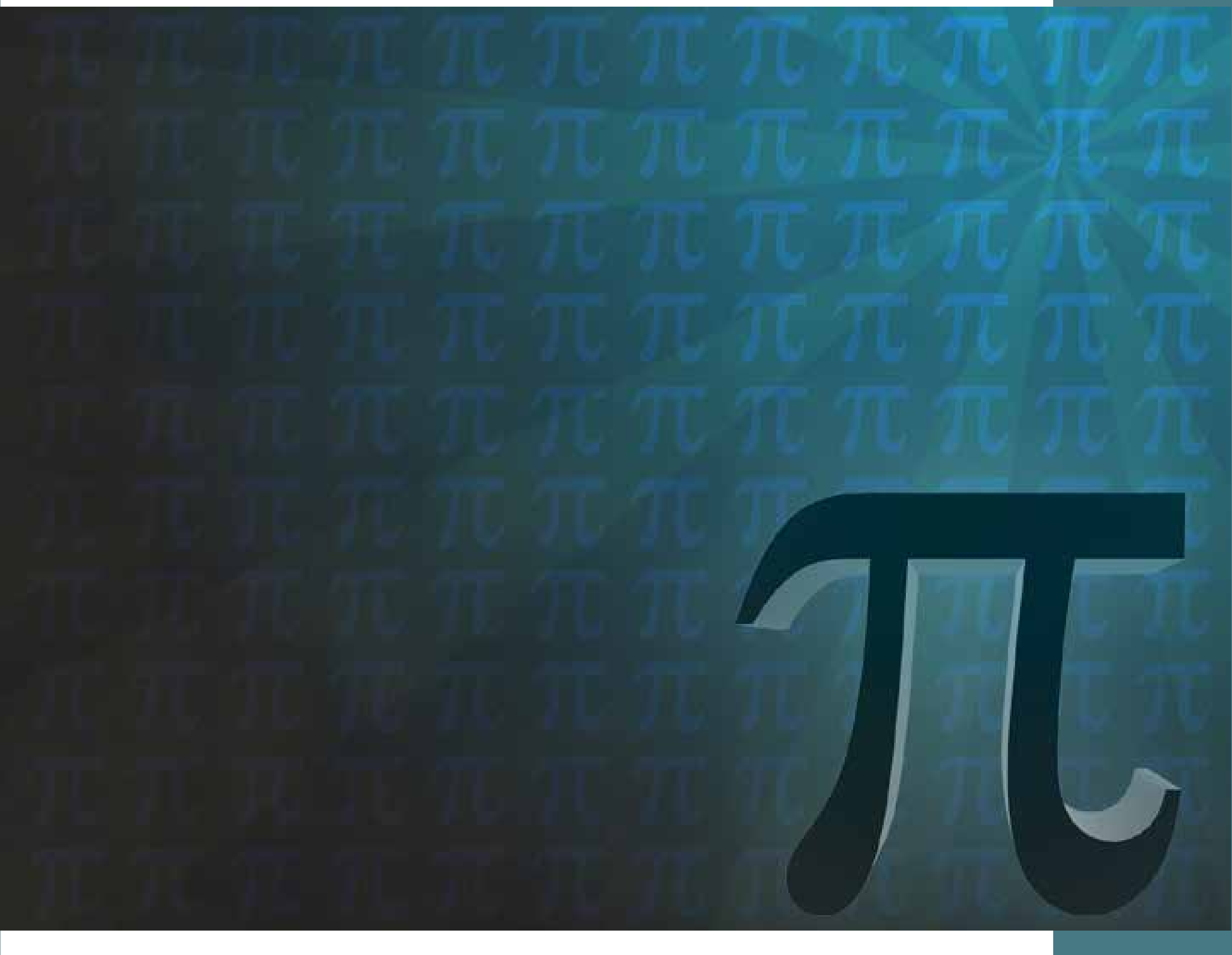
მათემატიკა

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი

№3 **2015**

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი



მათემატიკა

სამეცნიერო–პოპულარული ჟურნალი

დაფუძნებულია 2013 წელს
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის საბჭოს გადაწყვეტილებით
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის 95 წლის იუბილესთან დაკავშირებით

სარჩევი

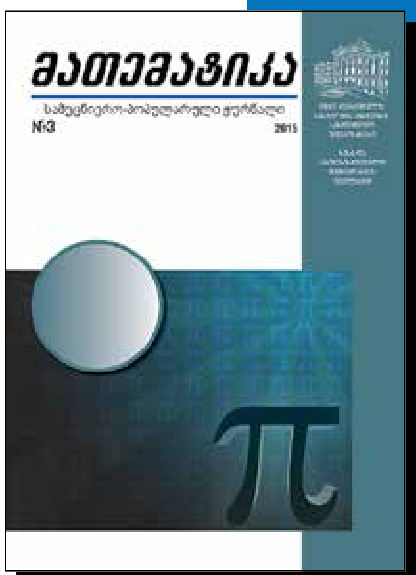
სარჩევი

ჟურნალი „მათემატიკა“

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი „მათემატიკა“ დაარსდა 2013 წელს ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის 95 წლის იუბილესთან დაკავშირებით ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის საბჭოს გადაწყვეტილებით. ჟურნალის შექმნის იდეა ფაკულტეტის დეკანს რამაზ ბოჭორიშვილს ეკუთვნის. ჟურნალის მთავარი რედაქტორია თეიმურაზ ვეფხვაძე, მთავარი რედაქტორის მოადგილე-გია სოხაძე. ჟურნალში რამდენიმე განყოფილებაა, რომლებსაც სარედაქციო საბჭოს წევრები ხელმძღვანელობენ: „მათემატიკური სკოლები“ (ჯონდო შარიქაძე) - წარმოაჩენს იმ ქართველ მეცნიერებს, რომლებმაც დიდი წვლილი შეიტანეს ქართული მათემატიკური სკოლების ჩამოყალიბებასა და განვითარებაში; „ქართველი ავტორები“ (გია გიორგაძე) - პოპულარულ ენაზე გადმოიცემა მასალა მათემატიკური ცნებებისა და პრობლემების წარმოშობისა და განვითარების შესახებ; „თარგმანი“ (ილია თავხელიძე) - უცხოელი ავტორების სამეცნიერო-პოპულარული სტატიები; „მეთოდიკა“ (თეიმურაზ ვეფხვაძე, ქეთევან შავგულიძე) - მასალა, რომელიც ხელს შეუწყობს მასწავლებელთა პროფესიულ ზრდას; „მოსწავლეები“ (თენგიზ კოპალიანი) - მასალა, რომელიც განკუთვილია მოსწავლეებში მათემატიკის პოპულარიზაციისთვის, მათემატიკური ოლიმპიადების მიმოხილვა, საინტერესო ამოცანები მოსწავლეებისთვის; „სტუდენტები“ (თინათინ დავითაშვილი) - წარმოაჩენს მათემატიკის დეპარტამენტის წარმატებულ სტუდენტებს; „კურსდამთავრებულები“ (როლანდ ომანაძე) - წარმოგვიდგენს მათემატიკის დეპარტამენტის წარმატებულ კურსდამთავრებულებს; „თსუ“ (რამაზ ბოჭორიშვილი, თინათინ დავითაშვილი) - დაეხმარება ახალგაზრდებს სამომავლო კარიერის დაგეგმვაში, იბეჭდება მასალა, რომელიც აღწერს სასწავლო პროგრამებს, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში ჩატარებულ საინტერესო ღონისძიებებს; რუბრიკით „ჩვენი სკოლის ამაგდარი პედაგოგები“ გავიხსენებთ საშუალო სკოლის ღვაწლმოსილ მასწავლებლებს.

ჟურნალი გამოდის წელიწადში ერთხელ და ვრცელდება მთელი საქართველოს მასშტაბით მათემატიკის სამეცნიერო ცენტრებში, უნივერსიტეტებში, სკოლებში. ყოველი ნომრის გამოსვლის შემდეგ იმართება პრეზენტაცია და მოწვეულ სტუმრებს ურიგდებათ საჩუქრად.

ჟურნალი იღებს სტატიებს ჩამოთვლილი განყოფილებების მიხედვით და დადებითი რეცენზიის მიღების შემთხვევაში იბეჭდება. სტატიის წარმოდგანისას დაცული უნდა იყოს ავტორებისათვის განკუთვნილი ინსტრუქციის მოთხოვნები.



აკადემიკოს შალვა მიქელაძის დაბადებიდან 120 წლისთავი

რამაზ ბოჭორიშვილი

თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის დეკანი, სრული პროფესორი

დავით გორდეზიანი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ემერიტუს პროფესორი

სხვადასხვა გაზეთსა და ჟურნალში ბევრი სტატიაა მიძღვნილი აკადემიკოს შალვა მიქელაძის საინტერესო, რთული ცხოვრებისა და სამეცნიერო-პედაგოგიური მოღვაწეობისადმი. საერთოდ, საინტერესოა საკითხი – მათემატიკასა და მექანიკაში ქართული ფენომენის შესახებ; როგორ მოხდა, რომ მოკლე დროში ერმა აღზარდა ამდენი ნიჭიერი მათემატიკოსი, მექანიკოსი და, მათ შორის, მსოფლიო დონისაც? რა იყო ამის მასტიმულირებელი ფაქტორი? ბუნებრივია, ნაწილობრივ, ყოველივე ეს ეხება, აგრეთვე, გამოთვლით მათემატიკასა და მათემატიკურ მოდელირებას და ამ მიმართულებით მომუშავე თვალსაჩინო ქართველ მკვლევარებს.
დასმულ კითხვებზე დაბეჯითებით პასუხის გაცემა ძალზე რთულია, მაგრამ ერთი კი ცხადია – ასეთი აღმავლობა, მიღწევები, წარმატებები მოჰყვა ჩვენი უნივერსიტეტის შექმნასა და ჩვენი საამაყო მამულიშვილების ა. რაზმაძის, გ. ნიკოლაძის, ნ. მუსხელიშვილისა და ა. ხარაძის მოღვაწეობას. ბუნებრივია, ერის უდიდესი ინტელექტუალური პოტენციალი მნიშვნელოვანი იყო ამ საოცარი ფენომენის წარმოშობაში.
ფაქტობრივად, ამ დიდმა ოთხეულმა შექმნა გარემო, სადაც საქართველოს ახალგაზრდობას შეეძლო მიეღო სათანადო ცოდნა, გამოემჟღავნებინა თავისი ნიჭი და შესაძლებლობები; აღსანიშნავია, რომ საქართველოში მიღებული განათლება საკმარისი იყო შემდგომში სწავლის გასაგრძელებლად ევროპის, რუსეთის თუ ამერიკის სხვადასხვა სამეცნიერო ცენტრებსა და უნივერსიტეტებში.

ჩვენი უნივერსიტეტის კედლებში აღზრდილ სტუდენტთა პირველ ტალღას წარმოადგენენ ი. ვეკუა, ა. გორგიძე, დ. დოლიძე, ვ. კუპრაძე და სხვანი, რომლებიც ლენინგრადში გააგზავნეს სწავლის გასაგრძელებლად; ამ თაობის ერთ-ერთ სანიმუშო წარმომადგენლად გვევლინება აკადემიკოსი შალვა მიქელაძეც.

მდიდარი მეცნიერული მემკვიდრეობა დაგვიტოვა გამოჩენილმა ქართველმა მეცნიერმა, აკადემიკოსმა შალვა მიქელაძემ. თუ ღრმად ჩავწვდებით მის მოღვაწეობას, ნათელი გახდება, რომ საქართველოში მის მოღვაწეობას მეტად საინტერესო და რთული, დაბრკოლებებით აღსავსე განვითარების ისტორია აქვს – 1924 წლის დაპატიმრება (როდესაც შ. მიქელაძე საბედნიეროდ გადაურჩა დახვრეტას) და 1936 წელს ყველა დაკავებული თანამდებობიდან გათავისუფლება.

აკადემიკოს შალვა მიქელაძეს უდიდესი ნიჭის, წარმოუდგენელი შრომისუნარიანობის, ენერგიის, ახლის და აქტუალურის შეგრძნებისა და შორსმჭვრეტელობის წყალობით ყოველთვის ეკავა წამყვანი პოზიციები ისეთ მნიშვნელობან მიმართულებაში, როგორიცაა გამოთვლითი მათემატიკა (თავისუფლად შეიძლება ითქვას მათემატიკური მოდელირებაც). მისმა გამოკვლევებმა საფუძველი ჩაუყარა ახალ, უმნიშვნელოვანეს მიმართულებებს არა მარტო საქართველოში, არამედ საზღვარგარეთაც.

შალვა მიქელაძემ მათემატიკოსების, ინჟინრებისა და პედაგოგების მრავალი თაობა აღზარდა. მათ შორის მრავალია მეცნიერებათა დოქტორი და კანდიდატი, ბევრი მათგანი მოღვაწეობს სხვადასხვა სასწავლო–სამეცნიერო დაწესებულებებში საქართველოსა და მის ფარგლებს გარეთ.

მნიშვნელოვანია გავითვალისწინოთ ის გარემოება, რომ 80 წლის წინ ზოგიერთი მაღალი კვალიფიკაციის მათემატიკოსისათვისაც კი გაურკვეველი იყო გამოთვლითი მათემატიკისა და მათემატიკური მოდელირების როლი და მნიშვნელობა. შალვა მიქელაძისადმი მიძღვნილ ერთ-ერთ წერილში ჩვენი სასიქადულო, ბრწყინვალე მეცნიერი ვ. კუპრაძე აღნიშნავდა, რომ „იმ არამრავალთაგან, რომელმაც თავისი უყტუარი გუმანით და ალღოთი სხვებზე ადრე ირწმუნა ამ დარგის დიდი მომავალი და ერთგულად ემსახურა მას, იყო შალვა მიქელაძე; ამიტომაც წარუშლელი დარჩება მისი კვალი გამოთვლით მათემატიკის მატიანეში“.

მოკლე ბიოგრაფიული ცნობები

შალვა მიქელაძე დაიბადა 1895 წლის 28 მარტს ქ. თელავში. მისი მამა – ექვთიმე მიქელაძე, იყო მასწავლებელი, დედა – ოლია ჯაჯანიძე, გარდაიცვალა როდესაც პატარა შალვა ხუთი წლის იყო. ერთ უბედურებას მეორე მოჰყვა – 9 წლის შალვას რევოლუციური იდეების პროპაგანდისთვის მამა გადაუსახლეს რუსეთის იმპერიის უკიდურეს ჩრდილოეთში. მიუხედავად დიდი გაჭირვებისა და ხელმოკლეობისა შალვა წარმატებით აგრძელებს სწავლას ქ. თელავის საქალაქო სასწავლებელში, ხოლო თავისუფალ დროს თავის თანატოლებს კერძო გაკვეთილებს უტარებს და ამ გზით მიღებული გასამრჯელოთი ეხმარება ოჯახს.

1910 წელს ექვთიმე მიქელაძე გადადის საცხოვრებლად ბაქოში, სადაც ნებადართული ჰქონდა ცხოვრება ოჯახთან ერთად. იმავე წელს შალვა შედის სასწავლებლად ბაქოს ალექსეევის მექანიკა-სამშენებლო საშუალო ტექნიკურ სასწავლებელში, ამ ყაიდის ერთ-ერთ საუკეთესო სასწავლებელში, რომლის ბაზაზეც შემდგომში ინდუსტრიული ინსტიტუტი შეიქმნა. ამ სასწავლებლის წარმატებით დამთავრების შემდეგ შალვა გაემგზავრა პეტროგრადში, სადაც ბრწყინვალედ ჩააბარა მისაღები გამოცდები და ჩაირიცხა ელექტროტექნიკის ინსტიტუტში. სწავლასთან ერთად, უსახსრობის გამო, იძულებულია იმუშაოს დაზგასთან პეტროგრადის ერთ-ერთ სამხედრო საწარმოში.

შალვა მიქელაძე მექანიკა-სამშენებლო საშუალო ტექნიკური სასწავლებლის მოსწავლე

შალვა მიქელაძე სამხედრო

პირველი მსოფლიო ომის მესამე წელს გამოცხადდა სტუდენტთა მობილიზაცია. შალვა მიქელაძე ჯერ სამხედრო-საინჟინრო სასწავლებელში გაიგზავნა, შემდეგ კი მოქმედ არმიაში თურქეთის ფრონტზე. აქედან იწყება მისი სამხედრო სამსახური (1916-1924 წლები). მას ეკავა სხვადასხვა თანამდებობა – სატელეგრაფო ასეულის მეთაური, პირველ ქართულ მსროლელთა დივიზიის უფროსის მოადგილე, სამხედრო პოლკის კავშირგაბმულობის კურსების ინსპექტორი. შალვა მიქელაძე დიდ ყურადღებას აქცევდა სამხედრო-საინჟინრო კადრების მომზადებას. სწორედ ამ ზრუნვას უკავშირდება მის მიერ ახალგაზრდა ოფიცრებისათვის დაწერილი სახელმძღვანელოები – „საფორტიფიკაციო საქმის საფუძვლები“ და „საველე ტელეფონები“. პირველი სახელმძღვანელოს მოძებნა სამწუხაროდ ვერ მოხერხდა, რაც შეეხება მეორეს – მისი რამდენიმე ეგზემპლიარი შემორჩენილია და დაინტერესებულ პირებს მისი წაკითხვის საშუალება აქვთ. დღეს ამ ნაშრომს უფრო ისტორიული ღირებულება აქვს და ამის შეფასება, ალბათ, სამხედრო საქმის სპეციალისტებს უფრო შეუძლიათ.

შალვა მიქელაძის სამხედრო სამსახური, როგორ ზემოთქმულიდან ჩანს, იყო მრავალფეროვანი, მეტად რთული და საინტერესო. ამაში კიდევ ერთხელ დარწმუნდებით, თუ გავეცნობით შალვა მიქელაძის ვაჟის, მერაბ მიქელაძის ორ ნაწარმოებს – „ვინ იცავდა და ვინ გვეცილებოდა სამცხე-ჯავახეთს“ და „სარიყამიშიდან თბილისამდე“, რომლებსაც ავტორმა მოგონების ფორმა მისცა.

1924 წლიდან იწყება შალვა მიქელაძის სამოქალაქო სამსახურის პერიოდი. იგი მუშაობდა: თბილისის საქალაქო ელექტროქსელის დაპროექტების ბიუროს უფროსად, ზემო ავჭალის ჰიდროელექტროსადგურის მორიგე ინჟინრად, პარალელურად სწავლობდა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე (რომელიც დაამთავრა 1929 წელს). უნივერსიტეტის დამთავრების შემდეგ იგი მთლიანად ერთვება სამეცნიერო-პედაგოგიურ და სამეცნიერო-საორგანიზაციო საქმიანობაში, მის ცხოვრებაში ახალი ეტაპი იწყება.

1933 წელს შალვა მიქელაძე მიავლინეს ლენინგრადის მათემატიკის ინსტიტუტში. თავდაუზოგავმა შრომამ შედეგი გამიღო და თბილისში დაბრუნებისთანავე წარადგინა დისერტაცია, რომელიც დაიცვა 1935 წელს. ამ ნაშრომში, მას საბჭომ, საკანდიდატო დისერტაციის დაუცველად, პირდაპირ მეცნიერებათა დოქტორის სამეცნიერო ხარისხი მიანიჭა. უნდა აღინიშნოს, რომ ამ დისერტაციის ძირითადი შედეგები სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის მიერ ცალკე მონოგრაფიის სახით გამოიცა, რომელსაც ამშვენებდა აკადემიკოს ა. კრილოვის წინასიტყვაობა შალვა მიქელაძის ნაშრომის უმაღლესი შეფასებით. ამგვარი შეფასება, თავის დროზე, აკადემიკოსმა კრილოვმა ქართველი მეცნიერთაგან მხოლოდ ნიკო მუსხელიშვილის ნაშრომს მისცა. ასე დაიწყო შ. მიქელაძის, როგორც იტყვიან, ტრიუმფალური სვლა მეცნიერების გზაზე და მისი მიღწევები არაერთხელ აღინიშნა მაღალი ჯილდოებითა და პრემიებით:

1950 წელს მას საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპონდენტად ირჩევენ, 1952 წელს მიენიჭა სახელმწიფო პრემია, 1960 წელს ირჩევენ საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის ნამდვილ წევრად, 1962 წელს ენიჭება მეცნიერების დამსახურებული მოღვაწის წოდება.

აკადემიკოსი შალვა მიქელაძე გარდაიცვალა 1976 წლის 27 აგვისტოს.

