 ფიზიკა, 100 ქიმია, 130 ბიოლოგია;

ფაკულტეტის კოდი — 00102

მაგისტრატურა:

სამაგისტრო პროგრამაზე სწავლების უფლებით სარგებლობენ ბაკალავრის აკადემიური ხარისხი მქონე სტუდენტები (გათვალისწინებული უნდა იქნას პროგრამაში მითითებული დაშვების წინაპირობები), რომელთაც უნდა ჩააბარონ:

საერთო სამაგისტრო გამოცდა

სპეციალობაში გამოცდა

4. მისაღები კონტიგენტი

მისაღები კონტიგენტი - 760

2014 წელს 100%-იანი სახელმწიფო პროგრამული დაფინანსება გამოიყო საბაკალავრო პროგრამებზე: მათემატიკა – 100 ადგილი, ფიზიკა – 100 ადგილი, ქიმია – 100 ადგილი, ბიოლოგია – 100 ადგილი. გარდა ამისა, კვლავ ძალაში დარჩა 100%-იანი, 70%-იანი და 50%-იანი სასწავლო გრანტის მოპოვების შესაძლებლობაც.

5. დასაქმების სფერო

განათლების, მეცნიერების, ბიზნესის სფერო; შესაბამისი პროფილის სასწავლო-კვლევითი დაწესებულებები.

6. დამატებითი ინფორმაცია

საბაკალავრო პროგრამა „კომპიუტერული მეცნიერება (ქართულ-ფრანგული)" ხორციელდება უცხოელი კოლეგების მონაწილეობით;

2013 წელს ათასწლეულის გამოწვევის ფონდის დახმარებით „აბეტის" (ABET, the Accreditation Board for Engineering and Technology, Inc., USA) ექსპერტების მიერ შეფასებული იქნა უნივერსიტეტების საინჟინრო და ტექნოლოგიური განხრის საბაკალავრო პროგრამები. ჩვენი ფაკულტეტიდან შერჩეული ორი პროგრამა — „კომპიუტერული მეცნიერება" და „ელექტრული და ელექტრონული ინჟინერია". შეფასების შედეგად პირველ ადგილზე იქნა რანჟირებული.

კონკურსის საფუძველზე ბაკალავრიატის წარჩინებული სტუდენტები სემესტრულად იღებენ პრეზიდენტის სტიპენდიას, ზოგიერთ პროგრამაზე დაწესებულია სახელობითი სტიპენდიები; კონკურსის საფუძველზე ბაკალავრიატის და მაგისტრატურის წარჩინებული სტუდენეტების სწავლის საფასურის გადახდას ფაკულტეტი ახორციელებს. სწავლის გადასახადის თვალსაზრისით განსაკუთრებით შეღავათიანი პირობებია დაწესებული დოქტორანტებისთვის.

ფაკულტეტზე მოქმედებს გაცვლითი პროგრამები. სამივე საფეხურის სტუდენტს შეუძლია, ერთი ან მეტი სემესტრი, ისწავლოს საზღვარგარეთის უმაღლეს სასწავლო დაწესებულებაში, ხოლო იქ დაგროვილი კრედიტების აღიარება ხდება არსებული პროცედურის შესაბამისად სტუდენტის თსუ-ში დაბრუნების შემდეგ.

კურსდამთავრებულმა შესაძლებელია სწავლა შემდეგ საფეხურზე გააგრძელოს საქართველოს ან საზღვარგარეთის უმაღლეს სასწავლო დაწესებულებაში.

მეორე საერთაშორისო კონფერენცია „გამოყენებითი მათემატიკის თანამედროვე პრობლემები“

გ. ჯაიანი

ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მატემატიკის ინსტიტუტის დირექტორი, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის სრული პროფესორი, მეორე საერთაშორისო კონფერენციის „გამოყენებითი მათემატიკის თანამედროვე პრობლემები“ სამეცნიერო კომიტეტის თავმჯდომარე

ნ. ჩინჩალაძე

ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის დირექტორის მოადგილე, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის ასისტენტ პროფესორი, მეორე საერთაშორისო კონფერენციის „გამოყენებითი მათემატიკის თანამედროვე პრობლემები“ საორგანიზაციო კომიტეტის თავმჯდომარე

2013 წლის 4-7 სექტემბერს ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში ჩატარდა საერთაშორისო კონფერენცია „გამოყენებითი მათემატიკის თანამედროვე პრობლემები“, რომელიც რიგით მეორეა და მიეძღვნა ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის დაარსებიდან 95 და თსუ ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის დაარსებიდან 45 წლის იუბილეებს.