სამეცნიერო პედაგოგიური მოღვაწეობა

1929 წელს შალვა მიქელაძე ამთავრებს თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტს. ამ დღიდან მოყოლებული მისთვის იწყება ახალი ცხოვრება. როგორც აღინიშნა, იგი ასწავლის თბილისის სხვადასხვა უმაღლეს სასწავლებლებში და ერთდროულად ეწევა სამეცნიერო მუშაობას; 1933 წელს იგი 2 წლით მიავლინეს საკავშირო მეცნიერებათა აკადემიის მათემატიკის ინსტიტუტში, ლენინგრადში, დისერტაციაზე სამუშაოდ. 1935 წლის შემოდგომაზე იგი უკვე ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი და პროფესორია. სადოქტორო დისერტაციაში მიღებული შედეგები აისახა შ. მიქელაძის ცნობილ მონოგრაფიაში „კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრების რიცხვითი მეთოდები", რომელიც 1936 წელს გამოსცა საკავშირო მეცნიერებათა აკადემიამ გამოჩენილი საბჭოთა მათემატიკოსისა და გემთმშენებლის აკადემიკოს ა.ნ. კრილოვის წინასიტყვაობით. „შ. ე. მიქელაძის მონოგრაფიაში – წერდა აკადემიკოსი კრილოვი – კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა რიცხვითი ინტეგრების საკითხი განიხილება თავიდან, დასმულია ზოგადი, თანაც პრაქტიკული სახით და დამუშავებულია ბოლომდე... ამრიგად, – განაგრძობს იგი – შ.ე. მიქელაძის მონოგრაფია ავსებს როგორც რუსულ, ასევე უცხოურ მათემატიკურ ლიტერატურაში არსებულ ხარვეზს და პრაქტიკოსს სთავაზობს არსებითსა და ესოდენ აუცილებელ დასაყრდენს იმ მრავალი საკითხის გადასაწყვეტად, რაც ასე ხშირად წამოიჭრება ხოლმე ჩვენი უზარმაზარი და ყოვლისმომცველი მშენებლობის პირობებში". მომდევნო წლებში შალვა მიქელაძემ გამოაქვეყნა კიდევ ექვსი ფუნდამენტური მონოგრაფია, რომელთაგან ოთხი გამოიცა მოსკოვში. მის მონოგრაფიებსა და სამეცნიერო სტატიებში, რომელთა რიცხვიც ასამდეა, განხილულია და შესწავლილი გამოთვლითი მათემატიკის თითქმის ყველა მიმართულების საკვანძო პრობლემა და აქტუალური საკითხი, რამაც ძალიან შეუწყო ხელი საქართველოში გამოთვლითი მათემატიკის ჩამოყალიბებას, დამკვიდრებას და განვითარებას დამოუკიდებელი დარგის სახით. აქტიური სამეცნიერო მოღვაწეობის ოთხი ათეული წლის მანძილზე მან დაამუშავა დიფერენციალური და ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის ახალი მეთოდები, დასახა რთული ალგებრული და ტრანსცენდენტური განტოლებების ამოხსნის ეფექტური გზები და რიცხვითი ალგორითმები, შეისწავლა ფუნქციათა ინტერპოლების თეორიის სხვადასხვა საკითხები, გამოიყვანა რიცხვითი გაწარმოებისა და ინტეგრების მაღალი სიზუსტის ფორმულები და ა.შ. შალვა მიქელაძის სამეცნიერო ინტერესების სიღრმე და მრავალმხრივობა განსაკუთრებით მკაფიოდ აისახა მის კაპიტალურ მონოგრაფიაში: „მათემატიკური ანალიზის რიცხვითი მეთოდები" (1953 წ.). როგორც გონებამახვილურად შენიშნა გამოჩენილმა ამერიკელმა მათემატიკოსმა ვ. ე. მილნმა, ეს წიგნი „... მოიცავს იმდენ თანამედროვე საკითხს, რომ, ალბათ, უფრო იოლი იქნებოდა გვეთქვა, თუ რა დარჩა მასში განუსჯელი, ვიდრე მიყოლებით ჩამოგვეთვალა სარჩევში აღნუსხული საკითხები"-ო. მეორე გამოჩენილმა მეცნიერმა ჯორჯ ე. ფორსაიტმა, თავის ცნობილ წიგნში რიცხვითი ანალიზისა და კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების თანამედროვე მდგომარეობის შესახებ საბჭოთა მიღწევების მიმოხილვა ამ დარგში დაიწყო სწორედ „მიქელაძის შესანიშნავი წიგნით".

ევროპისა და ამერიკის სამეცნიერო წრეებისთვის უკვე ომამდე ცნობილი იყო შალვა მიქელაძის სახელი. თვალსაჩინო ურუგვაელი მათემატიკოსი და პოლიტიკური მიღვაწე ხოსე მასერა ომის დროს ატყობინებდა მას, რომ საგანგებოდ შეისწავლა რუსული ენა, რათა უკეთ გასცნობოდა ქართველი მეცნიერის შედეგებს. ეს შედეგები საფუძვლად დაედო ხოსე მასერას მონოგრაფი-

შალვა მიქელაძე ვაჟთან, მერაბ მიქელაძესთან ერთად

ას, რომელიც გამოიცა 1949 წელს მონტევიდეოში ესპანურ ენაზე.

ძალზე დიდია შალვა მიქელაძის წვლილი სამშენებლო და გამოყენებითი მექანიკის მათემატიკური მეთოდების განვითარებაში. განსაკუთრებით ბევრი გაკეთდა ამ მხრივ სამამულო ომისა და ომის შემდგომ წლებში. სწორედ ომის ვითარებით იყო ნაკარნახევი მისი გამოკვლევები ბალისტიკაში, რაც უზრუნველყოფდა საარტილერიო ჭურვის სიმძიმის ცენტრის ტრაექტორიის გამოთვლას დიდი სიზუსტით. საგანგებოდ უნდა აღინიშნოს შ. მიქელაძის ზუსტი და მიახლოებითი მეთოდები პარამეტრზე დამოკიდებული ცვლადი კოეფიციენტების მქონე დიფერენციალური განტოლებების წყვეტილი ამონახსნების ასაგებად. ამ მეთოდების საფუძველს წარმოადგენს მიქელაძის მიერ განზოგადებული მაკლორენის ფორმულა უბან-უბან უწყვეტი წარმოებულების მქონე უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციებისათვის. კვლევის ახალი მათემატიკური აპარატის გამოყენებით შალვა მიქელაძემ შესძლო დრეკადი ღეროვანი სისტემების სამშენებლო მექანიკის რთული და ნაკლებად შესწავლილი ამოცანების ამოხსნა, რასაც მიეძღვნა მისი ორი, მოსკოვში გამოცემული მონოგრაფია. ამ მიმართულებით კვლევების გაგრძელებამ ცხადყო, რომ იმავე მეთოდების დახმარებით, შეიძლება მექანიკის კიდევ უფრო რთული, ორ და სამგანზომილებიანი ამოცანების დაძლევა.

მნიშვნელოვანი შედეგები აქვს მიღებული შალვა მიქელაძეს დრეკადი თხელი ფილების გაანგარიშებაშიც ამ მიზნით დამუშვებული სხვაობიანი სქემების გამოყენებით.

ორმოცდაათიანი და სამოციანი წლების მიჯნაზე შალვა მიქელაძე უკვე ფართოდ აღიარებული მეცნიერია. ამ დროისათვის მისი რამდენიმე მონოგრაფია და სამეცნიერო სტატია უკვე ითარგმნა და გამოიცა უცხოეთში. მისმა სამეცნიერო შედეგებმა მტკიცედ მოიკიდა ფეხი სამეცნიერო, სასწავლო, თუ საცნობარო ხასიათის ლიტერატურაში.

1952 წელს მას სსრ კავშირის სახელმწიფო პრემია მიენიჭა.

შალვა მიქელაძის დიდი სამეცნიერო მოღვაწეობა ყოველთვის მჭიდროდ იყო დაკავშირებული მის პედაგოგიურ და სამეცნიერო-ორგანიზატორულ საქმიანობასთან. 1936 წელს, თბილისის მათემატიკის ინსტიტუტის დაარსების პირველივე თვეებში, მან ჩამოაყალიბა ამ ინსტიტუტის გამოთვლითი მათემატიკის განყოფილება, რომელსაც სიცოცხლის უკანასკნელ დღეებამდე ხელმძღვანელობდა. ასევე დიდია მისი ღვაწლი საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის გამოთვლითი ცენტრის (ამჟამად ნ. მუსხელიშვილის სახელობის გამოთვლითი მათემატიკის ინსტიტუტის) ჩამოყალიბებაში. სწორედ მისმა აღზრდილმა მოწაფეებმა შეადგინეს ამ ინსტიტუტის ძირითადი ბირთვი.

1955 წელს შ. მიქელაძემ თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკამათემატიკის ფაკულტეტზე ჩამოაყალიბა გამოთვლითი მათემატიკის კათედრა, რომელსაც 1970 წლამდე ხელმძღვანელობდა. მანვე დააარსა კათედრასთან დიდი საპრობლემო ლაბორატორია, რომელიც მოგვიანებით გარდაიქმნა გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტად. ამასთანავე, საგანგებოდ უნდა აღინიშნოს ის დიდი მოსამზადებელი მუშაობა, რომელიც წამოიწყო შალვა მიქელაძემ კათედრისა და ლაბორატორიის გახსნამდე რამდენიმე წლით ადრე. აქვე შეიძლებოდა იმის გახსენებაც, რომ უნივერსიტეტის ფილოლოგიის ფაკულტეტზე გიორგი ახვლედიანის, სერგი ჟღენტისა და შალვა მიქელაძის ინიციატივით 1961 წლიდან შემოღებული იყო ახალი სპეციალობა „სტრუქტურული ლინგვისტიკა“, რომელიც მომდევნო წლებში კიბერნეტიკისა და გამოყენებითი მათემატიკის ფაკულტეტზე ისწავლებოდა.

დიდი ამაგი მიუძღვის მეცნიერს მომავალი ინ-

გეგე ჯანდიერი, შალვა მიქელაძე, საშა ფანჯიკიძე

ჟინრებისა და პედაგოგების აღზრდის საქმეშიც. სხვადასხვა დროს იგი ხელმძღვანელობდა კათედრებს საქართველოს ინდუსტრიულ, თბილისის რკინიგზის ტრანსპორტის ინჟინერთა და თბილისის სახელმწიფო პედაგოგიურ ინსტიტუტებში.

აკადემიკოს შალვა მიქელაძის მიერ დაწყებულმა საქმემ – გამოთვლითმა მათემატიკამ, მყარად დაიმკვიდრა ადგილი ქართულ საგანმანათლებლო სივრცეში. ამ დარგთან დაკავშირებული საკითხები ისწავლება ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტზე, კერძოდ, მას სწავლობენ მომავალი მათემატიკოსები, ინფორმატიკოსები, ფიზიკოსები და ინჟინრები. რიცხვითი მეთოდები და მათი საშუალებით ამოცანების ამოხსნა ასევე ისწავლება საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში, საქართველოს საპატრიარქოს წმიდა ანდრია პირველწოდებულის სახელობის ქართული უნივერსიტეტში, ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტში, ქუთაისის აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, კავკასიის უნივერსიტეტში, თბილისის თავისუფალ უნივერსიტეტში.

გიორგი ჭოღოშვილი

მათემატიკოსი, საზოგადო მოღვაწე და მეგობარი

100

მალხაზ ბაკურაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასოცირებული პროფესორი. ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტი და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

რუსლან სურმანიძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასისტენტ პროფესორი. ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტი და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

2014 წლის 21 დეკემბერს ქართულმა მათემატიკურმა საზოგადოებამ აღნიშნა გამოჩენილი ქართველი მათემატიკოსის, პედაგოგისა და საზოგადო მოღვაწის, აკადემიკოს გიორგი ჭოღოშვილის დაბადების 100 წლისთავი.
სტუდენტებისათვის უთუოდ საინტერესო იქნება ბატონი გიორგის ბიოგრაფია, განსაკუთრებით კი, ის გზა, რომელიც მან განვლო სკოლის მოსწავლეობიდან აკადემიკოსობამდე. ამ მიზნით, გთავაზობთ ბატონი გიორგის სამეცნიერო ხელმძღვანელის, პ. ს. ალექსანდროვის სტატიას. ეს სტატია ბატონი გიორგის დაბადების მე-60 წლისთავს მიეძღვნა. ლეგენდარული მათემატიკოსი მკაფიოდ აყალიბებს თავის აზრს, თუ რას ნიშნავს იყო მეცნიერი, პედაგოგი და პატრიოტი.

გიორგი სევერიანის ძე ჭოღოშვილს, უდიდეს სპეციალისტს ტოპოლოგიის დარგში, 60 წელი შეუსრულდა.

გ. ჭოღოშვილი ქ. საჩხერეში, ექიმის ოჯახში დაიბადა. 1931 წელს ის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა–მათემატიკის ფაკულტეტზე ირიცხება, ხოლო ერთი წლის შემდეგ მოსკოვის უნივერსიტეტის იმავე ფაკულტეტზე გადადის. უნივერსიტეტის დამთავრების შემდეგ გ. ჭოღოშვილი გამოცდებს აბარებს მოსკოვის უნივერსიტეტის ასპირანტურაში და 1939 წელს იცავს საკანდიდატო დისერტაციას თემაზე: „შემოსაზღვრულ მრავალნაირობაზე მოცემული ფუნქციის ნაკლები მნიშვნელობების არისა და დონის ზედაპირების ცვლილება“.

1940 წლიდან დღემდე გ. ჭოღოშვილი მუშაობს საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის ა.რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტში (1962 წლიდან – ალგებრისა და გეომეტრიის განყოფილების გამგედ) და თბილისის უნივერსიტეტში (1946 წლიდან – ხელმძღვანელობს ალგებრისა და გეომეტრიის კათედრას). 1946 წელს გ. ჭოღოშვილმა სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის მათემატიკის ინსტიტუტში დაიცვა სადოქტორო დისერტაცია „ტოპოლოგიურ სივრცეებში ორადული თანაფარდობების შესახებ“. 1957 წელს საქ. სსრ მეცნ. აკადემიის წევრ–კორესპონდენტად, ხოლო 1960 წელს – მის ნამდვილ წევრად იქნა არჩეული. გ. ჭოღოშვილი საქ. სსრ მეცნიერების დამსახურებული მოღვაწეა, დაჯილდოვებულია ლენინის ორდენითა და სხვა სახელმწიფო ჯილდოებით.

გ. ჭოღოშვილის სამეცნიერო მოღვაწეობა ოცდაათიანი წლების ბოლოს დაიწყო ნაშრომების ციკლით მორსის თეორიაში, რომლებშიც საზღვრის მქონე მრავალნაირობაზე მოცემული ფუნქციის, მის კრიტიკულ მნიშვნელობაზე გავლის დროს, ნაკლებ მნიშვნელობათა არეებისა და დონის ზედაპირების ტოპოლოგიური ქცევის კვლევა წარმოებდა (კრიტიკული წერტილები განიხილებოდა მრავალნაირობის საზღვარზეც). გ. ჭოღოშვილის ამ ნაშრომებში პირველად ვხვდებით კონსტრუქციას, რაც ლიტერატურაში ცნობილია სახელწოდებებით „მორსის გარდაქმნა“, „ქირურგია“, „სფერული მოდიფიკაცია“.

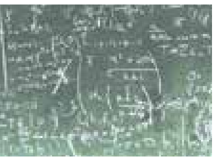
თუმცა, მალე გ. ჭოღოშვილის ყურადღება უშუალოდ ტოპოლოგიურ საკითხებზე გადადის, კერძოდ პ. ს. ალექსანდროვის მიერ დასმულ პრობლემაზე არაკომპაქტური სივრცეებისათვის „დამაკმაყოფილებელი“ ჰომოლოგიური თეორიის აგების შესახებ. ამასთან, თეორიის დამაკმაყოფილებლობის კრიტერიუმად ითვლებოდა, ამ თეორიის საფუძველზე, ორადობის თეორემების ანალოგების აგების შესაძლებლობა. ზოგადი ტოპოლოგიური სივრცეების ჰომოლოგიური თვისებების, ორადობის თეორიისა და სხვა მათთან ახლოსმყოფი საკითხები გ. ჭოღოშვილისათვის მომდევნო წლებში კვლევის ძირითად თემად იქცა.

პირველი წარმატება ამ მიმართულებით – გ. ჭოღოშვილის მიერ ალექსანდერ–პონტრიაგინის ორადობის კანონის განზოგადება ჯერ ევკლიდურ სივრცეში მდებარე მრუდე არაკომპაქტური პოლიედრებისათვის, ხოლო შემდგომ ნებისმიერი მიდამოებრივი რეტრაქტებისათვის.

აკადემიკოსი გიორგი ჭოღოშვილი

ალექსანდერ–კოლმოგოროვის ორადობის კანონის განზოგადების მიზნით გ. ჭოღოშვილმა დეტალურად გამოიკვლია ნებისმიერ ურთიერთდამატებითი სიმრავლეების პ. ს. ალექსანდროვის ჯგუფები და მათთვის ააგო ორადობის ჰომომორფიზმები, რომლებიც პ. ს. ალექსანდროვის მიერ ადრე აგებული და შესწავლილი იყო ჩაკეტილი სიმრავლეებისათვის. აქ მთავარი იყო გ. ჭოღოშვილის მიერ შემოთავაზებული შიგნიდან ჩაკეტილი, ხოლო გარედან ღია სიმრავლეებით სიმრავლის აპროქსიმაციის ხერხი. პირველად წარმოიქმნა ბიკომპაქტური ჯგუფების პირდაპირი სპექტრის ზღვრული ჯგუფის განსაზღვრის პრობლემა, რომელიც ასე მნიშვნელოვანი აღმოჩნდა შემდგომში. გ. ჭოღოშვილის მიერ (მისი და მასთან დაკავშირებული რიგი ალგებრული ამოცანების) წარმატებით გადაწყვეტამ ტოპოლოგებს შესძინა ახალი მძლავრი ინსტრუმენტი ზოგადი ტოპოლოგიური სივრცეების ჰომოლოგიური მეთოდებით შესწავლის საქმეში. კერძოდ, მისი დახმარებით, ძირითადად გ. ჭოღოშვილის, პ. ალექსანდროვის, ნ. ბერიკაშვილის, კ. სიტნიკოვის ნაშრომებში –განხორციელდა არაჩაკეტილი სიმრავლეებისათვის ჰომოლოგიური თეორიის აგების პროგრამა.

გ. ჭოღოშვილმა აღნიშნული პრობლემატიკით მისი მოსწავლეები დააინტერესა. თემატიკა ფართოვდებოდა და მდიდრდებოდა მსოფლიო პრაქტიკაში ტოპოლოგიის განვითარებასთან მჭიდრო კავშირში. კერძოდ, ჰომოლოგიის თეორიის სტინროდ–ეილენბერგის აქსიომატიკ-



ის გაჩენით მომწიფდა აუცილებლობა ამ ახალი თვალსაზრისით შეხედვისა ორადობის თეორიის საჭიროებებიდან გამომდინარე წარმოქმნილი მრავალი, უკვე ცნობილი ან ახალი, ჰომოლოგიის მრავალრიცხოვანი ჯგუფებისათვის. სწორედ ეს გახდა ერთ–ერთი ძირითადი ამოცანა, რომლის გადაჭრაც გ. ჭოღოშვილის სკოლაში იყო შესაძლებელი. პარალელურად მიმდინარეობს ორადობის ლოკალური თანაფარდობების, სპექტრების თეორიის შესწავლა, სხვადასხვა თვალსაზრისით განზოგადდა კოლმოგოროვისა და სტინროდის ჰომოლოგიის ჯგუფები. განსაკუთრებით საინტერესო და მნიშვნელოვანია სივრცეთა სხვადასხვა კატეგორიებზე ჰომოლოგიის ზუსტი თეორიის აგების ამოცანა. კერძოდ, ცოტა ხნის წინ, დამტკიცდა, რომ ნორმალურ სივრცეთა კატეგორიაზე ზუსტია კოლმოგოროვის ტიპის ერთ–ერთი ადრეული ჰომოლოგიის თეორია, რომელიც გ. ჭოღოშვილმა ჯერ კიდევ 1940 წელს განსაზღვრა.

დღეისათვის გ. ჭოღოშვილი, ფ. ბაუერის აზრით, ჰომოლოგიის თეორიებთან დაკავშირებული ჰომოტოპიის სხვადასხვა თეორიის აგებითაა დაკავებული. გ. ჭოღოშვილის მიერ ამ პრობლემატიკასთან სპექტრების თეორიის დაკავშირებამ მასში დამატებითი სიცხადე შეიტანა.

გ. ჭოღოშვილი არის ავტორი შრომებისა ზოგად ტოპოლოგიაში. 1937 წლის მის შრომაში მოცემულია ევკლიდურ სივრცეში მდებარე კომპაქტების განზომილების ახალი მახასიათებელი, რომელიც შემდგომში საშუალებას იძლევა ევკლიდური სივრცის ნებისმიერად აღებული ქვესიმრავლის მეტრიკული განზომილება დავახასიათოთ. 1941 წლის შრომაში გ. ჭოღოშვილმა ააგო კრებადობის სივრცეთა აქსიომატიკა, რომლის მიმართაც კრებადობის სივრცეთა კატეგორია ტოპოლოგიურ სივრცეთა კატეგორიის ექვივალენტურია (გ. ბირხოფის, მანამდე ცნობილი, აქსიომატიკა შემოიფარგლებოდა T_1 სივრცეებით).

გ. ჭოღოშვილის პედაგოგიური და საზოგადოებრივი მოღვაწეობა ასპირანტურის დამთავრებასთან ერთად იწყება. მათემატიკის ინსტიტუტის ჯერ კიდევ უმცროს მეცნიერ–თანამშრომლად ყოფნის პერიოდში, ომის მძიმე წლებში, სხვა ქართველ მათემატიკოსებთან ერთად, ის ლექციებს კითხულობს გორის, ქუთაისისა და სოხუმის პედაგოგიურ ინსტიტუტებში. ბუნებრივია, განსაკუთრებით ნაყოფიერად გ. ჭოღოშვილი თბილისის უნივერსიტეტში მუშაობს . აგრძელებდა რა უფროსი თაობის ქართველი მათემატიკოსების (ა. მ. რაზმაძე, გ. ნ. ნიკოლაძე, ნ. ი. მუსხელიშვილი, ა. კ. ხარაძე) მიერ ჩამოყალიბებულ ტრადიციებს, გ. ჭოღოშვილი ალგებრისა და გეომეტრიის, ასევე პედაგოგებს პედაგოგიკას თანამედროვე მსოფლიო მიღწევების შესაფერის დონეზე ასწავლიდა. მისი მცდელობების შედეგად 1965 წლიდან უნივერსიტეტის სავალდებულო პროგრამაში შეიტანეს გ. ჭოღოშვილის მიერ შედგენილი და უცვლელად მის მიერვე წაყვანილი კურსი „ალგებრისა და ტოპოლოგიის ძირითადი სტრუქტურები“.

გ. ჭოღოშვილის ხელმძღვანელობით, მის კათედრაზე ამზადებენ სპეციალისტებს ტოპოლოგიაში, ალგებრასა და გეომეტრიაში. გ. ჭოღოშვილის მოსწავლეთა რიცხვი დიდია, მათ შორის დავასახელებთ ალგებრული ტოპოლოგიის დარგში ერთ–ერთ სახელოვან სპეციალისტს, ფიზიკა–მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორს, ნ. ა. ბერიკაშვილს. გ. ჭოღოშვილის მოსწავლეთა შორის არიან უცხოელებიც.

მრავალწახნაგოვანია გ. ჭოღოშვილის საზოგადოებრივი მოღვაწეობა. დღეისათვის ის არის საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის პრეზიდიუმთან არსებული საშუალო და უმაღლესი სკოლების კომისიის თავმჯდომარე, უმაღლესი განათლების სამინისტროსთან არსებული ანალოგიური კომისიის თავმჯდომარე, დიდი ძალისხმევით მუშაობს საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის მათემატიკის ინსტიტუტთან არსებული ტერმინოლოგიური კომისიაში.

წარმოდგენილი მოკლე ცნობები გ. ჭოღოშვილის სამეცნიერო და საზოგადოებრივ–პედაგოგიური საქმიანობის შესახებ, მიუხედავად მისი არასრულობისა, საკმარისად ცხადად აჩვენებს, რომ მისი სახით ჩვენ გვყავს მეცნიერი, რომლის ინტესესები მათემატიკური იდეებისა და საკითხების ფართო წრეს მოიცავს და მეცნიერების პრინციპული საკითხებისკენაა მიმართული. როგორც ეს ნამდვილი მეცნიერისთვისაა დამახასიათებელი, გ. ჭოღოშვილი მის საკუთრივ მეცნიერულ მოღვაწეობას პედაგოგიურ, ორგანიზაციულ და საზოგადოებრივ მოღვაწეობისაგან არ აცალკევებს, ამ სიტყვის ფართო გაგებით. ყველა ეს თვისება, ბუნებრივია, განაპირობებს იმას, რომ ის არის შემოქმედი და მეთაური დიდი სამეცნიერო სკოლისა. ეს სკოლა – პირველი რესპუბლიკური სკოლა საბჭოთა კავშირში. მისმა პროდუქტიულობამ სპეციალისტების საყოველთაო აღიარება მოიპოვა არა მარტო სსრკ–ში, არამედ მის ფარგლებს გარეთაც. თავისი მრავალმხვრივი მოღვაწეობით, გ. ჭოღოშვილმა შექმნა არსებითად ახალი ნაკადი თავისი რესპუბლიკის მთელს მათემატიკურ ცხოვრებაში.

ქართულ მათემატიკურ სკოლას დიდი ხანია გააჩნია უდიდესი და შესანიშნავი ტრადიციები, საერთო აღიარებით დაკავშირებული ა. მ. რაზმაძის, ნ. ი. მუსხელიშვილისა და ი. ნ. ვეკუას სახელებთან, მაგრამ ეს ტრადიციები ძირითადად იყო ე. წ. კლასიკური მათემატიკის ტრადიციები. თანამედროვე მათემატიკური აზროვნების თეორიულ–სიმრავლური მიმართულებები წამყვანი ქართველი მათემატიკოსების ინტერესების მიღმა რჩებოდა. ამ სიტუაციის შეცვლაში უმნიშვნელოვანესი როლი ენიჭება გ. ჭოღოშვილს, რომელმაც ახალგაზრდა ქართველი მათემატიკოსების ინტერესთა სფეროს დაუქვემდებარა თანამედროვე მათემატიკური მეცნიერების საქართველოში ნაკლებად კულტივირებადი დარგები, პირველ რიგში, ტოპოლოგია და ალგებრა.

გ. ჭოღოშვილი დიდი ზოგადკულტურული ინტერესების მქონე ადამიანია. მასში ჰარმონიულადაა შეერთებული მშობლიური საქართველოს მიმართ ღრმა სიყვარული და ფართო ინტერნაციონალიზმი, ამ სიტყვის საუკეთესო მნიშვნელობით.

ჭოღოშვილის დღემდე დაუმტკიცებელი ჰიპოთეზა

ახალგაზრდებისთვის ალბათ ასევე საინტერესოა შემდეგი სტატია:

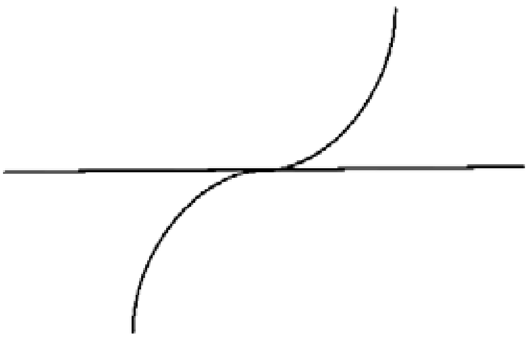
A. N.Dranishnikov, ON CHOGOSHVILI'S CONJECTURE, Proceedings of the American Math. Society, Vol. 125, N 7, July 1997, Pages 2155–2160

ამ სტატიის ავტორი ციტირებს ჭოღოშვილის 1938 წლის შრომას და აფიქსირებს ამ შრომიდან წამოსულ ჰიპოტეზას, რომელიც დღემდე ღიაა:

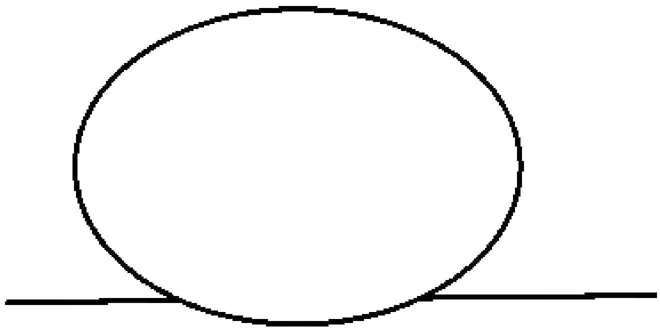
ნებისმიერი k-განზომილებიანი მრავალნაირობა R^n-ში სტაბილურად გადაიკვეთება რომელიღაც $n - k$ განზომილებიან სიბრტყესთან.

ეს ჰიპოთეზა დამტკიცებულია მხოლოდ ორგანზომილებიანი მრავალნაირობის შემთხვევაში 1995 წელს.

არაფორმალურად ა) ნახატზე წირი სტაბილურად კვეთს წრფეს, რაგდან წირი მცირე შეშფოთების შემდეგაც გადაკვეთს წრფეს. ბ) ნახატზე კი გადაკვეთა არასტაბილურია, რადგან ოვალს ოდნავ თუ შევაშფოთებთ (ოდნავ მაღლა ავწევთ) ის აღარ თანაკვეთს წრფეს.



ა) სტაბილური თანაკვეთა

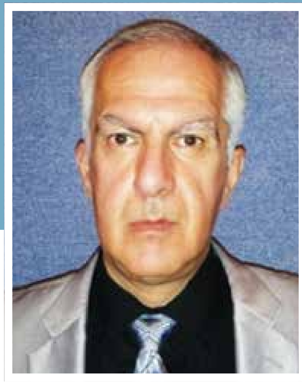


ბ) არასტაბილური თანაკვეთა

თორმეტწახნაგა კამათელი

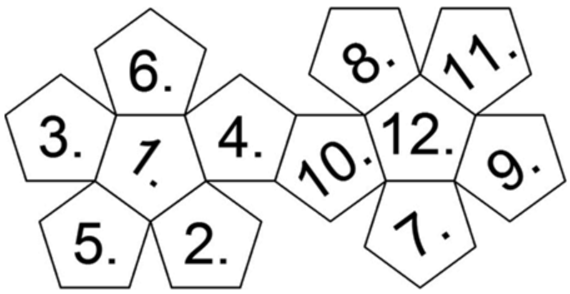
თეიმურაზ გიორგაძე

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
სწავლების მეთოდიკათა დეპარტამენტის
ასოცირებული პროფესორი



თორმეტწახნაგა კამათელი წარმოადგენს წესიერ თორმეტწახნაგას (დოდეკაედრს [3]), რომლის წახნაგებიც ქმნიან წესიერ ხუთკუთხედებს და ისინი დანომრილია 1-დან 12-ის ჩათვლით ისე, რომ მოპირდაპირე წახნაგებზე ქულათა ჯამი 13-ის ტოლია. კამათელზე მოსულ ქულად ითვლება მისი გლუვ ზედაპირზე ალალბედზე გაგორების შედეგად ზედა წახნაგის დაფიქსირების შემდეგ მასზე დაწერილი რიცხვი.

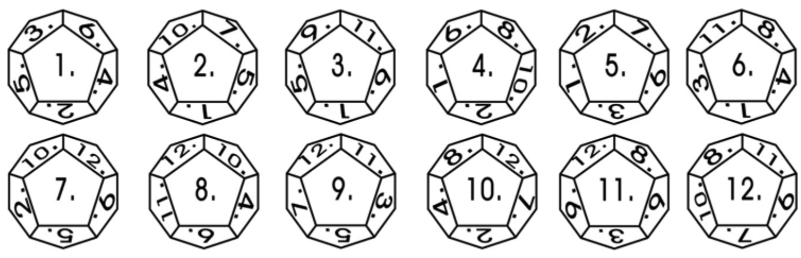
აღნიშნული კამათელი გამოიყენება თამაშ „სპექტრში“, ამიტომ მას შეიძლება ვუწოდოთ „სპექტრის“ კამათელი [2].



ნახ. 1.

ნახ. 1-ზე წარმოდგენელია „სპექტრის“ კამათლის შლილი შესაბამისი ნომრებით წახნაგებზე.

"სპექტრის" სათამაშო კამათელი უნდა იყოს ერთგვაროვანი მასალისაგან დამზადებული და მისი გეომეტრიული ცენტრი უნდა ემთხვეოდეს სიმძიმის ცენტრს. კამათლის გაგორებისას წინასწარ შეუძლებელია თქმა, რომელი წახნაგი დაფიქსირდება ზემოთ – შესაბამისად, რა რიცხვი მოვა, მაგრამ შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ თითოეული რიცხვის მოსვლა ერთნაირადაა შესაძლებელი – ტოლშესაძლებელი შედეგებია [1].



ნახ. 2.

ნახ. 2-ზე წარმოდგენილია „სპექტრის“ კამათლის სიბრტყეზე დაფიქსირების ყველა, 1-დან 12-მდე (ჩათვლით), განსხვავებული პოზიცია.

კამათლის აგდებისას რომელიმე ქულის მოსვლის ალბათობა (მაგალითად 7-იანის) არის $\frac{1}{12}$-ის ტოლი, სიმბოლურად:

$$P\ (\text{7-ის მოსვლა}) = \frac{1}{12}.$$

ვთქვათ, გვაინტერესებს ალბათობა იმისა, რომ „სპექტრის“ კამათელზე მოსული ქულა არის სრული კვადრატი, თუ ამ ხდომილობას აღვნიშნავთ A-თი, მაშინ $P(A) = \frac{3}{12}$.

შეიძლება ერთმანეთს შევადაროთ ორი A და B ხდომილობის ალბათობა, მაგალითად A ხდომილობა იყოს კამათელზე მოსულია 5-ის ჯერადი რიცხვი, ხოლო B ხდომილობა კი – კამათელზე მოსულია 6-ის ჯერადი რიცხვი; ეს ალბათობები ერთმანეთის ტოლია; ე.ი. ხდომილობები ტოლშესაძლებელია; $P(A) = P(B) = \frac{2}{12}$.

რადგან წელიწადში 12 თვეა, მათგან ზამთრის თვეებია დეკემბერი, იანვარი და თებერვალი მათ შევუსაბამოთ რიცხვები 12, 1, 2 და ვუწოდოთ „ზამთრის რიცხვები“, ანალოგიურად „გაზაფხულის რიცხვები“ იქნება: მარტი – 3, აპრილი – 4, მაისი- 5; ასევე „ზაფხულის რიცხვებისთვის“ გვექნება: ივნისი- 6, ივლისი – 7, აგვისტო – 8; ხოლო „შემოდგომის რიცხვებისთვის“ კი – სექტემბერი – 9, ოქტომბერი – 10, ნოემბერი – 11; შემოვიღოთ აღნიშვნები A-თი აღვნიშნოთ „ზამთრის რიცხვები“; B-თი „გაზაფხულის რიცხვები“; C-თი „ზაფხულის რიცხვები“; ხოლო D-თი „შემოდგომის რიცხვები“, ერთმანეთს შევადაროთ A, B, C და D ხდომილობების ალბათობები; ცხადია $P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = \frac{3}{12}$.

A-თი აღვნიშნოთ ხდომილობა – „კამათელზე მოსულია 3-ის ჯერადი რიცხვი“, B-თი ხდომილობა – „კამათელზე მოსული რიცხვი 3-ზე გაყოფისას ნაშთს გვაძლევს 1-ს“; ხოლო C-თი კი ხდომილობა – „კამათელზე მოსული რიცხვი 3-ზე გაყოფისას ნაშთს გვაძლევსა 2-ს“. ერთმანეთს შევადაროთ ხდომილობების ალბათობები $P(A)$, $P(B)$ და $P(C)$; აქაც, ცხადია გვაქვს ტოლშესაძლებელი ხდომილობები და ამიტომ მათი ალბათობებიც ერთმანეთის ტოლი იქნება: $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{4}{12}$.

განვიხილოთ ექსპერიმენტი – ორი კამათლის გაგორება და „მოსულ“ რიცხვებზე დაკვირვება. ვთქვათ, კამათლებიდან ერთი თეთრია, მეორე – შავი. ამოვწეროთ ამ ცდასთან დაკავშირებული ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე.

შავზე მოსული ქულა / თეთრზე მოსული ქულა	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
1.	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)	(1;7)	(1;8)	(1;9)	(1;10)	(1;11)	(1;12)
2.	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)	(2;7)	(2;8)	(2;9)	(2;10)	(2;11)	(2;12)
3.	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)	(3;7)	(3;8)	(3;9)	(3;10)	(3;11)	(3;12)
4.	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)	(4;7)	(4;8)	(4;9)	(4;10)	(4;11)	(4;12)
5.	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)	(5;7)	(5;8)	(5;9)	(5;10)	(5;11)	(5;12)
6.	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)	(6;7)	(6;8)	(6;9)	(6;10)	(6;11)	(6;12)
7.	(7;1)	(7;2)	(7;3)	(7;4)	(7;5)	(7;6)	(7;7)	(7;8)	(7;9)	(7;10)	(7;11)	(7;12)
8.	(8;1)	(8;2)	(8;3)	(8;4)	(8;5)	(8;6)	(8;7)	(8;8)	(8;9)	(8;10)	(8;11)	(8;12)
9.	(9;1)	(9;2)	(9;3)	(9;4)	(9;5)	(9;6)	(9;7)	(9;8)	(9;9)	(9;10)	(9;11)	(9;12)
10.	(10;1)	(10;2)	(10;3)	(10;4)	(10;5)	(10;6)	(10;7)	(10;8)	(10;9)	(10;10)	(10;11)	(10;12)
11.	(11;1)	(11;2)	(11;3)	(11;4)	(11;5)	(11;6)	(11;7)	(11;8)	(11;9)	(11;10)	(11;11)	(11;12)
12.	(12;1)	(12;2)	(12;3)	(12;4)	(12;5)	(12;6)	(12;7)	(12;8)	(12;9)	(12;10)	(12;11)	(12;12)

ნახ. 3

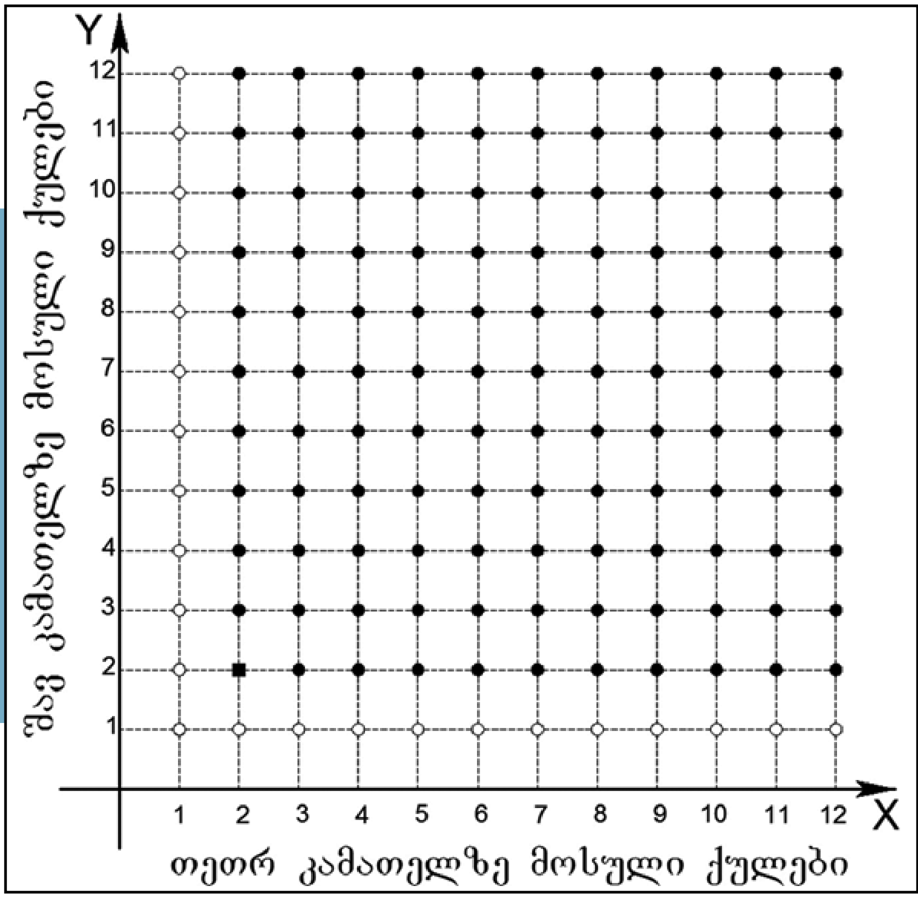
ნახ. 3-ზე, მაგალითად (7;10) წყვილი (მეშვიდე სტრიქონისა და მეათე სვეტის გადაკვეთაზე) შეესაბამება ელემენტარულ ხდომილობას: „თეთრ კამათელზე მოვიდა შვიდიანი, ხოლო შავზე ათიანი“.

ხდომილობათა სივრცე შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$\Omega=\{(x;y)\mid\ \ (x\in N;y\in N);\ \ \ 1\le x\le 12,\ \ \ 1\le y\le 12\}\tag{1}$$

როგორც (1)-დან ჩანს, შედეგების ოდენობა არის 12 · 12 = 144, ამიტომ ყოველი ელემენტარული ხდომილობის ალბათობა არის $\frac{1}{144}$.

შეიძლება ეს სივრცე გამოვსახოთ დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა სიბრტყეზე (ნახ. 4).



ნახ. 4.

ვთქვათ, A ხდომილობაა – „კამათლების გაგორების შედეგად მოსულ ქულათა ჯამი მეტია მათ ნამრავლზე“, B ხდომილობაა – „მოსულ ქულათა ჯამი ტოლია მათი ნამრავლის“, ხოლო C ხდომილობა კი – „მოსულ ქულათა ჯამი ნაკლებია მათ ნამრავლზე“; ნახ. 4-ზე თეთრი წერტილები შეესაბამებიან A ხდომილობას, შავი წერტილები C ხდომილობას, ხოლო კვადრატული წერტილი კი B ხდომილობას. თუ გამოვთვლით შესაბამის ალბათობებს გვექნება: $P(A)=\frac{23}{144}$, $P(B)=\frac{1}{144}$ და $P(C)=\frac{120}{144}$, ამასთანავე,

$$P(A)+P(B)+P(C)=\frac{23}{144}+\frac{1}{144}+\frac{120}{144}=1.$$

ვთქვათ, A ხდომილობაა „დუბლის“ მოსვლა, ე.ი. თეთრ კამათელზეც მოვიდა იგივე ქულა. რაც შავზე, მაშინ ამ ხდომილობის შესაბამის ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლე – Ω-ის ქვესიმრავლეა

$$A=\{(1;1);(2;2);(3;3);(4;4);(5;5);(6;6);(7;7);(8;8);(9;9);(10;10);(11;11);(12;12)\},$$

მაშასადამე, ამ ხდომილობის ალბათობა არის

$$P(A)=\frac{12}{144}=\frac{1}{12}.$$

ხდომილობა, „კამათლებზე მოსულ ქულათა ჯამი არანაკლებია 18-ზე, ხოლო მასთან შესაბამის ქულათა სხვაობა არაუმეტესია 2-ის“, აღვნიშნოთ A-თი და ვიპოვოთ მისი ალბათობა.