მცირე ექსკურსი ისტორიაში

1918 წლის 26 იანვარს (ახალი სტილით, 8 თებერვალს), დავით აღმაშენებლის ხსენების დღეს გაიხსნა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი ერთადერთი — სიბრძნისმეტყველების — ფაკულტეტით. უნივერსიტეტის პირველ რექტორად, ივანე ჯავახიშვილის წინადადებით, პროფესორთა საბჭომ აღიარებული ქიმიკოსი პროფესორი პეტრე მელიქიშვილი აირჩია. პროფესორთა საბჭო მხოლოდ სიბრძნისმეტყველების ფაკულტეტს არ განაგებდა, ის ზრუნავდა აგრეთვე ახალი ფაკულტეტების გახსნაზე და უნივერსიტეტის განვითარების პერსპექტიულ გეგმას ამუშავებდა. 1918 წლის სექტემბერში შეიქმნა სამათემატიკო-საბუნებისმეტყველო და სამკურნალო გაერთიანებული ფაკულტეტი, რომლის დეკანი იყო მედიცინის დოქტორი პროფესორი ა. მოსეშვილი, ხოლო მდივანი - მათემატიკოსი ასისტენტი ა. ხარაძე. 1919 წლის მაისში ეს ფაკულტეტი გაიყო ორად. სამათემატიკო-საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის დეკანად არჩეულ იქნა მათემატიკოსი პროფესორი ა. რაზმაძე, ხოლო მდივანად ისევ ა. ხარაძე დარჩა. ანდრია რაზმაძესთან ერთად საქართველოში მათემატიკის დარგში კადრების აღზრდასა და ქართული მათემატიკური სამეც-

ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თსუ ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი

კონფერენციის გახსნა მარჯვნიდან: ვ. პაპავა, ს. სისაური, თ. მარსაგიშვილი, გ. ჯაიანი

ნიერო სკოლის ჩამოყალიბებაში დიდი წვლილი მიუძღვით აკადემიკოს ნიკოლოზ მუსხელიშვილს, პროფესორ გიორგი ნიკოლაძეს, არჩილ ხარაძეს, მოგვიანებით კი აკადემიკოსებს ილია ვეკუას და ვიქტორ კუპრაძეს. დროთა განმავლობაში გარკვეული ცვლილებების შემდეგ, 1951 წლიდან მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი ჩამოყალიბდა ცალკე სტრუქტურულ ერთეულად, რომლის პირველი დეკანი გახდა აკადემიკოსი ნიკოლოზ ვეკუა. ფაკულტეტზე სამეცნიერო კვლევები მიმდინარეობდა შემდეგი მიმართულებით: მათემატიკური ანალიზი, დიფერენციალური და ინტეგრალური განტოლებები, ფუნქციონალური ანალიზი, ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა, ალგებრა და გეომეტრია, ზოგადი მათემატიკა, თეორიული მექანიკა და ასტრონომია. დღეისათვის მათემატიკური მეცნიერებები წარმატებით ვითარდება ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მათემატიკის დეპარტამენტში, სადაც ფუნქციონირებს მათემატიკური ანალიზის, ალბათობის თეორისა და სტატისტიკის, რიცხვითი ანალიზისა და გამოთვლითი ტექნოლოგიების, მათემატიკური ლოგიკისა და დისკრეტული სტრუქტურების, ალგებრა-გეომეტრიის, დიფერენციალური განტოლებებისა და მექანიკის კათედრები.