A ხდომილობა იქნება:

$$A=\{(8;10),(10;8),(11;9),(9;11),(12;10),(10;12),(10;9),(9;10),(10;11),(11;10),(11;12),(12;11),\\ (9;9),(10;10),(11;11),(12;12)\},$$

ამიტომ გვექნება:

$$P(A)=\frac{16}{144}=\frac{1}{9}.$$

ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ თეთრ კამათელზე მოსული ქულა უფრო მეტია, ვიდრე შავ კამათელზე მოსული ქულა. თუ ამ ხდომილობას აღვნიშნავთ A-თი და შესაბამისად ცხრილში მოვძებნით A ხდომილობის მოხდენათა ოდენობას მათი რიცხვი იქნება 66 და შესაბამისად მისი ალბათობა

$$P(A)=\frac{66}{144}=\frac{11}{24}.$$

როგორც ვნახეთ, თორმეტწახნაგა კამათლის შემთხვევაში, ხდომილობათა ოდენობები უფრო მეტია ვიდრე ჩვეულებრივი კამათლის დროს. შეიძლება მისი იმიტაცია რულეტითაც, თუ რულეტს 12 ტოლ სექტორად დავყოფთ. აქედან გამომდინარე ამოცანები, რომლებიც იხსნებიან თორმეტწახნაგა კამათლის მოდელით, შეიძლება გავხადოთ უფრო ფართო და მრავალფეროვანი.

ლიტერატურა:

[1] გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილი; მათემატიკა X, გამომცემლობა „ინტელექტი“, 2009-2013

[2] თ. გიორგაძე, დეპონირების დამადასტურებელი მოწმობა 5214 საქპატენტი, მოწმობა D 527 დიზაინი საქპატენტი, ძალაში შესვლის თარიღი 10.07.2012 წ.

[3] M. Weninger, POLYHEDRON MODELS, Cambridge. Cambridge University Press 1971.

ელ-ფოსტა: Temo.giorgadze@yahoo.com

როგორ აღმოაჩინეს კომპლექსური რიცხვები?

მალხაზ ბაკურაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასოცირებული პროფესორი. ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტი და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ალბათ, მკითხველს სმენია, კომპლექსურ რიცხვებზე და ადვილად მიხვდება, რომ ტოლობა $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=\sqrt{6}$ მცდარია. საკვირველია, მაგრამ ეს შეცდომა გენიალური მათემატიკოსის, ლეონარდ ეილერის, 1770 წლის ერთ-ერთ პუბლიკაციაში გვხვდება. ამ დაბნეულობის მიზეზის გასარკვევად გავიხსენოთ, რომ თითქმის ხუთი საუკუნე გავიდა მას შემდეგ, რაც კომპლექსური რიცხვები აღმოაჩინეს. ტერმინი „კომპლექსური რიცხვი" ეხება $a + ib$ ფორმის ობიექტს, სადაც a და b ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო i რიცხვს, ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვისაგან განსხვავებით, აქვს თვისება $i^2 = -1$. კომპლექსური რიცხვების აღმოჩენამ უდიდესი გავლენა მოახდინა მთელ მათემატიკაზე, გააერთიანა ბევრი რამ, რაც ადრე განცალკევებული ჩანდა და ახსნა ბევრი რამ, რაც ადრე აუხსნელი იყო. თუმცა, კომპლექსური რიცხვების გაჩენიდან პირველი 250 წლის განმავლობაში ცოტა რამ იქნა მიღწეული.

როგორ მოხდა, რომ კომპლექსური რიცხვები თაობების მანძილზე თვლემდა, როცა იმ საუკუნეებს უნახავთ ისეთი გენიოსების მოსვლა და წასვლა როგორებიც იყვნენ: დეკარტე, ფერმა, ლეიბნიცი და ნიუტონიც კი? პასუხი, როგორც ჩანს, იმაში მდგომარეობს, რომ თავიდან კომპლექსურ რიცხვებს მისალმებით კი არა- ეჭვით, დაბნეულობით და მტრულადაც კი შეხვდნენ.

კომპლექსური რიცხვების „დაბადების მოწმობად" ბევრი ,ტრადიციულად, ჯიროლამო კარდანოს (Girolamo Cardano) წიგნს „ARS MAGNA", („დიდი ხელოვნება") მიიჩნევს, რომელიც 1545 წელს გამოქვეყნდა. ეს წიგნი კუბური განტოლების ამოხსნას ეხება და მასში კარდანოს წინამორბედების, ტარტალიასა (Tartaglia) და დელ ფეროს, (del Ferro) მეთოდებიცაა მოყვანილი. პირველად ამ წიგნში გვხვდება ფესვი უარყოფითი რიცხვიდან. მაგალითად, გვხვდება ამოცანა: ვიპოვოთ ორი რიცხვი, რომელთა ჯამი 10-ია, ნამრავლი კი – 40. ამ ამოცანის პასუხია $5+\sqrt{-15}$ და $5-\sqrt{-15}$. თუმცა, კარდანო იქვე ეჭვით აღნიშნავს, რომ ეს პასუხი „რამდენადაც დახვეწილია, იმდენად უაზროა".

პირველი მნიშვნელოვანი გამოთვლები კომპლექსურ რიცხვებზე გვხდება რაფაელ ბომბელის (Rafael Bombelli) მიერ 1572 წელს გამოქვეყნებულ წიგნში „L'Algebra". აქაც, ავტორის აზრით, მთელი ეს საკითხი „ეყრდნობა უფრო სოფიზმს, ვიდრე ჭეშმარიტებას". ლეიბნიცის 1702 წლის გამოთქმით კი, რიცხვი i არის „ამფიბია არსებობასა და არარსებობას შორის". ეს განწყობილებები აისახა ტერმინოლოგიაზეც და კომპლექსურ რიცხვებს „წარმოსახვით" რიცხვებს უწოდებდნენ (დღესაც $a + ib$ კომპლექსური რიცხვის b კომპონენტს წარმოსახვითი ეწოდება). ტერმინი „ნამდვილი რიცხვი" ამ ამბების შემდეგ დამკვიდრდა, რათა წარმოსახვითი რიცხვები ცალკე გაემიჯნათ. 1770 წელსაც კი ისეთი დაბნეულობა სუფევდა, რომ ეილერს სწორედ ის მარტივი შეცდომა მოუვიდა, ამ მოთხრობის დასაწყისში რომ ვახსენეთ.

მაინც რა შენიშნა ბომბელიმ 27 წლის შემდეგ ისეთი, რაც კარდანოს გამორჩა თავის წიგნში და რაც კომპლექსური რიცხვების არსებობის პირველი სერიოზული მაცნე და მანიშნებელი იყო?

ბომბელის მოუვიდა „ველური აზრი“, როგორც თვითონ წერს თავის წიგნში, რომ კუბური განტოლების ამონახსნის ფორმულა ნამდვილად მიანიშნებს კომპლექსური რიცხვების საჭიროებას.

ბომბელის მსჯელობა ეყრდნობა ორ ფაქტს: ნებიემიერი კუბური განტოლება დაიყვანება $x^3 = bx + c$ განტოლებაზე, (იხ. ქვემოთ თეორემა 1) და არსებობს ამ განტოლების ფესვის ფორმულა (იხ. თეორემა 2). ეს ორი თეორემა კარდანოს წიგნში უკვე ეწერა.

მაშ, გავყვეთ ბობბელის მსჯელობას და ვნახოთ, რატომაა, რომ კუბურ განტოლებებს მივყავართ კომპლექსურ რიცხვებამდე და არა- კვადრატულებს.

$x^2 = bx + c$ კვადრატული განტოლების ფესვები შეძლება განვიხილოთ, როგორც $y = x^2$ პარაბოლისა და $y = bx + c$ წრფის თანაკვეთის წერტილები. იხ. ფიგურა ა) სადაც მოცემულია $y = x^2$ პარაბოლა და ორი წრფე l_1 და l_2.

$l_1 : y = bx + c$ წრფე ($b^2 + 4c > 0$), კვეთს პარაბოლას, ანუ $x^3 = bx + c$ განტოლებას აქვს ამონახსნი.

$l_2 : y = bx + c$ წრფე, ($b^2 + 4c < 0$), არ კვეთს პარაბოლას, რადგან დისკრიმინანტი $\sqrt{b^2+4c}$ ნამდვილი რიცხვი არაა. გეომეტრიულად ეს გამართლებულია, რადგან პარაბოლას ზოგიერთი წრფე არ გადაკვეთს.

მაგრამ, როგორც ბომბელიმ შენიშნა, ფიგურა ბ) გვიჩვენებს, რომ $y = x^3$ კუბურ წირს ნებისმიერი წრფე კვეთს, ამიტომ ნებისმიერ კუბურ განტოლებას უნდა ჰქონდეს ერთი ამონახსნი მაინც.

ბომბელიმ განიხილა მაგალითი $x^3 = 15x + 4$ ცხადია, ამ განტოლებას აქვს ამონახსნი $x = 4$. $\sqrt{-1}$ გამოსახულების მნიშვნელობები ავღნიშნოთ სიმბოლოებით $\pm i$, მაშინ განტოლების ამონახნი კარდანოს წიგნის მიხედვით (იხ. თეორემა 2) იქნება

$$x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}.$$

მაგრამ, რატომ უდრის ეს გამოსახულება 4-ს? აი, აქ ბომბელის ასეთი „ველური აზრი“ მოუვიდა: შესაძლოა, ეს გამოსახულება $x = 4$ სიდიდეს იმიტომ იღებს, რომ არსებობს რაღაც n-რიცხვი, რომ გვაქვს ტოლობები

$$\sqrt[3]{2+11i} = 2 + ni \quad \text{და} \quad \sqrt[3]{2-11i} = 2 - ni.$$

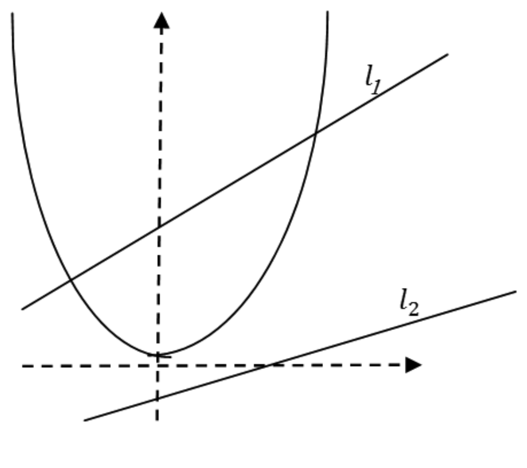
თუ ასეა, მაშინ უნდა გვქონდეს $(2 \pm ni)^3 = 2 \pm 11i$.

ეს მართლაც ასეა: თქვენთვის შეამოწმეთ, რომ $(2 \pm i)^3 = 2 \pm 11i$. ამისათვის აიყვანეთ $2 \pm i$ გამოსახულება კუბში, როგორც ორწევრი, დააჯგუფეთ i-ს ხარისხებით და გაითვალისწინეთ $i^2 = -1$.

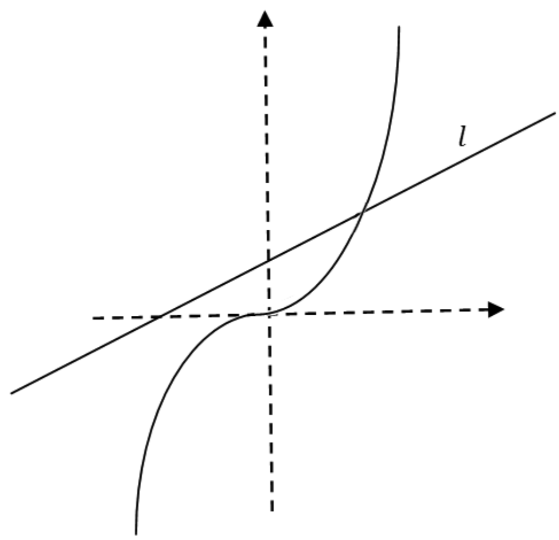
დღეს ამის გაკეთება ადვილია, მაგრამ პირველად ბომბელის ნაშრომით დადგინდა, რომ საჭიროა კომპლექსური რიცხვები და კომპლექსური არითმეტიკა. კომპლექსურ რიცხვებსა და მათ გამოყენებებზე მათემატიკასა და ფიზიკაში საინტერესო და ხელმისაწვდომი ლიტერატურა არსებობს. ჩვენ ამ საკითხს სხვა ნომერში გავაგრძელებთ. ახლა კი, დამატკიცოთ დაპირებული ორი თეორემა.

თეორემა 1. ყოველი კუბური განტოლება დაიყვანება განტოლებაზე $x^3 = bx + c$.

ამის დამტკიცება მარტივია: ზოგადი კუბური განტოლების $X^3 + AX^2 + BX + C = 0$ ფესვები შეგ-



ა)



ბ)

ვიძლია განვიხილოთ როგორც XOY საკოორდინატო სიბრტყეში X ღერძის, ანუ $y = 0$ წრფის და $y = X^3 + AX^2 + BX + C$ კუბური წირის თანაკვეთის წერტილები. ამ კუბური წირის „გადაღუნვის წერტილი“ (კალკულუსი ვინც იცის, გაიხსენოს, ეს ის წერტილია, რომელშიც მეორე წარმოებული $y'' = 0$) ტოლია $X = -\frac{A}{3}$. ამრიგად, $X = x - \frac{A}{3}$ ჩასმით ზოგად განტოლებაში, მივიღებთ გამოსახულებას, რომელშიც x^2-ის კოეფიციენტი ტოლი იქნება 0-ის, ანუ კუბური წირი მიიღებს სასურველ სახეს. შეამოწმეთ გამოთვლით.

თეორემა 2. $x^3 = 3px + 2q$ კუბური განტოლების ფესვი გამოითვლება ფორმულით:

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}.$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ ჩასმა

(1) $x = s + t$,

სადაც s და t ისე შევარჩიოთ, რომ

(2) $st = p, s^3 + t^3 = 2q$.

ამრიგად, (1) და (2) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $s + t$ არის განტოლების ფესვი, რადგან

$$(s + t)^3 = 3st(s + t) + s^3 + t^3 = 3p(s + t) + 2q.$$

შემდეგ, (2) ტოლობებში შეგვიძლია, გამოვრიცხოთ t და მივიღოთ კვადრატული განტოლება s^3-ის მიმართ. ამ კვადრატული განტოლების ამოხსნით მივიღებთ $s^3 = q \pm \sqrt{q^2 - p^3}$, ანუ

(3) $s_1 = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$, $s_2 = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$.

(თქვენთვის შეამოწმეთ ეს). მაგრამ s, t სიმბოლოები განტოლებებში სიმეტრიულად მონაწილეობს, ამიტომ t ცვლადიც s_1, s_2-დან ერთ-ერთის ტოლია. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $s^3 + t^3 = 2q$, მივიღებთ ტოლობებს $t_1 = s_2$, $t_2 = s_1$. ამრიგად, $x = s_1 + t_2 = s_2 + t_1$. საბოლოოდ (3)-ის გათვალისწინებით x-ის გამოსახულებისთვის მივიღეთ რ.დ.გ.

ფიბონაჩის რიცხვები ბუნებაში

ნანა ოდიშელიძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასისტენტ-პროფესორი. ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ლეონარდო პიზელი (ცნობილი როგორც ფიბონაჩი, დაახლ. 1170-1250) გვიანი შუა საუკუნების ევროპის უდიდესი მათემატიკოსი, დაიბადა ქალაქ პიზაში შეძლებული ვაჭრის ოჯახში. მათემატიკისადმი ინტერესი ძირითადად მისი ოჯახის საქმიანობამ განსაზღვრა. წარმატებული კომერციული კარიერისთვის მამის სურვილით ლეონარდო სწავლობდა მათემატიკას არაბ მასწავლებლებთან. ის მოგზაურობდა ეგვიპტეში, სირიასა და ბიზანტიაში, ხვდებოდა თავისი დროის მრავალ მეცნიერს, სწავლობდა ანტიკური სამყაროსა და ინდოეთის მათემატიკოსების ნაშრომებს.

რიცხვითი მიმდევრობა, რომელიც მის სახელს ატარებს, წარმოიშვა კურდღლებთან დაკავშირებული ამოცანიდან, რომელიც ფიბონაჩიმ აღწერა თავის წიგნში „liber abaci" (ტრაქტაქტი არითმეტიკისა) 1202 წელს.

ამოცანა კურდღლებზე. დავუშვათ, კურდღლების ერთი წყვილისგან ყოველთვე ჩნდება კურდღელთა ახალი წყვილი, რომელსაც შეუძლია წარმოშვას შთამომავლობა ერთი თვის ასაკში. საჭიროა განისაზღვროს, თუ კურდღელთა ერთი წყვილისგან რამდენი წყვილი გვეყოლება n თვის შემდეგ.

მოვიყვანოთ ამ ამოცანის ამოხსნა. ვთქვათ f_n არის კურდღელთა წყვილი n თვის შემდეგ. კურდღელთა წყვილების რაოდენობა $n+1$ თვის შემდეგ f_{n+1}, ტოლი იქნება n-ურ თვეზე კურდღელთა წყვილების არსებულ რაოდენობას დამატებული ახლად დაბადებული კურდღლების წყვილთა რაოდენობა. რადგან კურდღლები ჩნდებიან კურდღელთა წყვილებიდან, რომელთა ასაკი ერთ თვეზე მეტია, ამიტომ ახლად დაბადებულ კურდღელთა წყვილი იქნება f_{n-1}. მაშასადამე, სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$f_{n+1} = f_n + f_{n+1}, \tag{1}$$

სადაც

$$f_0 = 0, f_1 = 1. \tag{2}$$

ამრიგად მივიღებთ რეკურენტულ როცხვით მიმდევრობას

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

რომელსაც ეწოდება ფიბონაჩის მიმდევრობა. ამ მიმდევრობის ყოველი წევრი, დაწყებული მესამიდან, უდრის წინა ორის ჯამს. ითვლება რომ მოცემულია მიმდევრობის პირველი ორი წევრი $f_0 = 0, f_1 = 1$.

ამრიგად, „ამოცანა კურდღლებზე" დაყვანილი იქნა ფუნქციონალური განტოლების ამოხსნაზე, ე.ი. საჭიროა მოიძებნოს მიმდევრობის ზოგადი წევრი f_n, რომელიც აკმაყოფილებს (1) ტოლობას (2) პირობით.

დაუშვათ, რომ f_n მიმდევრობას აქვს სახე $f_n = \lambda^n$, სადაც λ-ნამდვილი პარამეტრია. f_n ჩავსვათ (1)-ში, მივიღებთ

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \lambda^{n-1},$$

ანუ

$$\lambda^{n-1}(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0.$$

რადგან $f_n \neq 0$ $(\forall n \in N)$, უკანასკნელი ტოლობა მიიღებს სახეს: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, საიდანაც ვღებულობთ

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

ამრიგად, მიმდევრობები

$$f_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad f_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

აკმაყოფილებენ (1) ტოლობას. აქედან ვასკვნით, რომ (1) განტოლებას აქვს უამრავი ამონახსნი. ადვილად ჩანს, რომ შემდეგი სახის მიმდევრობა

$$f_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \tag{3}$$

აგრეთვე აკმაყოფილებს (1) განტოლებას, სადაც c_1, c_2 – ფიქსირებული ნამდვილი კონსტანტებია. უფრო მეტიც, შეიძლება ითქვას, რომ თუ მიმდევრობა აკმაყოფილებს (1) ტოლობას, მაშინ მას აქვს (3) სახე.

შევნიშნოთ, რომ ფიბონაჩის მიმდევრობა ცალსახად განსაზღვრულია პირველი ორი წევრით, ანუ საწყისი პირობებით (2). თუ ჩავსვათ (3)-ში $\boldsymbol{n = 0}$ და $\boldsymbol{n = 1}$ მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 . \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 . \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1, \end{cases}$$

რომლის ამონახსნია $c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

საბოლოოდ მივიღებთ, რომ ფიბონაჩის მიმდევრობის n-ურ წევრს აქვს სახე

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad (n \in N)$$

ეს ფორმულა მიღებულია ცნობილი ფრანგი მეცნიერის ბინეს მიერ (1843).

ფიბონაჩის რიცხვებს განიხილავენ აგრეთვე n-ის უარყოფითი მნიშვნელობებისათვისაც, როგორც ორმხრივ უსასრულო მიმდევრობას, რომელიც აკმაყოფილებს იმავე რეკურენტულ თანადობას. ადვილად შეიძლება მივიღოთ წევრები უარყოფითი ნომრებით, თუ ავიღებთ $f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$.

n	…	−10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	…
f_n.	…	−55	34	−21	13	−8	5	−3	2	−1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	…

ფიბონაჩის რიცხვების ზოგიერთი თვისებები

$$1.\ f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n=f_{n+2}-1.$$

დამტკიცება:

$$\begin{aligned}&f_1=f_3-f_2,\\&f_2=f_4-f_3,\\&\ldots,\\&f_{n-1}=f_{n+1}-f_n,\\&f_n=f_{n+2}-f_{n+1}.\end{aligned}$$

თუ შევკრიბავთ ყველა ამ ტოლობას წევრ წევრად, მივიღებთ

$$f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n=f_{n+2}-f_2.$$

რადგან $f_2=1$, მივიღებთ $f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n=f_{n+2}-1$.