მათემატიკის გამოყენებითი ასპექტების განვითარების თვალსაზრისით მნიშვნელოვანი იყო 1968 წელს თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის დაარსება (http://www.viam.science.tsu.ge), რომელიც დღეს მისი დამაარსებლის აკადემიკოს ილია ვეკუას სახელს ატარებს. ინსტიტუტს იმთავითვე ჰქონდა დამყარებული მჭიდრო სამეცნიერო კავშირი (ორმხრივი თუ მრავალმხრივი ხელშეკრულებების საფუძველზე) მსოფლიოს წამყვან სამეცნიერო ცენტრებთან. ინსტიტუტში ლექცია–სემინარები აქვთ ჩატარებული მრავალ მსოფლიოში სახელმოხვეჭილ მეცნიერს, მათ შორის ჟ.ლ. ლიონსს, გ. ფიკერას, ა. ტიხონოვს, ა. სამარსკის, გ. მარჩუკს, ა. ვეილს, რ. გლოვინსკის. ინსტიტუტში სხვადასხვა დროს სტაჟირება გაიარეს ან სამეცნიერო მუშაობისათვის იმყოფებოდნენ მეცნიერები აშშ–დან, დიდი ბრიტანეთიდან, გერმანიიდან, პოლონეთიდან, ჩეხეთიდან, ბულგარეთიდან, ვიეტნამიდან. ინსტიტუტის დაარსებიდანვე ჩაეყარა საფუძველი ფუნდამენტურ და გამოყენებით კვლევებში დასაქმებულ მეცნიერთა ფართე წრეების შეხვედრებს, რომლებიც წარმოადგენს ახალი ამოცანების დასმის და თანამშრომლობის გეგმების დასახვის ეფექტურ საშუალებას.

ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელწიფო უნივერსიტეტს და, კერძოდ, ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტს აქვთ დიდი ტრადიცია მათემატიკასა და მექანიკაში საერთაშორისო კონფერენციებისა და სიმპოზიუმების (მათ შორის საერთაშორისო სამეცნიერო ორგანიზაციების ეგიდით) ჩატარების კუთხით. ამის დასტურად საკმარისია თეორიულ და გამოყენებით მექანიკაში საერთა-

შორისო კავშირის (IUTAM) ეგიდით და მის მიერ ნაწილობრივი დაფინანსებით გარსთა თეორიაში ჩატარებული ორი სიმპოზიუმის [1978 (საერთაშორისო სამეცნიერო კომიტეტის თავმჯდომარე: ილია ვეკუა) და 2007 წლებში (საერთაშორისო სამეცნიერო კომიტეტის თავმჯდომარე: გიორგი ჯაიანი)] და ანალიზში, გამოყენებებსა და გამოთვლებში საერთაშორისო საზოგადოების (ISAAC) კონფერენციის (2007) დასახელება. 2008 წელს ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტში ჩატარდა საერთაშორისო კონფერენცია „გამოყენებითი მათემატიკის თანამედროვე პრობლემები", რომელიც მიეძღვნა ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელწიფო უნივერსიტეტის დაარსებიდან 90 და თსუ ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის დაარსებიდან 40 წლის იუბილეებს. გარდა ამისა, ინსტიტუტში ჩატარდა საქართველოს მექანიკოსთა კავშირის კონფერენციები უცხოელი მეცნიერების მონაწილეობით (2010, 2011 და 2012 წლებში, საქართველოს მექანიკოსთა კავშირთან ერთად კონფერენციის თანაორგანიზატორები იყვნენ ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელწიფო უნივერსიტეტის ზუსტი და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი და თსუ ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი).

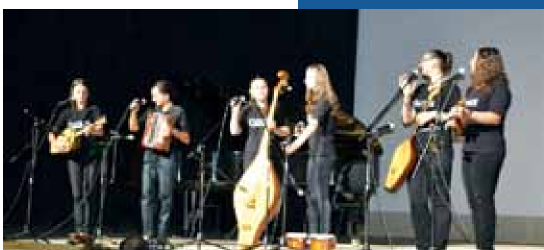
„გამოყენებითი მათემატიკის თანამედროვე პრობლემებში" მეორე საერთაშორისო კონფერენციის მიზანი იყო უცხოელი მეცნიერების მსოფლიოს წამყვან მათემატიკურ ცენტრებიდან მოწვევით ქართველ მონაწილეებს მისცემოდათ საშუალება მიეღოთ ინფორმაცია წამყვან უცხოელ მეცნიერთა იმ უახლესი შედეგების თაობაზე, რომელიც, კერძოდ, დაკავშირებულია შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდის მიერ დაფინანსებულ გამოკვლევებთან ისეთ თემატიკაში როგორიცაა: პრაქტიკაში გავრცელებული რთული გეომეტრიის მქონე კონსტრუქციების მოდელირება და გაანგარიშება; წამახვილებული პრიზმული გარსებისა და ღეროების გათვლის ანალიზური და რიცხვითი მეთოდების დამუშავება; ფუნქციონალურ-დიფერენციალურ და დისკრეტულ განტოლებათა ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევა; საწყისი მონაცემების ოპტიმიზაციის ამოცანები ნეიტრალური ფუნქციონალურ დიფერენციალური განტოლებებისთვის: ვარიაციის ფორმულები, ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები, არსებობის თეორემები; არაწრფივი არასტაციონარული მოდელების გამოკვლევა და რიცხვითი ამოხსნა; არაწრფივი სასაზღვრო ამოცანები და მათი გამოყენებები დიფერენციალურ განტოლებათა თვისობრივ თეორიაში; ოპერატორები ზოგიერთ ფუნქციათა სივრცეში და მათი გამოყენებები ფურიეს ანალიზში და სხვა.