შემდეგი ორი თვისებაც ანალოგიურად მტკიცდება:

$$2.\ f_1+f_3+f_5+\ldots+f_{2n-1}=f_{2n}.$$

$$3.\ f_2+f_4+f_6+\ldots+f_{2n}=f_{2n+1}-1.$$

$$4.\ f_1^2+f^2{}_2+f_3^2+\ldots+f_n^2=f_nf_{n+1}.$$

დამტკიცება: შევნიშნოთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას

$$f_nf_{n+1}-f_{n-1}f_n=f_n(f_{n+1}-f_{n-1})=f_n^2,\quad (n\in N).$$

ამ თანადობიდან ვღებულობთ ტოლობებს

$$\begin{aligned}&f_1^2=f_1.f_2,\\&f_2^2=f_2.f_3-f_1.f_2,\\&f_3^2=f_3.f_4-f_2.f_3,\\&\ldots,\\&f_n^2=f_n.f_{n+1}-f_{n-1}.f_n\end{aligned}$$

თუ ყველა ამ ტოლობას შევკრიბავთ, მივიღებთ

$$f_1^2+f^2{}_2+f_3^2+\ldots+f_n^2=f_nf_{n+1}.$$

$$5.\ f_{n+m}=f_{n-1}f_m+f_nf_{m+1},$$

დამტკიცება: გამოვიყენოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი. ჩავატაროთ ინდუქცია $m\in N$-ის მიმართ. როდესაც $m=1$, მაშინ

$$f_{n+1} = f_{n-1}f_1 + f_n f_2,$$

როდესაც $m = 2$ ცხადია გვაქვს:

$$f_{n+2} = f_{n-1}f_2 + f_n f_3 = f_{n-1} + 2f_n = f_{n-1} + f_n + f_n = f_{n+1} + f_n.$$

ამრიგად $m = 1$, $m = 2$-თვის ინდუქციის ფუძე შემოწმებულია. ვთქვათ ფორმულა სამართლიანია $m = k$ და $m = k + 1$-თვის. დავამტკიცოთ ტოლობის ჭეშმარიტება $m = k + 2$. ვთქვათ ჭეშმარიტია ტოლობები

$$f_{n+k} = f_{n-1}f_k + f_n f_{k+1},$$
$$f_{n+k+1} = f_{n-1}f_{k+1} + f_n f_{k+2}.$$

თუ ყველა ამ ტოლობას წევრ-წევრ შევკრიბავთ მივიღებთ

$$f_{n+k+2} = f_{n-1}f_{k+2} + f_n f_{k+3}.$$

რაც წარმოადგენს მე-5 თვისებას როცა $m = k + 2$

$$6.\ f_{2n} = f_{n-1}f_n + f_n f_{n+1}.$$

მტკიცება გამომდინარეობს მე-5 თვისებიდან, როდესაც $m = n$.

7. f_{2n} წევრი იყოფა f_n წევრზე

დამტკიცება გამომდინარეობს მე-6 თვისებიდან. მართლაც $f_{2n} = f_n(f_{n-1} + f_{n+1})$.
აქედან ვღებულობთ $f_{2n} : f_n$.

$$8.\ f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2.$$

$$9.\ f_{2n} = f_{n+1}^2 + f_n^3 - f_{n-1}^3.$$

მე 8 და 9 თვისებები უშუალოდ გამომდინარეობს მე-6 თვისებიდან.

$$10.\ f_n^2 = f_{n-1}f_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

დამტკიცება: გამოვიყენოთ ინდუქციის მეთოდი. როცა $n = 2$ ტოლობა $f_n^2 = f_{n-1}f_{n+1} + (-1)^{n+1}$ გარდაიქმნება ჭეშმარიტ ტოლობად

$$f_2^2 = f_1 f_3 - 1.$$

დავუშვათ, რომ მე-10 თვისება სამართლიანია n-სათვის და ვაჩვენოთ მისი სამართლიანობა $n + 1$-სთვის. ამრიგად, ვთქვათ სამართლიანია

$$f_n^2 = f_{n-1}f_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

ტოლობის ორივე მხარეს მივუმატოთ $f_n f_{n+1}$, შედეგად მივიღებთ

$$f_n^2 + f_n f_{n+1} = f_{n-1}f_{n+1} + f_n f_{n+1} + (-1)^{n+1},$$

ანუ

$$f_n(f_n+f_{n+1})=f_{n+1}(f_{n-1}+f_n)+(-1)^{n+1},$$

რადგან $f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$, ვასკვნით: $f_n f_{n+2}=f_{n+1}{}^2+(-1)^{n+1}$,

ანუ

$$f_{n+1}{}^2=f_n f_{n+2}+(-1)^{n+2}.$$

შესაბამისად მივიღეთ, რომ $f_n{}^2=f_{n-1}f_{n+1}+(-1)^{n+1}$ სამართლიანია $n+1$-თვისაც.

11. თუ n იყოფა m-ზე, მაშინ f_n იყოფა f_m-ზე.

დამტკიცება. ვთქვათ $n : m$, ანუ $n = mk$. დავამტკიცოთ ინდუქციით k-ს მიმართ. როცა $k = 1$, $n = m$, მაშასადამე f_n იყოფა f_m-ზე. დავუშვათ, რომ f_{mk} იყოფა f_m. განვიხილოთ $f_{m(k+1)}$, ტოლობიდან $f_{m(k+1)}= f_{mk+m}$, მე-5 თვისების საფუძველზე, მივიღებთ

$$f_{m(k+1)}=f_{mk-1}f_m+f_{mk}f_{m+1}.$$

ტოლობის მარჯვენა მხარეში პირველი შესაკრები იყოფა f_m ზე. მეორე წევრი იყოფა f_m-ზე ინდუქციის დაშვების თანახმად. მაშასადამე, ამ წევრების ჯამი იყოფა f_m-ზე, რაც ნიშნავს $f_{m(k+1)} \vdots f_m$. ამრიგად, 11 თვისება დამტკიცებულია.

მოვიყვანოთ რამოდენიმე თვისება დამტკიცების გარეშე

- ფიბონაჩის ორი რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფი უდრის ფიბონაჩის რიცხვს იმ ინდექსით, რომელიც ტოლია საწყისი ორი რიცხვის ინდექსების უდიდესი საერთო გამყოფის.
- ბინომიური კოეფიციენტების ჯამები პასკალის სამკუთხედის დიაგონალებზე არიან ფიბონაჩის რიცხვები, შემდეგი ფორმულის მიხედვით

$$f_{n+1}=\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n-k}{k}.$$

- ფიბონაჩის რიცხვების მიმდევრობით წარმოქმნილ ფუნქციას აქვს სახე:

$$x+x^2+2x^3+3x^4+5x^5+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}f_n x^n=\frac{x}{1-x-x^2}.$$

- ნებისმიერი (გარდა ერთიანებისა) ორი ფიბონაჩის რიცხვის ნამრავლი ან განაყოფი არ არის ფიბონაჩის რიცხვი .
- N ნატურალური რიცხვი არის ფიბონაჩის რიცხვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $5N^2+4$ ან $5N^2-4$ არის რაიმე ნატურალური რიცხვის კვადრატი.

ბინეს მიერ მიღებული ფორმულა, რომელიც ცხადი სახით გამოსახავს f_n-ის მნიშვნელობას როგორც n-ის ფუნქციას, წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$f_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n}{\sqrt5}=\frac{\phi^n-(-\phi)^{-n}}{\phi-(-\phi)^{-1}}=\frac{\phi^n-(-\phi)^{-n}}{2\phi-1}$$

სადაც $\phi=\frac{1+\sqrt5}{2}$ – არის რიცხვი რომელიც კავშირშია ოქროს კვეთასთან. ბინეს ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $n\geq 0$-სთვის, f_n არის $\frac{\phi^n}{\sqrt5}$-ის მთელი მიახლოება, ანუ $f_n=\left[\frac{\phi^n}{\sqrt5}\right]$. კერძოდ, როდესაც $n\to\infty$, ჭეშმარიტია ასიმპტოტიკა $f_n\sim\frac{\phi^n}{\sqrt5}$.

ბინეს ფორმულა შეიძლება ანალიზურად გაგრძელებადი იყოს შემდეგნაირად:

$$f_z = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^z - \frac{\cos \pi z}{\phi^z}\right).$$

ამ დროს თანადობა $f_{z+2} = f_{z+1} + f_z$ სამართლიანია ნებისმიერი კომპლექსური z. რიცხვისთვის

ფიბონაჩის რიცხვები და ოქროს კვეთა. ოქროს კვეთა (ოქროს პროპორცია) – არის მთელის ისეთი გაყოფა ორ ერთმანეთის არატოლ ნაწილად, როდესაც დიდი ნაწილი ისე შეეფარდება მთელს, როგორც მცირე ნაწილი დიდს. ოქროს კვეთის φ მიახლოებითი მნიშვნელობა უდრის 1,6180339887 ანუ მთელის პროცენტულ დაყოფას მიახლოებით აქვს სახე: 62% და 38% .

ერთი შეხედვით თითქოს არაა გამოკვეთილი კავშირი ფიბონაჩის რიცხვებსა და ოქროს კვეთას შორის, მაგრამ თუ ფიბონაჩის მიმდევრობის ნებისმიერ რიცხვს გავყოფთ მის წინა მდებარე რიცხვზე, აღმოვაჩენთ ძალზე საინტერესო თვისებას: განაყოფის მნიშვნელობა მერყეობს 1,6180339887 რიცხვის მახლობლობაში, ანუ ფიბონაჩის მეზობელი რიცხვების შეფარდებები მიისწრაფვიან φ-სკენ: $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$. ამავე დროს φ და $(-\varphi) = 1 - \varphi$ არიან $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ მახასიათებელი განტოლების ფესვები.

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}6180339887...$$

და

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}6180339887...$$

რადგან φ-ირაციონალური ალგებრული რიცხვი არის, კვადრატული $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ განტოლების დადებითი ამონახსნი, ამიტომ

$$\varphi^2 = \varphi + 1,$$

$$\varphi(\varphi - 1) = 1,$$

$$\varphi = \frac{1}{\varphi} + 1.$$

φ – გამოისახება ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით:

$$\phi = 2\cos\frac{\pi}{5} = 2\cos 36^0,$$

$$\phi = 2\sin(3\pi/10) = 2\sin 54^0.$$

φ – წარმოდგინდება კვადრატული ფესვების უსასრულო ჯაჭვის სახით:

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+....}}}}.$$

φ – წარმოდგინდება უსასრულო ჯაჭვური წილადით

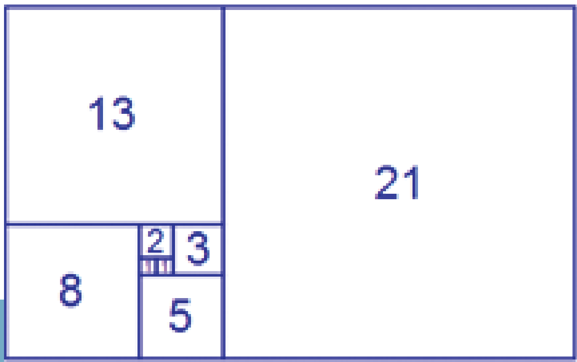
$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}},$$

φ–ს გამოსახვა შეიძლება უსასრულო მწკრივით:

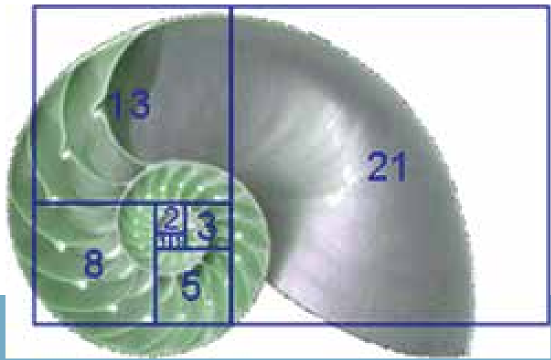
$$\phi = \frac{13}{8} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}(2n+1)!}{(n+2)!n!4^{(2n+3)}}.$$

ოქროს კვეთას აქვს თვალისათვის სასიამოვნო გეომეტრია. აღმოჩნდა, რომ φ რიცხვი უკვე დიდი ხნის წინათ იყო ცნობილი. ამ რიცხვის გამოყენებით ძველ ეგვიპტეში შენდებოდა პირამიდები, ძველი ბერძნები აღმართავდნენ თავიანთ ტაძრებს. ბუნება ბევრგან იყენებს ოქროს კვეთის პროპორციებს: მცენარეთა აგებულებაში, მზესუმზირებში, ლოკოკინის ნიჟარაში, დნმ-ის ჯაჭვში, ატომის სტრუქტურებში.

ნახაზზე ნაჩვენებია ოქროს მართკუთხედების საშუალებით მიღებული ოქროს სპირალი. ნაუტილუსის ნიჟარაში ყველა სპირალის დიამეტრის შეფარდება მომდევნოსთან უდრის φ-ს.



ნახ. 1



ნახ. 2

ამ სპირალის კანონით მრავლდებიან ბაქტერიები, ახვევს თავის ბუდეს ობობა, ამ სპირალის შესაბამისად ფორმირდება ჩვეულებრივი ნიჟარის ლოკოკინა, გირჩის აგებულება, ეხვევა ზღვის ტალღა, ეხვევა ცხოველების რქები, განლაგდება ყვავილის ფოთლები და მზესუმზირის მარცვლები.

ფიბონაჩის რიცხვები და მცენარეები. მზესუმზირის მარცვლები სპირალურადაა განლაგებული საათის ისრის და მისი საწინააღმდეგო მიმართულებით. შესაბამისად სპირალების რაოდენობა ყოველ მიმართულებაში ყოველთვის ფიბონაჩის რიცხვების მიმდევრობაა. ყოველი წრის დიამეტრის შეფარდება მომდევნოსთან უდრის 1,618–ს.

სხვადასხვა სპირალთა წყვილები გვხვდება : მზესუმზირის პატარა თავებში 13 და 21, 21 და 34, დიდ თავებში 34 და 55, 55 და 89.

ნახ. 3

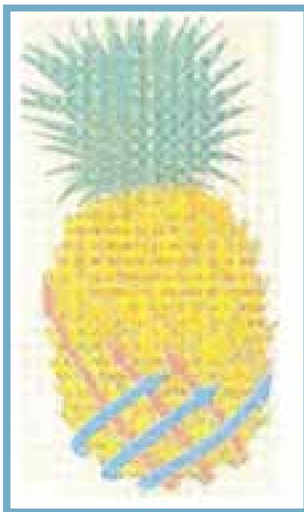
ნახ.4

ამდაგვარად არის ანანასშიც: 8 მარჯვენა, 13 მარცხენა და 21 ვერტიკალური მიმართულების სპირალი.

ნაძვის გირჩებს თუ კარგად დავაკვირდებით, შეიძლება შევნიშნოთ ორი სპირალი, ერთი ჩახვეულია საათის ისრის მიმართულებით, მეორე კი საათის ისრის მიმართულების საწინააღმდეგოდ. ამ სპირალების რაოდენობა არის 8 და 13. (ნახ. 7-8)

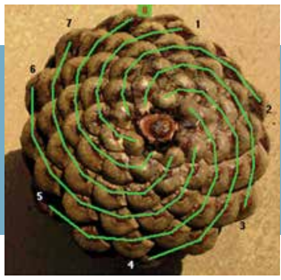
პატარა ზომის გირჩისათვის სპირალების რაოდენობაა 5 და 8. (ნახ. 9-10)

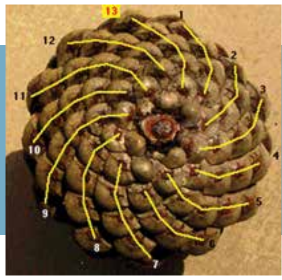
თქვენ შეიძლება შეხვდეთ გირჩას რომლის სპირალების რაოდენობა არ შეესაბამება ფიბონაჩის რიცხვებს ერთ ან ორივე მიმართებულების შემთხვევაში. ამის მიზეზი შეიძლება იყოს დეფორმაცია, გამოწვეული მისი დავადებით ან მავნებლებით.

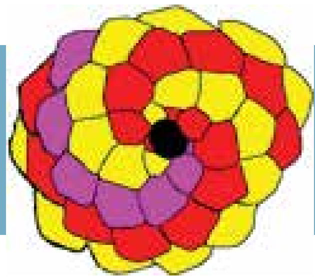

ნახ. 5

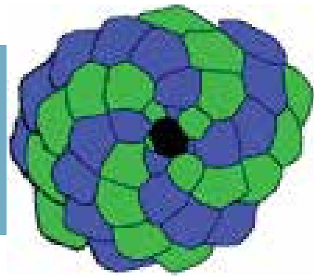

ნახ. 6

ყვავილოვანი კომბოსტოს შემთხვევაში, ვხედავთ ცენტრს სადაც პატარა ყვავილებია, თუ დავაკვირდებით, ყვავილები წარმოქმნიან სპირალს ცენტრის გარშემო ორივე მიმართულებით. სურათზე ნაჩვენებია წითელი და ლურჯი ხაზებით ორივე მიმართებულების სპირალები: 5 და 8 რაოდენობის. (ნახ. 11-12)


ნახ. 7

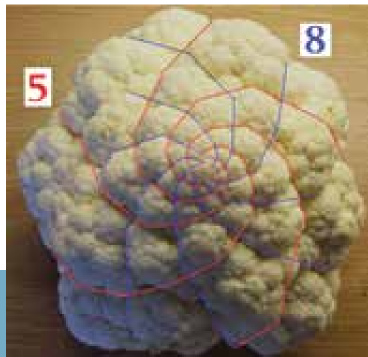

ნახ. 8


ნახ. 9

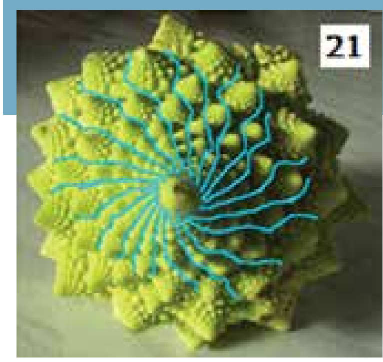

ნახ. 10

ბროკოლის შემთხვევაშიც გვაქვს სპირალების რაოდენობა ფიბონაჩის მიმდევრობიდან. სპირალი, საათის ისრის მიმართულებით 13 -ია, ხოლო სპირალი, საათის ისრის მიმართულების საწინააღმდეგოდ არის 21. (ნახ. 13-15)


ნახ. 11



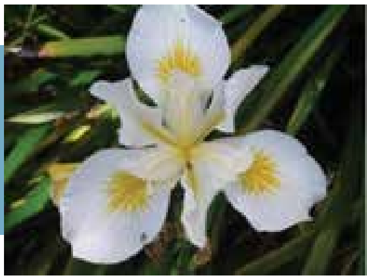
ნახ. 12



ნახ. 13

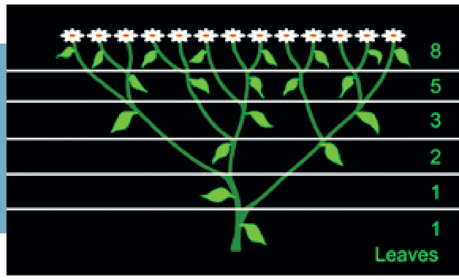
ნახ. 14


ნახ. 15



ნახ. 16. ირის აქვს 3 ფურცელი

ნახ. 17. პრიმულას გააჩნია 5 ფურცელი



ნახ. 19. ასფურცელა

ბევრი მცენარის ყვავილის ფურცლების რაოდენობა ფიბონაჩის რიცხვებია.

მრავალფეროვანი მცენარეების სტრუქტურაშიც ვლინდება ოქროს კვეთა. (ნახ. 16-17)

ფიბონაჩის რიცხვებთან შეხვედრა შეიძლება ასფურცელა ყვავილის ღეროებშიც. სურათზე ასფურცელა ყვავილის ყოველი ახალი ტოტი იზრდება უბიდან და ახალი ტოტიდან იზრდება კიდევ ახალი ტოტები. თუ შევაჯამებთ ძველ და ახალ ტოტებს, შეიძლება მივიღოთ ფიბონაჩის რიცხვები ყოველ ჰორიზონტალურ სიბრტყეში. (ნახ. 19)

მაგრამ ფიბონაჩის რიცხვები ყოველთვის არ გვხვდება მცენარეებში. მაგალითად, ფუკსიებში ოთხი ჯამის ფოთოლი და ოთხი ფურცელია. ზოგჯერ ტკბილ წიწაკაშიც გვხვდება არა სამი არამედ ოთხი დანაყოფი – კამერა. (ნახ. 20-21)

აქ ზოგიერთ ყვავილს აქვს ექვსი ფურცელი. (ნახ. 22-23)

განსაკუთრებით იშვიათობაა ოთხ ფურცლიანი მცენარეები, უფრო გავრცელებული შემთხვევაა სამ და ხუთ ფურცლიანი მცენარეები.

აქ, სიკულენტს აქვს ოთხი სპირალი ერთი მიმართულებით და შვიდი საწინააღმდეგო მიმართულებით. აქვე მეორე შემთხვევაა თერთმეტი და თვრამეტი სპირალებით. ეხინოკაქტუსს ოცდაცხრა წიბო აქვს. (ნახ. 22-24)

ფიბონაჩის რიცხვები და ცხოველები. ოქროს კვეთა აღიარებულია ცოცხალი სისტემების უნივერსალურ კანონად. მაგალითად, ფუტკრების სკაში მდედრების და მამრების რაოდენობა

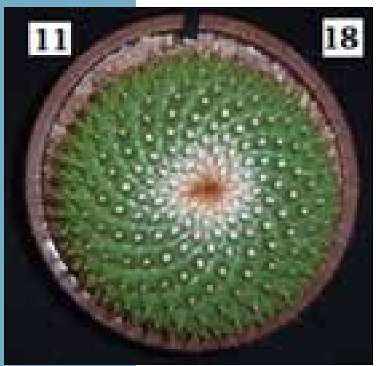
ნახ. 20. ფუკსიები

ნახ. 21. ტკბილი წიწაკები

ნახ. 22. ზაფრანა

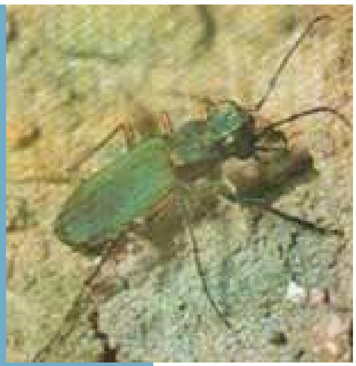
ნახ. 23. ნარცისი

ნახ. 23. ამარილისი



ნახ. 22-23. სიკულენტი

ნახ. 24. ეხინოკაკტუსი



ნახ. 25

ნახ. 26

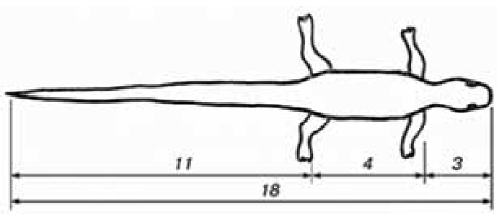
ნახ. 27

ყოველთვის დაბალანსებულია, მდედრი ფუტკრები რაოდენობრივად სჭარბობენ მამრებს, მაგრამ თუ მდედრების რაოდენობას გავყოფთ მამრი ფუტკრებისაზე, შედეგად მივიღებთ 1,618-ს. (ნახ. 25-27)

მთელი ცხოველთა სამყაროსათვის დამახასიათებელია ფორმების სიმეტრია და ორგანოების წყვილის არსებობა, დაყოფა სხეულის სამ ნაწილად (თავი, მკერდი, მუცელი), კიდურების დაყოფა 3 და 5 ნაწილზე, მუცლის-3 ნაწილზე. ეს არის დამახასიათებელი თვისება მწერების მორფოლოგიისათვის. ბევრი პეპელასთვის თანაფარდობა გულმკერდის ზომისა, სხეულის მუცლის ნაწილის ზომასთან აკმაყოფილებს ოქროს პროპორციას.

ბევრ მწერს (მაგალითად, პეპლებს, ნემსიყლაპიებს) ჰორიზონტალურ ჭრილში აქვთ ასიმეტრიული ფორმები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ოქროს კვეთას. ძალიან სრულყოფილია ნემსიყლაპიას ფორმა, იგი შექმნილია ოქროს პროპორციის კანონის მიხედვით: შეფარდება კუდის სიგრძისა კორპუსის სიგრძესთან უდრის შეფარდებას საერთო სიგრძისა კუდის სიგრძეზე.

ერთი შეხედვით ხვლიკშიც შეიძლება დავიჭიროთ ჩვენი თვალისთვის სასიამოვნო პროპორციები.

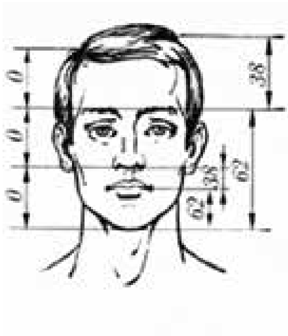


ნახ. 28. ფიბონაჩის რიცხვები ბუნებაში – ხვლიკი

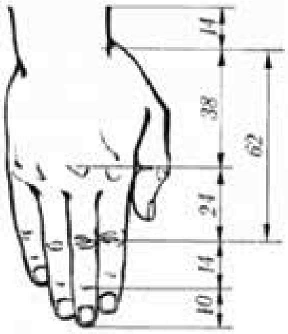
ფიბონაჩის რიცხვები და ოქროს კვეთა ადამიანში. ლეონარდო და ვინჩიმ, ადამიანის ჩონჩხის დეტალური შესწავლის შემდეგ «ღვთაებრივი პროპორცია» თავის «ვიტარიუსის მამაკაცში» გამოსახა. მანძილი თავის წვეროდან იატაკამდე, რომ გავყოთ მანძილზე ჭიპიდან იატაკამდე, იქნება 1,618. ასეთივე პროპორციითაა განლაგებული სხვა ნაწილებიც.

ოქროს კვეთის მკვლევარმა, ცეიზინგმა, 1855 წ. გამოაქვეყნა შრომა „ესთეტიკური გამოკვლევები“. ცეიზინგმა გაზომა ორ ათასზე მეტი ადამიანის სხეული და დაასკვნა, რომ საშუალო სტატისტიკურ კანონს გამოხატავს ოქროს კვეთა.

ადამიანის სხეულის ნაწილებში ოქროს პროპორციები.



ნახ. 29



ნახ. 30

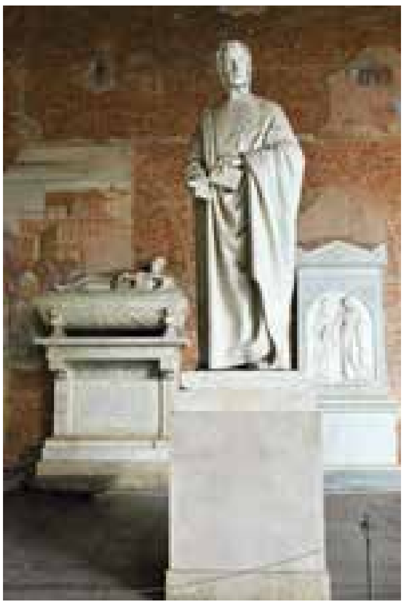
აქედან ჩანს, თუ როგორ აისახება ფიბონაჩის რიცხვები ადამიანის პროპორციებში. სურათებზე ვხედავთ, რომ ჩვენი ბუნებაც პროპორციულია და ეს შესაბამისობები შეიძლება გამოისახოს ფიბონაჩის მიმდევრობით.

დასკვნა. ფიბონაჩი არ იყო ეზოთერიკოსი. ის უბრალოდ ხსნიდა ჩვეულებრივ ამოცანას კურდღლებზე და დაწერა რიცხვთა მიმდევრობა, რაც გამომდინარეობდა მისი ამოცანიდან, თუ რამდენი კურდღელი იქნებოდა გამრავლების შემდეგ პირველ, მეორე და სხვა თვეებში. ერთი წლის მანძილზე მან მიიღო ეს მიმდევრობა. ის არ აკეთებდა თანაფარდობას. არანაირ ოქროს პროპორციაზე, ღვთაებრივ თანაფარდობაზე არ იყო საუბარი. ეს ყველაფერი დაიწერა აღორძინების ეპოქაში.

ფიბონაჩის მიმდევრობა კარგად იყო ცნობილი ძველ ინდოეთში, ბევრად უფრო ადრე ვიდრე ევროპაში. დასავლეთში ეს მიმდევრობა იყო გამოკვლეული ლეონარდო ფიბონაჩის მიერ.

ფიბონაჩის უაღრესად დიდი წვლილი აქვს შეტანილი მათემატიკაში. მისი ძირითადი შრომებია: „Liber Abaci“ (1202) — ტრაქტატი არითმეტიკასა (ინდური ციფრები, ფიბონაჩის რიცხვები) და ალგებრაზე (კვადრატულ განტოლებამდე შესაბამისად), „Practica Geometriae“ (1220). აღმოსავლეთში იგი გაეცნო არაბულ მათემატიკოსების მიღწევებს; ხელი შეუწყო მათ გავრცელებას დასავლეთში. შესწავლილი ჰქონდა მუჰამედ ბენ მუსა ალ- ხვარაზმისა და აბუ კამილის შრომები. ნაშრომმა „Liber Abaci“ ხელი შეუწყო ევროპაში რომაულზე უფრო სრულყოფილი ათობითი არითმეტიკული გამოთვლითი სისტემის გავრცელებას. რომაული თვლის სისტემა თვლისთვის იყო ძნელი და მოუხერხებელი. ათობითმა სისტემამ მაქსიმალურად გამოდევნა ხმარებიდან რომაული სისტემა და დასაბამი მისცა დიდ ევოლუციას მათემატიკასა და მასთან დაკავშირებულ მეცნიერებებში. XIX საუკუნეში ქალაქ პიზაში ფიბონაჩის დაუდგეს ძეგლი.

ელ-ფოსტა: nana.odishelidze@tsu.ge

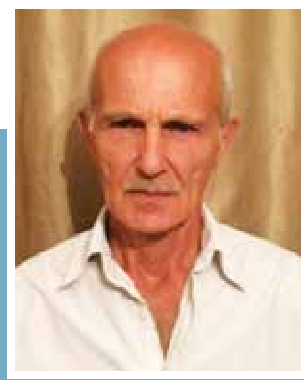


ნახ. 31. ფიბონაჩის ქანდაკება
პიაცა დე მირაკოლის მოედანზე
იტალიაში

ქართველი ავტორები

კვადრატული ველების არითმეტიკა

კვადრატული ველები უმარტივესი (რიცხვითი) ველებია რაციონალურ რიცხვთა ველის შემდეგ. კვადრატულ ველში გვაქვს "მთელი რიცხვები", რომლებიც იგივე როლს თამაშობენ რა როლსაც თამაშობენ ჩვეულებრივი მთელი რიცხვები რაციონალურ რიცხვთა ველში. გვაქვს "დაუყვანადი რიცხვის" ცნებაც, რაც მარტივი რიცხვის ანალოგს წარმოადგენს.
ერთერთი ყველაზე მნიშვნელოვანი დებულება რაციონალური რიცხვების შესახებ არის შემდეგი თეორემა, ე.წ., არითმეტიკის ძირითადი თეორემა:
ყოველი მთელი რაციონალური რიცხვი იშლება მარტივი რიცხვების ნამრავლად, და ეს დაშლა ერთადერთია გადანაცვლებამდე სიზუსტით.
ბუნებრივად ისმის კითხვა: აქვს თუ არა ადგილი მსგავს დებულებას კვადრატულ ველებში? ჩვენ ვნახავთ, რომ "მარტივ მამრავლებად" დაშლა შესაძლებელია ყოველ კვადრატულ ველში. რაც შეეხება ერთადერთობას, ვითარება უფრო რთულადაა. არის კვადრატული ველები სადაც "მარტივ მამრავლებად" დაშლა ერთადერთია და არის მაგალითები სადაც ეს ერთადერთობა ირღვევა.



ვახტანგ ლომაძე

მათემატიკის დეპარტამენტი,
ივანე ჯავახიშვილის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

შესავალი

რიცხვითი ველი ჰქვია კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლის ნებისმიერ ისეთ K ქვესიმრავლეს რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$x, y \in K \Rightarrow x \pm y \in K, x, y \in K \Rightarrow xy \in K,$$
$$1 \in K, x \in K \text{ და } x \neq 0 \Rightarrow 1/x \in K.$$

რიცხვითი ველის პირველი მაგალითია რაციონალურ რიცხვთა ველი, რომელსაც აღნიშნავენ $\mathbb{Q}$ სიმბოლოთი.

ადვილი დასანახია, რომ ნებისმიერი რიცხვითი ველი აუცილებლად შეიცავს რაციონალურ რიცხვთა ველს. ანუ, $\mathbb{Q}$ არის უმცირესი რიცხვითი ველი. კვადრატული ველები – ეს ყველაზე პატარა რიცხვითი ველებია რაციონალურ რიცხვთა ველის შემდეგ. ზუსტი განსაზღვრება ასეთია. K რიცხვით ველს ჰქვია კვადრატული, თუ მისი განზომილება, როგორც ვექტორული სივრცისა რაციონალურ რიცხვთა ველის მიმართ, არის ორის ტოლი. ანუ, K რიცხვით ველს ჰქვია კვადრატული, თუ იგი $\neq \mathbb{Q}$ და შეიცავს ისეთ x ელემენტს, რომ ყოველი მისი ელემენტი $a + bx$ სახით შეიძლება ჩაიწეროს, სადაც a და b რაციონალური რიცხვებია. შევნიშნოთ, რომ თუ ერთი მაინც ასეთი x მოიძებნება, იგივე თვისება ექნება K-ს ნებისმიერ სხვა ელემენტს რომელიც არ ძევს $\mathbb{Q}$-ში.

ნებისმიერი ნამდვილი d რიცხვისთვის, $\sqrt{d}$ სიმბოლო აღნიშნავს დადებით კვადრატულ ფესვს d-დან თუ ეს უკანასკნელი დადებითია; თუკი d უარყოფითია, მაშინ $\sqrt{d} = i\sqrt{-d}$.

თუ d არის რაციონალური რიცხვი, რომელიც არ წარმოადგენს რაციონალური რიცხვის კვადრატს, $\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$ სიმბოლოთი ავღნიშნოთ სიმრავლე $a + b\sqrt{d}$ სახის რიცხვებისა, სადაც a და b რაციონ-

ალურია. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს არის რიცხვითი ველი. რა თქმა უნდა, ეს კვადრატული ველია.

შევახსენებთ, რომ მთელ რიცხვთა რგოლს აღნიშნავენ $\mathbb{Z}$ სიმბოლოთი. შევახსენებთ კიდევ, რომ კვადრატისგან თავისუფალ რიცხვში გულისხმობენ 0-სა და 1-გან განსხვავებულ მთელ რიცხვს რომელიც არ იყოფა მარტივი რიცხვის კვადრატზე.

ვთქვათ K არის კვადრატული ველი. ავიღოთ ნებისმიერი $x \in K \backslash \mathbb{Q}$. შეგვიძლია დავწეროთ:

$x^2 = ax + b$, სადაც a, b რაციონალური რიცხვებია და $b \neq 0$. თუ გავითვალისწინებთ

$$x^2 - ax - b = (x - a/2)^2 - (a^2/4 + b)$$

იგივეობას, დავასკვნით, რომ $K = \mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$, სადაც

$$d = a^2/4 + b.$$

წარმოვადგინოთ $d = p / q$, სადაც $p, q \in \mathbb{Z}$ და $q > 0$. რადგან $\sqrt{d} = \sqrt{pq} / q$, K შეიძლება მიღებულ იქნას რაციონალურ რიცხვთა ველისგან $\sqrt{pq}$-ის მიერთებით. ასე რომ, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ d არის მთელი რიცხვი. და ბოლოს, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ რომ d თავისუფალია კვადრატისგან. მართლაც, თუ $d = e^2 f$, მაშინ $\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right] = \mathbb{Q}\left[\sqrt{f}\right]$.

ამრიგად, ყოველ კვადრატულ K ველს აქვს ფორმა $\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$, სადაც d არის კვადრატისგან თავისუფალი მთელი რიცხვი.

პირუკუ, ვთქვათ d არის კვადრატისგან თავისუფალი მთელი რიცხვი. როგორც $\sqrt{2}$ რიცხვის ირაციონალურობა მტკიცდება, ზუსტად იმავე წესით მტკიცდება, რომ $\sqrt{d}$ ირაციონალურია. ასე რომ, $\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$ განსხვავებულია რაციონალურ რიცხვთა ველისგან და წარმოადგენს კვადრატულ ველს.

უნდა აღინიშნოს, რომ $\mathbb{Q}\left[\sqrt{d_1}\right] \neq \mathbb{Q}\left[\sqrt{d_2}\right]$, როცა $d_1 \neq d_2$. მართლაც, თუ $\sqrt{d_2} = a + b\sqrt{d_1}$ რაციონალური a, b რიცხვებით, მაშინ $d_2 = a^2 + b^2 d_1 + 2ab\sqrt{d_1}$ და ვინაიდან $\sqrt{d_1}$ ირაციონალურია, ჩვენ ვასკვნით, რომ ან $a = 0$ ან $b = 0$. პირველ შემთხვევაში გვექნება

$d_2 = b^2 d_1$, რაც ნიშნავს რომ ერთერთი d_1 და d_2 რიცხვებიდან არაა კვადრატისგან თავისუფალი; მეორე შემთხვევაში, $\sqrt{d_1} = a$, რაც იმას ნიშნავს რომ $\sqrt{d_1}$ რაციონალური რიცხვია.

ამრიგად, გვაქვს ურთიერთცალსახა თანადობა კვადრატისგან თავისუფალ მთელ რიცხვებსა და კვადრატულ ველებს შორის:

$$d \leftrightarrow \mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right].$$

d-ს უარყოფითი მნიშვნელობებია:

$$-1, -2, -3, -5, -6, -7, -10, \ldots;$$

ხოლო დადებითი მნიშვნელობებია:

$$2, 3, 5, 6, 7, 10, \ldots.$$

იტყვიან რომ $\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$ წარმოსახვითი კვადრატული ველია ან ნამდვილი კვადრატული ველი იმის და მიხედვით უარყოფითია თუ დადებითი d.

შეუღლება, კვალი და ნორმა

კვადრატულ ველში გვაქვს შეუღლების ოპერაცია, რაც კომპლექსური შეუღლების ანალოგს წარმოადგენს.

ვთქვათ $K = \mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$ არის კვადრატული ველი. თუ $\alpha = x + y\sqrt{d} \in K$, მისი შეუღლებული განისაზღვრება ფორმულით

$$\overline{\alpha} = x - y\sqrt{d}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ შეუღლების ოპერაცია აკმაყოფილებს შემდეგ თვისებებს:

$$\overline{\alpha \pm \beta} = \overline{\alpha} \pm \overline{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}, \quad \overline{1} = 1.$$

შენიშვნა. გალუას თეორიის ენაზე, ეს ნიშნავს, რომ ასახვა $\alpha \to \overline{\alpha}$ არის K ველის ავტომორფიზმი. იგი ერთადერთი არატრივიალური ელემენტია გალუას $Gal(K/\mathbb{Q})$ ჯგუფისა.

შეუღლების ოპერაცია აკმაყოფილებს კიდევ შემდეგ თვისებებს:

$$\overline{\overline{\alpha}} = \alpha, \; \alpha = \overline{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Q}.$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$\alpha + \overline{\alpha} = 2x \text{ და } \alpha\overline{\alpha} = x^2 - dy^2,$$

სადაც $\alpha = x + y\sqrt{d}$.

კერძოდ, ჩვენ ვხედავთ, რომ ყოველი a-თვის, $\alpha + \overline{\alpha}$ და $\alpha\overline{\alpha}$ რაციონალური რიცხვებია.

განსაზღვრება. ვთქვათ $\alpha \in K$. რიცხვებს, განსაზღვრულთ შემდეგი ფორმულებით

$$\mathrm{Tr}(\alpha) = \alpha + \overline{\alpha} \text{ და } \mathrm{Nm}(\alpha) = \alpha\overline{\alpha}$$

შესაბამისად ჰქვია α-ს კვალი და ნორმა.

ამრიგად, გვაქვს ფუნქციები

$$\mathrm{Tr} : K \to \mathbb{Q} \text{ და } \mathrm{Nm} : K \to \mathbb{Q}.$$

ორივე ეს ფუნქცია ძალიან მნიშვნელოვანია. შევნიშნოთ, რომ თუ $q \in \mathbb{Q}$, მაშინ $\mathrm{Tr}(q) = 2q$ და $\mathrm{Nm}(q) = q^2$.

შემდეგი თეორემა ამბობს, რომ კვალს აქვს ადიციურობის თვისება და ნორმას მულტიპლიკაციურობის თვისება.

თეორემა 3.1 Tr არის ადიციური ფუნქცია, Nm კი მულტიპლიკაციური. ანუ

$$\mathrm{Tr}(\alpha + \beta) = \mathrm{Tr}(\alpha) + \mathrm{Tr}(\beta) \text{ და } \mathrm{Nm}(\alpha\beta) = \mathrm{Nm}(\alpha)\mathrm{Nm}(\beta).$$

დამტკიცება: უშუალოა და ადვილი.

ყოველი $\alpha \in K$ არის ფესვი უნიტარული კვადრატული პოლინომისა რაციონალური კოეფიციენტებით. მართლაც, ადგილი აქვს ტოლობას:

$$(s - \alpha)(s - \overline{\alpha}) = s^2 - (\alpha + \overline{\alpha})s + \alpha\overline{\alpha} =$$
$$= s^2 + \mathrm{Tr}(\alpha)s + \mathrm{Nm}(\alpha).$$

ამ პოლინომს ჰქვია მინიმალური პოლინომი.

მთელი ელემენტები კვადრატულ ველში

ბუნებრივია დავინტერესდეთ კვადრატული ველის იმ ელემენტებით, რომელთა მინიმალურ პოლინომებს აქვთ მთელი კოეფიციენტები.

ვთქვათ $K = \mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$ არის კვადრატული ველი.

განსაზღვრება. ელემენტი $\alpha \in K$ იწოდება მთელ ელემენტად თუ მის მინიმალურ პოლინომს აქვს მთელი კოეფიციენტები. ანუ, α არის K-ს მთელი ელემენტი თუ მისი კვალი და ნორმა მთელი რიცხვებია. K ველის მთელ ელემენტთა სიმრავლე ავღნიშნოთ O_K სიმბოლოთი.

მაგალითი. ცხადია, რომ $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \subseteq O_K$. სამწუხაროდ, ტოლობას ყოველთვის არა აქვს ადგილი. თუ, მაგალითად, $d \equiv 1 \bmod 4$, მაშინ $(1 + \sqrt{d})/2$ არ ძევს $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$-ში; მიუხედავად ამისა, იგი მთელი ელემენტია, ვინაიდან

$$\frac{1+\sqrt{d}}{2} + \frac{1-\sqrt{d}}{2} = 1 \text{ და } \frac{1+\sqrt{d}}{2}\ \frac{1-\sqrt{d}}{2} = \frac{1-d}{4}.$$

რადგან d თავისუფალია კვადრატისგან, ის არ იყოფა 4-ზე. ასე რომ შესაძლებელია სამი

შემთხვევა: $d \equiv 1 \bmod 4$, $d \equiv 2 \bmod 4$, $d \equiv 3 \bmod 4$.

განვსაზღვროთ ω შემდეგი ფორმულით:

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{d} & \text{თუ } d \equiv 2,3 \bmod 4 \\ \dfrac{\left(1+\sqrt{d}\right)}{2} & \text{თუ } d \equiv 1 \bmod 4 \end{cases}$$

ამ რიცხვის მეშვეობით ადვილად აღიწერება მთელ ელემენტთა სიმრავლე. სახელდობრ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4.1 $O_K = \mathbb{Z}[\omega]$, ანუ $O_K = \{a + b\omega | a, b \in \mathbb{Z}\}$.