კონფერენციის ორგანიზატორები იყვნენ თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, თბილისის საერთაშორისო ცენტრი მათემატიკასა და ინფორმატიკაში (TICMI; http://www.viam.science.tsu.ge/others/ticmi/index.html), საქართ-

კონფერენციის მიმდინარეობისას

უცხოელ და ქართველ მონაწილეთა ერთი ჯგუფი მთაწმინდის პარკში

სხდომებს შორის შესვენებაზე



ი. ჯავახიშვილი სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ვოკალური ანსამბლი „გორდელა"

ველოს ეროვნული კომიტეტი თეორიულ და გამოყენებით მექანიკაში და შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი, რომლის საგრანტო დაფინანსებითაც გაიმართა აღნიშნული კონფერენცია.

კონფერენციის გახსნისას უცხოელ და ქართველ მეცნიერებს მიესალმნენ ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელწიფო უნივერსიტეტის რექტორი, აკადემიკოსი ვლადიმერ პაპავა, საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების მინისტრის მოადგილე თამაზ მარსაგიშვილი და რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდის გენერალური დირექტორი სულხან სისაური. გახსნას ესწრებოდნენ აგრეთვე ეროვნული სამეცნიერო ფონდის დირექტორის მოადგილე თინათინ ბოჭორიშვილი და სამეცნიერო პროგრამების დეპარტამენტის უფროსი ირაკლი ნოსელიძე, ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელწიფო უნივერსიტეტის სამეცნიერო კვლევებისა და განვითარების დეპარტამენტის უფროსი გიორგი ღვედაშვილი.

კონფერენციის მუშაობაში მონაწილეობდა 20-ზე მეტი მეცნიერი არაბთა გაერთიანებული ემირატებიდან, გერმანიიდან, ესპანეთიდან, იტალიიდან, პოლონეთიდან და თურქეთიდან. მათ შორის იყვნენ ისეთი აღიარებული მეცნიერები, როგორიც არიან ბ. ბოიარსკი (ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საპატიო დოქტორი), ვ. შულცე (თსუ ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის საპატიო დოქტორი), დ. კრონერი, ჰ. ბეგეერი, ჰ. ალტენბახი (საუკუნოვანი ისტორიის მქონე გამოყენებით მათემატიკასა და მექანიკაში ჟურნალის — *ZAMM* მთავარი რედაქტორი), ო. გილ-მედრანო (ვალენსიის უნივერსიტეტის ვიცე-რექტორი), ა. ჩალდეა, ო. ჩელები. კონფერენციის სამეცნიეროკომიტეტის შემადგენლობაში შედიოდნენ მეცნიერები, როგორც ზემოთ დასახელებული ქვეყნებიდან, ასევე აშშ-დან, კანადიდან და პორტუგალიიდან. კონფერენციაზე გაკეთდა 80-მდე სამეცნიერო მოხსენება.

კონფერენციის გახსნის შემდეგ ჩატარდა კონცერტი ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტი და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის სტუდენტების, ვოკალური ანსამბლის „გორდელა", ა. ქუთათელაძის სახელობის თბილისის სახელმწიფო სამხატვრო აკადემიის სტუდენტების და თბილისის ვ. სარაჯიშვილის სახელობის სახელმწიფო კონსერვატორიის სტუდენტებისა და კურსდამთავრებულების მონაწილეობით. სააქტო დარბაზში სამხატვრო აკადემიის სტუდენტების მონაწილეობით მოეწყო გამოფენა „აბსტრაქციები მხატვრობაში".

ავტორთა ელექტრონული მისამართები:
giorgi.jaiani@tsu.ge
natalia.chinchaladze@tsu.ge

ISSN 2298-0938