დამტკიცება: ის, რომ $\mathbb{Z}[\omega] \subseteq O_K$ ადვილი საჩვენებელია. პირუკუ, ვაჩვენოთ, რომ ყოველ მთელ ელემენტს K-ში აქვს სახე $a + b\omega$, სადაც a, b მთელი რიცხვებია. ავიღოთ მთელი ელემენტი $x = a + b\sqrt{d}$. გვექნება: $2a \in \mathbb{Z}$ და $a^2 - db^2 \in \mathbb{Z}$. პირველი პირობა ნიშნავს, რომ a ან ჩვეულებრივი მთელია ან კენტი რიცხვის ნახევარი.

თუ $a \in \mathbb{Z}$, მაშინ $a^2 \in \mathbb{Z}$, და მაშასადამე $db^2 \in \mathbb{Z}$. მაშინ $b \in \mathbb{Z}$, რადგან d თავისუფალია კვადრატისგან. აქედან უკვე გამომდინარეობს, რომ x ელემენტს აქვს საჭირო ფორმა:

$$x = a + b\omega \text{ თუ } d \equiv 2,3 \bmod 4, \text{ ან}$$
$$x = (a - b) + 2b\omega \text{ თუ } d \equiv 1 \bmod 4.$$

თუ a არის კენტი რიცხვის ნახევარი, შეგვიძლია დავწეროთ $a = m/2$, სადაც m კენტია. მაშინ

x-ის ნორმა არის $a^2 - db^2 = m^2/4 - db^2$, და მისი 4-ზე გამრავლებით ვღებულობთ $m^2 - 4db^2 \in \mathbb{Z}$. აქედან, $4db^2 \in \mathbb{Z}$. რადგან d კვადრატისგან თავისუფალია, ვღებულობთ: $2b \in \mathbb{Z}$. ასე, რომ ან $b \in \mathbb{Z}$ ან $b \in \mathbb{Z} + 1/2$. პირველ შემთხვევაში, ვღებულობთ, რომ $m^2 - 4db^2$ არის კენტი (შეგახსენებთ, რომ m კენტია). მაგრამ ეს ეწინაარმდეგება იმას რომ $a^2 - db^2 = m^2/4 - db^2 \in \mathbb{Z}$. ამიტომ $b \in \mathbb{Z} + 1/2$, და შეგვიძლია დავწეროთ $b = n/2$, სადაც n კენტი რიცხვია. გვექნება $x = a + b\sqrt{d} = m/2 + n/2\sqrt{d} = (m + n)/2 + n\omega$.

შედეგი 4.1 K ველის მთელ ელემენტები ქმნიან რგოლს; ანუ,

$$x, y \in O_K \Rightarrow x \pm y \in O_K,$$
$$x, y \in O_K \Rightarrow xy \in O_K,\ 1 \in O_K.$$

შენიშვნა. კვადრატული ველის მთელ ელემენტთა აღწერა პირველად მიღებულ იქნა დედეკინდის (*Dedekind*) მიერ 1871 წელს.

პოლინომს ჰქვია უნიტარული თუ მისი უფროსი კოეფიციენტი ერთის ტოლია. განსაზღვრების თანახმად, ყოველი მთელი ელემენტი არის ფესვი უნიტარული მთელ რაციონალურ კოეფიციენტებიანი პოლინომისა. შემდეგი თეორემა საკმაოდ საინტერესოა. მაგრამ ჩვენ მას არ დავამტკიცებთ, ვინაიდან არ დაგვჭირდება.

თეორემა 4.2 თუ ელემენტი $\alpha \in K$ არის ფესვი რაიმე უნიტარული პოლინომისა მთელი რაციონალური კოეფიციენტებით, იგი მთელია.

ლემა 4.1 ვთქვათ $m \in \mathbb{Z}$ და $\alpha = a + b\omega \in \mathbb{Z}[\omega]$ მაშინ

$$m \mid \alpha \Leftrightarrow m \mid a \text{ და } m \mid b.$$

დამტკიცება: თუ $m \mid a$ და $m \mid b$, ცხადია $m \mid \alpha$. პირუკუ, თუ $m \mid \alpha$, მაშინ $a + b\omega = m(a_1 + b_1\omega)$, სადაც a_1 და b_1 ჩვეულებრივი მთელი რიცხვებია. ასე რომ, $a = ma_1$ და $b = mb_1$.

თეორემა 4.3 სამართლიანია ტოლობა

$$O_K \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}.$$

დამტკიცება: K ველის ნებისმიერი მთელი ელემენტი ჩაიწერება $a + b\omega$ სახით, სადაც $a, b \in \mathbb{Z}$. ვიცით, რომ ω არ არის რაციონალური რიცხვი. ამიტომ, თუ $a + b\omega \in \mathbb{Q}$, მაშინ $b = 0$. მაშასადამე, $a + b\omega = a \in \mathbb{Z}$.

თეორემა 4.3 გვეუბნება, რომ რაციონალური რიცხვი მხოლოდ მაშინ არის მთელი ელემენტი კვადრატულ ველში როცა იგი ჩვეულებრივი მთელია.

წინადადება 4.1 მთელი ელემენტის შეუღლებული მთელია.

დამტკიცება: ეს ცხადია, რადგან ელემენტის შეუღლებულს იგივე კვალი და ნორმა აქვს რაც მოცემულ ელემენტს.

ერთეულოვანი და დაუყვანადი მთელი ელემენტები

ერთეულოვანი ელემენტი ჰქვია ისეთ მთელ ელემენტს რომლის შებრუნებულიც ასევე მთელია. სხვა სიტყვებით, ერთეულოვანი ელემენტები – ეს 1-ის გამყოფებია.

მაგალითი. i არის $\mathbb{Q}[i]$ ველის ერთეულოვანი ელემენტი, რადგან მისი შებრუნებული $-i$ მთელია. ასევე, $1 + \sqrt{2}$ არის ერთეულოვანი ელემენტი $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ველში, რადგან მისი შებრუნებული $-1 + \sqrt{2}$ მთელია.

ავღნიშნოთ U_K სიმბოლოთი K ველის ერთეულოვან ელემენტთა ჯგუფი.

ჩვენ უკვე ავღნიშნეთ, რომ Tr და Nm ძალიან მნიშვნელოვანი ფუნქციებია. ჩვენს შემთხვევაში, უფრო სასარგებლო როლს თამაშობს Nm. (ვინაიდან "მულტიპლიკაციური" საკითხით ვართ დაინტერესებული). კერძოდ, იგი გამოიყენება შემდეგ ორ თეორემაში.

თეორემა 5.1 ყოველი კვადრატული K ველისთვის,

$$U_K = \{\alpha \in O_K \mid \mathrm{Nm}(\alpha) = \pm 1\}.$$

დამტკიცება: ვთქვათ, $\alpha \in O_K$. თუ α არის ერთეულოვანი, მაშინ $\alpha\beta = 1$, სადაც $\beta \in O_K$. ორივე მხარის ნორმას თუ ავიღებთ, მივიღებთ

$\mathrm{Nm}(\alpha)\mathrm{Nm}(\beta) = \mathrm{Nm}(1)$. აქედან, $\mathrm{Nm}(\alpha) = \pm 1$. პირუკუ, დავუშვათ, რომ $\mathrm{Nm}(a) = \pm 1$.

ეს ნიშნავს იმას, რომ $a\overline{\alpha} = \pm 1$. მაშასადამე, $\pm\alpha$ არის α-ს შებრუნებული, და იგი ძევს O_K-ში.

ორ x და y მთელ ელემენტზე იტყვიან, რომ არიან ასოცირებულნი თუ $y = ux$ რომელიღაც ერ-

თეულოვანი u ელემენტისთვის. ცხადია, ასოცირებულობის მიმართება არის ექვივალენტობის მიმართება.

ამბობენ, რომ არანულოვანი ელემენტი $\alpha \in O_K$ დაუყვანადია თუ α არ არის ერთეულოვანი და დაშლა $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, სადაც α_1, $\alpha_2 \in O_K$, შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში როცა ან α_1 ან α_2 ერთეულოვანი ელემენტია.

თეორემა 5.2 ვთქვათ, $\alpha \in O_K$. თუ α ელემენტის ნორმა არის მარტივი რიცხვი, მაშინ იგი არის დაუყვანადი.

დამტკიცება: დავუშვათ, რომ $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, სადაც α_1, $\alpha_2 \in O_K$. ავიღოთ ორივე მხარის ნორმა. მივიღებთ $\mathrm{Nm}(\alpha) = \mathrm{Nm}(\alpha_1)\mathrm{Nm}(\alpha_2)$.

რადგან $\mathrm{Nm}(\alpha)$ მარტივი რიცხვია, ან $\mathrm{Nm}(\alpha_1)$ უნდა იყოს ± 1 ან $\mathrm{Nm}(\alpha_2)$. მაშასადამე, ან α_1 უნდა იყოს ერთეულოვანი ელემენტი ან α_2. ამრიგად, α-ს არ გააჩნია არატრივიალური დაშლა O_K რგოლში. ანუ, იგი დაუყვანადია.

მაგალითი. $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-14}\right]$ რგოლში $3+\sqrt{-14}$ რიცხვს აქვს 23-ის ტოლი ნორმა, და მაშასადამე იგი დაუყვანადია.

თეორემა 5.2 იძლევა დაუყვანადობის მხოლოდ საკმარის პირობას. ეს პირობა არ არის აუცილებელი, როგორც ამას შემდეგი მაგალითი გვიჩვენებს.

მაგალითი. განვიხილოთ $3 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{-14}\right]$. მისი ნორმა $\mathrm{Nm}(3) = 9$ არ არის მარტივი რიცხვი, მაგრამ იგი დაუყვანადია $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-14}\right]$ რგოლში. მართლაც, თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ ყოველი მთელი ელემენტის ნორმა არის $a^2 + 14b^2$ სახის დადებითი მთელი რიცხვი. დავუშვათ, რომ $3 = \alpha\beta$, სადაც α და β არაერთეულოვანი მთელი ელემენტებია $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-14}\right]$ რგოლში. ორივე მხარის ნორმის აღებისას ვღებულობთ: $9 = \mathrm{Nm}(\alpha)\,\mathrm{Nm}(\beta)$. ვინაიდან α და β არ არიან ერთეულოვანი ელემენტები, მათი ნორმები არ არის 1-ის ტოლი. ეს ნორმები არც 3-ის ტოლი შეიძლება იყოს ვინაიდან განტოლებას $3 = a^2 + 14b^2$ არა აქვს ამოხსნა მთელ რიცხვებში (და მაშასადამე საერთოდ არ არსებობს ელემენტი ნორმით 3).

ზუსტად ასევე შეიძლება იმის ჩვენება, რომ 5 არის დაუყვანადი მთელი ელემენტი $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-14}\right]$ რგოლში, თუმც მისი ნორმა $\mathrm{Nm}(5) = 25$ არ არის მარტივი რიცხვი.

ჩვენ ახლა ვაჩვენებთ, რომ დაუყვანადი დაშლა ყოველთვის არსებობს.

თეორემა 5.3 ყოველი არანულოვანი და არაერთეულოვანი ელემენტი $\alpha \in O_K$ არის დაუყვანადი ელემენტების ნამრავლი:

$$\alpha = \pi_1 \dots \pi_r.$$

დამტკიცება: გამოვიყენოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი. თუ $|\mathrm{Nm}(\alpha)| = 2$, მაშინ α დაუყვანადია თეორემა 5.2-ის ძალით, და დებულება სამართლიანია. ვთქვათ

$|\mathrm{Nm}(\alpha)| = n \geq 3$ და დავუშვათ, რომ ყოველი მთელი ელემენტი ნორმით $\leq n-1$ იშლება დაუყვანადი მთელი ელემენტების ნამრავლად.

თუ α დაუყვანადია, მაშინ არაფერია დასამტკიცებელი. თუ α არ არის დაუყვანადი, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, სადაც α_1 და α_2 არაა ერთეულოვანი ელემენტები. რიცხვები $|\mathrm{Nm}(\alpha_1)|$ და $|\mathrm{Nm}(\alpha_2)|$ ნაკლებია n-ზე, ასე რომ, ინდუქციური დაშვებით, α_1 და α_2 არიან დაუყვანადი მთელი ელემენტების ნამრავლები. გამოდის, რომ α არის დაუყვანადი მთელი ელემენტების ნამრავლი.

ევკლიდეს ალგორითმი და ცალსახა დაშლა

ის რომ მთელ რაციონალურ რიცხვთა რგოლში მარტივ მამრავლებად დაშლა ცალსახაა, გამომდინარეობს თეორემიდან ნაშთით გაყოფის შესახებ. ეს თეორემა ამტკიცებს, რომ ყოველი a და $b \neq 0$ მთელი რიცხვებისთვის მოიძებნება ისეთი q და r მთელი რიცხვები, რომ $a = bq + r$ და $|r| < |b|$. თუ რაიმე რგოლში ადგილი აქვს მსგავს თეორემას, მაშინ ისევე როგორც $\mathbb{Z}$-ის შემთხვევაში შესაძლებელია დაუყვანად მამრავლებად დაშლის ერთადაერთობის დამტკიცება.

ვიტყვით, რომ R არის ევკლიდეს რგოლი თუ იგი აღჭურვილია ევკლიდეს ნორმით, ანუ ფუნქციით $\mathrm{N}: \mathrm{R}\backslash 0 \to \mathbb{Z}_+$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას: ყოველი $a \in R$ და $b \in R\backslash 0$ ელემენტებისთვის მოიძებნება $q, r \in R$ ისეთი, რომ $a = bq + r$ და $\mathrm{N}(r) < \mathrm{N}(b)$.

თეორემა 6.1 d იყოს ერთერთი შემდეგ რიცხვთაგანი: $-1, -2, -3, -7, -11$, და $\mathrm{K} = \mathbb{Q}[d]$. მაშინ O_K (ნორმასთან ერთად) არის ევკლიდეს რგოლი,

და მაშასადამე ცალსახა დაშლის არე.

დამტკიცება: ჩვენ განვიხილავთ $d = -1$ შემთხვევას, ანუ გაუსის მთელი რიცხვების შემთხვევას. (ყველა სხვა შემთხვევა ანალოგიურია).

ვთქვათ, x და $y \neq 0$ ორი გაუსის მთელი რიცხვია. განვსაზღვროთ რაციონალური u და v რიცხვები ტოლობით

$$x / y = u + vi.$$

შევარჩიოთ მათთან უახლესი მთელი რაციონალური რიცხვები m და n. გვექნება

$$|u - m| \leq 1/2, \qquad |v - n| \leq 1/2.$$

განვიხილოთ ახლა რიცხვები $q = m + ni$ და $r = x - yq$. შევნიშნოთ, რომ

$$\mathrm{Nm}(x/y - q) = (u - m)^2 + (v - n)^2 \leq 1/4 + 1/4 < 1.$$

ამ უტოლობის გათვალისწინებით, ვღებულობთ

$$\mathrm{Nm}(r) = \mathrm{Nm}(x/y - q)\ \mathrm{Nm}(y) < \mathrm{Nm}(y).$$

ეს კი ამტკიცებს დებულებას.

შენიშვნა. ევკლიდურობის თვისება არ არის აუცილებელი ცალსახა დაშლისთვის. არსებობს ისეთი რგოლები, რომლებიც არ არიან ევკლიდური მაგრამ წარმოადგენენ ცალსახა დაშლის არეებს.

შემდეგი თეორემა არის ძალიან ღრმა, და მის დამტკიცებას ჩვენ არ მოვიყვანთ. იგი იძლევა მთელ სიას იმ წარმოსახვითი კვადრატული ველებისა, სადაც ადგილი აქვს ცალსახა დაშლას.

თეორემა 6.2 (Gauss-Baker-Stark) ვთვათ d არის კვადრატისგან თავისუფალი უარყოფითი მთელი რიცხვი, და $K = \mathbb{Q}[d]$. მაშინ O_K არის ცალსახა დაშლის არე მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა d ერთ-ერთი შემდეგ რიცხვთაგანია

$$-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163.$$

შენიშვნა. თეორემის საკმარისი ნაწილი დაამტკიცა გაუსმა, ანუ მან აჩვენა, რომ d-ს ზემოთ აღნიშნული მნიშვნელობებისთვის O_K ცალსახა დაშლის არეა. საინტერესოა აღინიშნოს, რომ მანვე გამოთქვა ჰიპოთეზა სხვა ასეთი d-ს არარსებობის შესახებ. ბევრად უფრო ძნელი ნაწილი თეორემისა დამტკიცდა 150 წლის შემდეგ, 1966 წელს, ბეიკერისა (Baker) და სტარკის (Stark) მიერ. გვინდა კიდევ ავღნიშნოთ, რომ, როცა $d = -19, -43, -67, -163$, O_K არ არის ევკლიდური რგოლი.

ახლა, რაც შეეხება ნამდვილ კვადრატულ ველებს. უნდა აღინიშნოს, რომ ეს შემთხვევა არაა სრულად შესწავლილი. ცნობილია, რომ არსებობს d-ს მხოლოდ თექვსმეტი დადებითი მნიშვნელობა, რომელთათვის გვაქვს ევკლიდეს ალგორითმი. ეს რიცხვებია

$$2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57, 73.$$

არის კიდევ ოცდაორი ისეთი $d < 100$, რომელთათვის გვაქვს ცალსახა დაშლა, თუმც არა გვაქვს ევკლიდეს ალგორითმი. ესენია

$$14, 22, 23, 31, 38, 43, 46, 47, 53, 59, 61,$$
$$62, 67, 69, 71, 77, 83, 86, 89, 93, 94, 97.$$

შენიშვნა. არაა ჯერ კიდევ ცნობილი თუნდაც ის, რომ უსასრულოა თუ არა რიცხვი d-ს იმ მნიშვნელობებისა, რომელთა შესაბამის კვადრატულ ველებში ადგილი აქვს ცალსახა დაშლას.

თავის დასასრულს ავღნიშნავთ, რომ ნამდვილ კვადრატულ ველს გააჩნია ერთეულოვანი ელემენტების უსასრულო რაოდენობა. ეს ფაქტი არ არის ცხადი. ამით ისინი დიდად განსხვავდებიან წარმოსახვითი კვადრატული ველებისგან, სადაც ერთეულოვანი ელემენტთა რაოდენობა სასრულია. ერთეულოვანი ელემენტები $K = \mathbb{Q}[d]$ ველში, სადაც $d > 0$, ეს მთელი წერტილებია შემდეგ ორ ჰიპერბოლაზე:

$$x^2 - dy^2 = 1 \text{ და } x^2 + dy^2 = 1.$$

არაცალსახა დაშლის მაგალითები

ჩვენ ვნახეთ მაგალითები კვადარტული ველისა, სადაც ადგილი აქვს დაუყვანად მამრავლებად ცალსახა დაშლას. ძალიან ადვილია საპირისპირო ხასიათის მაგალითების მოყვანა. ბევრია მაგალითი ისეთი კვადრატული ველისა, სადაც მარტივ მამრავლებად დაშლა არ არის ერთადერთი.

აი რამდენიმე მარტივი მაგალითი.

მაგალითი. $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-14}\right]$ რგოლში რიცხვი 15 იშლება ორგვარად:

$$15 = 3 \cdot 5 \text{ და } 15 = (1 + \sqrt{-14})\,(1 - \sqrt{-14}).$$

თანახმად მე-5 თავის მაგალითებისა, ეს დაუყვანადი დაშლებია. არცერთი მამრავლი ერთ დაშლაში არ არის ასოცირებული მეორე დაშლის მამრავლთან. ეს იმიტომ რომ $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-14}\right]$ რგოლ ში მხოლოდ ორი ერთეულოვანი ელემენტია: 1 და –1. გვინდა ავღნიშნოთ, რომ დაუყვანადი ელემენტი 3 ყოფს $(1 + \sqrt{-14})\,(1 - \sqrt{-14})$ ნამრავლს, მაგრამ იგი არ ყოფს არც ერთ მამრავლს. (როგორც ეს კარგად არის ცნობილი, მსგავსი რამ არ ხდება მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}$ რგოლში: თუ მარტივი რიცხვი p ყოფს ორი მთელი რიცხვის ნამრავლს, იგი აუცილებლად ყოფს ერთერთ თანამამრავლს მაინც.)

შემდეგი მაგალითი არაცალსახა დაშლისა უფრო საინტერესოა.

მაგალითი. $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-14}\right]$ რგოლში რიცხვი 27 იშლება ორგვარად

$$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \text{ და } 27 = (5 + 2\sqrt{-14})(5 - 2\sqrt{-14}).$$

დაუყვანადი მამრავლების რიცხვი ამ ორ დაშლაში სხვადასხვაა, და სწორედ ამით არის ეს მაგალითი საინტერესო. იმის დასანახად, რომ 5 + 2 $\sqrt{-14}$ დაუყვანადია $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-14}\right]$-ში, დავუშვათ, რომ მას აქვს საკუთრივი არა-ერთეულოვანი მამრავლი. მაშინ ამ მამრავლს ექნებოდა ნორმა რომელიც იქნებოდა $\mathrm{Nm}(5 + 2\sqrt{-14}) = 81$ რიცხვის საკუთრივი გამყოფი, ანუ ის იქნებოდა 3, 9, ან 27. არცერთ ელემენტს არა აქვს 3-ის ან 27-ის ტოლი ნორმა, და 9 ნორმის მქონე ელემენტებია მხოლოდ 3 და -3. მაგრამ არც 3 და არც -3 არ არიან $(5 + 2\sqrt{-14})$-ის გამყოფები. ანალოგიურად შეიძლება იმის ჩვენება, რომ $5 - 2\sqrt{-14}$ დაუყვანადია.

მაგალითი. $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ რგოლში გვაქვს შემდეგი ორი დაშლა:

$$21 = 3 \cdot 7 \text{ და } 21 = (1 + 2\left[\sqrt{-5}\right])(1 - 2\left[\sqrt{-5}\right]).$$

დავუშვათ, რომ 3 დაყვანადი ელემენტია, და ვთქვათ $3 = xy$, სადაც x და y არაა ერთეულოვანი. ტოლობა $9 = \mathrm{Nm}(xy)$, გვაძლევს: $9 = \mathrm{Nm}(x)\mathrm{Nm}(y)$. აქედან, ვღებულობთ, რომ $\mathrm{Nm}(x) = 3$. მაგრამ ეს შეუძლებელია, ვინაიდან $x^2 + 5y^2 = 3$ განტოლებას არა აქვს მთელი ამონახსნები. მსგავსად მტკიცდება, რომ რიცხვები 7, $(1 + 2\sqrt{-5})$, $(1 - 2\sqrt{-5})$ დაუყვანადია. ვინაიდან $\frac{(1+2\sqrt{-5})}{3}$, $\frac{(1-2\sqrt{-5})}{3}$, $\frac{(1+2\sqrt{-5})}{7}$, $\frac{(1+2\sqrt{-5})}{7}$ წილადები არ ეკუთვნის $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ რგოლს, საქმე გვაქვს არსებითად ორ სხვადასხვა დაშლასთან.

მაგალითი. $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ რგოლში გვაქვს შემდეგი ორი დაშლა

$$6 = 2 \cdot 3 \text{ და } 6 = (1 + \sqrt{-5})\,(1 - \sqrt{-5}).$$

მკითხველს ვუტოვებთ, შეამოწმოს, რომ ეს ორი დაშლა დაუყვანადი დაშლაა და რომ ისინი არსებითად განსხვავდებიან.

შენიშვნა. გერმანელმა მათემატიკოსებმა კუმერმა (Kummer) და დედეკინდმა (Dedekind) განაზოგადეს რიცხვის ცნება და ააგეს თეორიები, სადაც მარტივ მამრავლებად დაშლა ყოველთვის ცალსახაა. კუმერი თავის გამოგონებულ რიცხვებს უწოდებდა იდეალურ რიცხვებს; დღეს კი მათ ჰქვია დივიზორები. დედეკინდის მიერ განზოგადებულ რიცხვებს ჰქვია იდეალები. ორივე ეს ცნება, როგორც დივიზორის ასევე იდეალის, უაღრესად მნიშვნელოვანია ალგებრულ გეომეტრიასა და კომუტაციურ ალგებრაში.

მარტივი ელემენტები გაუსის მთელ რიცხვთა რგოლში

თეორემა 5.2 აღწერს დაუყვანადი მთელი ელემენტების მხოლოდ ნაწილს. საინტერესოა დავახასიათოთ ყველა დაუყვანადი მთელი ელემენტი.

ამ ამოცანას ჩვენ აქ შევისწავლით მხოლოდ გაუსის კვადრატული ველის შემთხვევაში. გაუსის კვადრატული ველი ჰქვია $\mathbb{Q}[i]$ ველს.

ლემა 8.1 (*a*) ვთქვათ p არის ჩვეულებრივი მარტივი რიცხვი. მაშინ, p ან თვითონ არის გაუსის მარტივი რიცხვი ან არის ნამრავლი ორი ერმანეთის შეუღლებული გაუსის მარტივი რიცხვისა.

(*b*) ვთქვათ π არის გაუსის მარტივი რიცხვი. მა-

შინ, მისი ნორმა $\mathrm{Nm}(\pi)$ არის ან მარტივი რიცხვი ან მარტივი რიცხვის კვადრატი.

დამტკიცება: (a) არსებობს გაუსის მარტივი ელემენტი π რომელიც ყოფს p რიცხვს, და მაშასადამე $\mathbb{Z}[i]$ რგოლში p იშლება ნამრავლად $p = \pi\lambda$, სადაც λ გაუსის მთელი რიცხვია. აქედან $\mathrm{Nm}(\pi)\mathrm{Nm}(\lambda) = p^2$, და არის ორი შესაძლებლობა:

1) $\mathrm{Nm}(\lambda) = 1$. ვღებულობთ, რომ λ არის ერთეულოვანი ელემენტი, და მაშასადამე p, როგორც ასოცირებული π-თან, არის გაუსის მარტივი რიცხვი.

2) $\mathrm{Nm}(\lambda) = p$. ვღებულობთ, რომ $p = \mathrm{Nm}(\pi) = \pi\overline{\pi}$.

(b) ვთქვათ π არის გაუსის მარტივი რიცხვი. მაშინ $\pi\overline{\pi}$ არის დადებითი მთელი რიცხვი, და ვთქვათ $\pi\overline{\pi} = n$. დავშალოთ n მარტივ მამრავლებად მთელ რიცხვთა რგოლში. ეს იქნება ამავე დროს დაშლა გაუსის მთელ რიცხვებში (თუმცა არა, აუცილებლად, მარტივ მამრავლებად). რადგან π არის გაუსის მარტივი რიცხვია, იგი ყოფს n-ს გაუსის მთელ რიცხვთა რგოლში. მაშასადამე, იგი ყოფს n რიცხვის ერთერთ მარტივ მამრავლს. ამრიგად, მოიძებნება მარტივი რიცხვი p რომელიც იყოფა π -ზე. მაშინ $\mathrm{Nm}(\pi)$ არის მთელი გამყოფი p^2-ისა, და მაშასადამე $\mathrm{Nm}(\pi)$ არის ან p-ს ტოლი ან p^2-ის.

ლემა 8.2 (ფერმას თეორემა ორი კვადრატის შესახებ) ვთქვათ, p არის მარტივი მთელი რიცხვი. მაშინ, p არის ორი მთელი რიცხვის კვადრატის ჯამი $\Leftrightarrow p = 2$ ან $p \equiv 1 \ mod \ 4$.

დამტკიცება: $\Rightarrow$ ვთქვათ p არის ორი კვადრატის ჯამი. ვინაიდან ყოველი კვადრატი კონგრუენტულია 0-ის ან 1-ის (mod 4), p კონგრუენტული იქნება ან 0-ის ან 1-ის და ან 2-ის (mod 4). ვინაიდან p მარტივია, იგი შეიძლება იყოს ან 2-ის ტოლი ან კიდევ 1-ის კონგრუენტული (mod 4).

$\Leftarrow$ თუ $p = 2$, მაშინ არაფერია დასამტკიცებელი: $2 = 1^2 + 1^2$.

ვთქვათ ახლა, $p \equiv 1 \ mod \ 4$. მაშინ -1 არის კვადრატული ნაშთი $mod \ p$, და მაშასადამე მოიძებნება მთელი რაციონალური რიცხვი x ისეთი, რომ $x^2 = (x + i)(x - i)$ იყოფა p-ზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ p ვერ იქნება გაუსის მარტივი რიცხვი, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში იგი გაყოფდა $(x + i)$ და $(x - i)$ რიცხვებიდან ერთერთს, მაგრამ არც $x/p + i/p$ და არც $x/p - i/p$ არ არის გაუსის მთელი რიცხვი. ლემა (a)-ს ძალით, p არის ნორმა გაუსის მარტივი რიცხვისა.

შედეგი 8.1 ვთქვათ, p არის მარტივი მთელი რიცხვი. მაშინ, p არის გაუსის მარტივი რიცხვი $\Leftrightarrow$ $p \equiv 3 \ mod \ 4$.

თეორემა 8.1 არის ორი ტიპის გაუსის მარტივი რიცხვები:

1) $\pm p$ და $\pm pi$ სახის რიცხვები, სადაც p არის ჩვეულებრივი მარტივი რიცხვი ისეთი, რომ $p \equiv 3 \ mod \ 4$.

2) $a + bi$ სახის რიცხვები, სადაც a, b მთელი რიცხვებია და $p = a^2 + b^2$ არის ან 2 ან მარტივი რიცხვი ისეთი, რომ $p \equiv 1 \ mod \ 4$.

დამტკიცება: ვთქვათ p არის მარტივი რიცხვი და ვთქვათ $p \equiv 3 \ mod \ 4$. შედეგი 8.1-ის თანახმად, p უნდა იყოს გაუსის მარტივი რიცხვი. რიცხვები p, $-p$, pi, $-pi$ ასევე იქნებიან მარტივი, ვინაიდან ასოცირებულნი არიან p-თან. ახლა, ვთქვათ $\pi = a + bi$ არის გაუსის მთელი რიცხვი და ვთქვათ $p = a^2 + b^2$ არის ან 2 ან მარტივი რიცხვი ისეთი, რომ $p \equiv 1 \ mod \ 4$. ორივე შემთხვევაში, თეორემა 5.2-ის ძალით, π არის მარტივი ელემენტი.

პირუკუ, ვთქვათ $\pi = a + bi$ არის გაუსის ნებისმიერი მარტივი რიცხვი. ლემა 8.1(ბ)-ს ძალით, არის ორი შესაძლებლობა:

ა) $\mathrm{Nm}(\pi) = p^2$, სადაც p მარტივი რიცხვია. ვხედავთ, რომ π ყოფს p-ს, ანუ p/π არის გაუსის მთელი რიცხვი. რადგან $\mathrm{Nm}(p/\pi) = 1$, გამოდის, რომ p/π არის ერთეულოვანი ელემენტი. ამრიგად, π და p ასოცირებული ელემენტებია. ვღებულობთ, რომ p გაუსის მარტივი რიცხვია, და მაშასადამე, შედეგი 8.1-ის ძალით, $p \equiv 3 \ mod \ 4$.

ბ) $\mathrm{Nm}(\pi) = p$, სადაც p მარტივი რიცხვია. ფერმას თეორემის ძალით, $p = 2$ ან $p \equiv 1 \ mod \ 4$.

გამოყენებული ლიტერატურა:

M. Artin, Algebra, Prentice-Hall, New Jersey, 1991.

A. Baker, A Concise Introduction to the Theory of Numbers, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

Z. I. Borevich and I. R. Shafarevich, Number Theory, Academic Press, New York, 1986.

გეომეტრიული გარდაქმნები სიბრტყეზე და კომპლექსური რიცხვები

რუსლან სურმანიძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასისტენტ პროფესორი. ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

წარმოსახვითი რიცხვების გამოყენება პირველად XVI საუკუნეში იტალიელმა მათემატიკოსმა რაფაელ ბომბელიმ დაიწყო. კერძოდ, კუბური განტოლების ამოხსნის დროს, როცა განტოლების ნამდვილი ფესვები უარყოფითი რიცხვებიდან კვადრატული ფესვის სახით გამოისახებოდა. წარმოსახვითი სიდიდის ჩასაწერად სიმბოლო $i=\sqrt{-1}$ *პირველად ლ. ეილერმა გამოიყენა (1777 წ. სიტყვა imaginarius-ის საწყისი სიმბოლო). ტერმინი "კომპლექსური რიცხვი" კი პირველად კ. ფ. გაუსმა შემოიღო (1799 წ). თანამედროვე სახით კომპლექსური რიცხვები პირველად ნორვეგიელი მათემატიკოსის გასპარ ვესელისა (1799 წ) და შვეიცარიელი თვითნასწავლი მათემატიკოსის ჟან-რობერტ არგანის (1806 წ) შრომებში ჩნდება. კომპლექსურ რიცხვთა მწყობრი არითმეტიკული თეორიის აგება ინგლისელმა მათემატიკოსმა უ. ჰამილტონმა დაასრულა (1837 წ).*

კომპლექსური რიცხვი თანამედროვე მათემატიკის ერთ-ერთი ფუნდამენტური ცნებაა და დიდ როლს თამაშობს სხვადასხვა მათემატიკური თუ პრაქტიკული საკითხების გადაწყვეტის დროს. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორია თანამედროვე მათემატიკის დამოუკიდებელი დარგია, რომლის განვითარების საქმეში თავისი მნიშვნელოვანი წვლილი ქართველმა მათემატიკოსებმაც შეიტანეს. მუსხელიშვილისა და მისი სკოლის წარმომადგენლები იყვნენ ერთ-ერთი პირველები ვინც დაიწყეს კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის გამოყენება დრეკადობის თეორიაში. მათ მიერ შესწავლილი და დამუშავებულ იქნა, აგრეთვე, კოშის ტიპის ინტეგრალის სასაზღვრო თვისებები.

შესავალი

$z = a + bi$ სახის რიცხვს, სადაც a, b ნამდვილი რიცხვებია **კომპლექსური რიცხვი** ეწოდება. $i = \sqrt{-1}$ სიდიდეს, რომლის კვადრატიც მინუს ერთის ტოლია $i^2 = -1$ **წარმოსახვითი ერთეული ქვია**. a და b ნამდვილ რიცხვებს კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილი ეწოდება და, შესაბამისად, $a = \mathrm{Re}\, z$ და $b = \mathrm{Im}\, z$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ z კომპლექსური რიცხვი ჩაწერილია $z = a + bi$ **ალგებრული სახით**.

კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეზე განიმარტება შეკრებისა და გამრავლების ალგებრული ოპერაციები. კერძოდ, $z = a + bi$ და $w = c + di$ კომპლექსური რიცხვებისათვის:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$

და

$$z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

ასეთნაირად განმარტებული ოპერაციების მიმართ ეს სიმრავლე წარმოადგენს ალგებრულ სტრუქტურას, რომელსაც ველი ეწოდება. კომპლექსურ რიცხვთა ველი C სიმბოლოთი აღინიშნება.

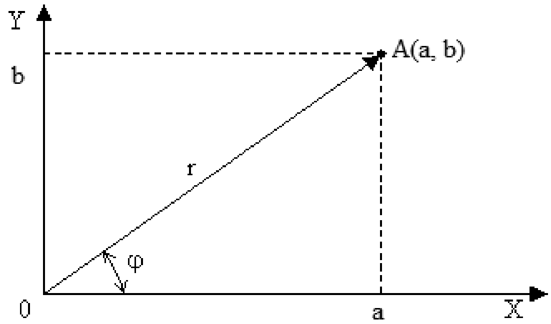
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ნამდვილ რიცხვს $z = a + b$ კომპლექსური რიცხვის **მოდული**, ხოლო $Argz = arctg\dfrac{b}{a} + 2\pi k,\ k \in Z$ სიდიდეს – არგუმენტი ეწოდება. არგუმენტის მნიშვნელობას, რომელიც $[-\pi,\ \pi)$ შუალედს ეკუთვნის z კომპლექსური რიცხვის მთავარი არგუმენტი ქვია და $\arg z$-ით აღინიშნება.

ორ კომპლექსურ რიცხვს ეწოდება ტოლი თუ მათი როგორც ნამდვილი ისე წარმოსახვითი ნაწილები ერთმანეთის ტოლია. კომპლექსური რიცხვი ნულის ტოლია, თუ მისი როგორც ნამდვილი ასევე წარმოსახვითი ნაწილები უდრის ნულს.

$z = a + bi$ კომპლექსური რიცხვისათვის განიმარტება მისი შეუღლებული კომპლექსური რიცხვი: $\bar{z} = a - bi$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ z და w კომპლექსური რიცხვებისათვის ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \text{ და } \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

ყოველი $z = a + bi$ კომპლექსურ რიცხვი ცალსახად განისაზღვრება ნამდვილ რიცხვთა $(a,\ b)$ დალაგებული წყვილით. ამიტომ კომპლექსური რიცხვების სიმრავლესა და საკოორდინატო სიბრტყის წერტილების სიმრავლეს შორის შეიძლება დავამყაროთ ურთიერთცალსახა თანადობა. ასეთ შემთხვევაში, ნებისმიერი $z = a + bi$ კომპლექსური რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ გეომეტრიულად – სიბრტყის წერტილის სახით, რომლის აბსცისაა a და ორდინატა b.



XOY დეკარტულ საკოორდინატო სიბრტყეს, რომლის ყოველ $A(a,b)$ წერტილს $z = a + bi$ კომპლექსური რიცხვი ეთანადება, კომპლექსური სიბრტყე ეწოდება. კომპლექსურ სიბრტყის OX საკოორდინატო ღერძს, რომელზეც კომპლექსური რიცხვების ნამდვილი ნაწილები გადაიზომება, ნამდვილი ღერძი, ხოლო OY ღერძს, რომელზეც გადაიზომება კომპლექსური რიცხვების წარმოსახვითი ნაწილები – წარმოსახვითი ღერძი ეწოდება.

$z = a + bi$ კომპლექსური რიცხვს ასევე შეიძლება შევუთანადოთ ამ რიცხვის შესაბამისი $A(a,b)$ წერტილის $\overline{OA} = (a,b)$ რადიუსვექტორი. ასეთ შემთხვევაში, $\overline{OA}$ ვექტორის r სიგრძე z კომპლექსური რიცხვის $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ მოდულის, ხოლო ვექტორის მიერ ნამდვილი ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი, საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულბით გადაზომილი, φ კუთხის სიდიდე z კომპლექსური რიცხვის მთავარი არგუმენტის ტოლია:

$$\varphi = \arg z = arctg\frac{b}{a}.$$

$z = a + bi$ კომპლექსური რიცხვს ამ რიცხვის შესაბამისი $A(a,b)$ წერტილის კომპლექსური კოორდინატი ვუწოდოთ და ეს ფაქტი ჩავწეროთ სახით $A(z)$.

ნებისმიერი $A(z_1)$ და $B(z_2)$ საწყისი და ბოლო წერტილების მქონე ვექტორისათვის გვაქვს: $\overrightarrow{AB} = z_2 - z_1$. თუ $A(z_1), B(z_2)$ ბოლოების მქონე მონაკვეთზე აღებული $C(z)$ წერტილისათვის ცნობილია, რომ $|AC| : |CB| = \lambda$, მაშინ $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$.

მართლაც, რადგანაც $|AC| : |CB| = \lambda$, ამიტომ $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$. მაგრამ

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = z - z_L \text{ და } \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = z_2 - z.$$

ამგვარად, $z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$, საიდანაც $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$. კერძოდ, როცა $C(z)$ მონაკვეთის შუა წერტილია, მაშინ $\lambda = 1$ და $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

გარდა ალგებრულისა განიხილება $z = a + bi$ კომპლექსური რიცხვის ჩაწერის ტრიგონომეტრიული ფორმა. კერძოდ, კომპლექსური რიცხვის მოდულისა და არგუმენტის განმარტებებიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$a = |z|\cos\arg z = r\cos\varphi \text{ და}$$
$$b = |z|\sin\arg z = r\sin\varphi.$$

თუ კომპლექსური რიცხვის ალგებრულ ფორმაში მოდულისა და არგუმენტის მნიშვნელობებს მიღებული გამოსახულებებით შევცვლით, გვექნება არანულოვანი z კომპლექსური რიცხვის ჩაწერის ე.წ. ტრიგონომეტრიულ ფორმა:

$$z = r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

კომპლექსური რიცხვების გამოყენებით მარტივად და ეფექტურად აღიწერება, ჩვენთვის კარგად ცნობილი, გეომეტრიული გარდაქმნები სიბრტყეზე.

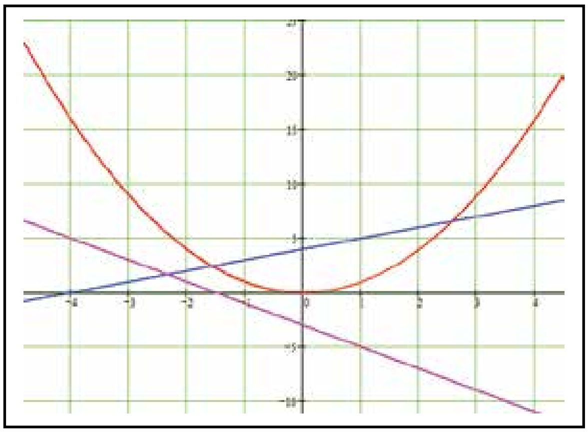
სიბრტყის თავისთავზე ურთიერთცალსახა ასახვას სიბრტყის გარდაქმნა ეწოდება. ამგვარად, სიბრტყის გარდაქმნა მოცემული სიბრტყის წერტილებს ამავე სიბრტყის წერტილებზე ასახავს. ტერმინი „გეომეტრიული გარდაქმნა“ მიგვანიშნებს იმაზე, რომ ამ დროს სიბრტყის გეომეტრიულ თვისება – მისი „ბრტყელობა“ – შენარჩუნებულია.

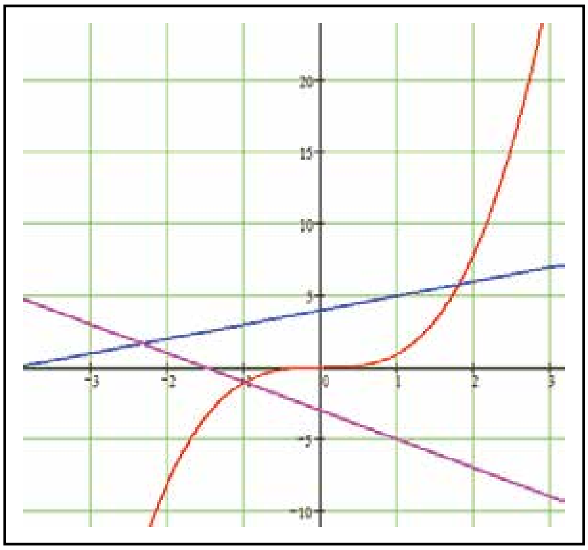
სიბრტყის S გარდაქმნას, რომლის დროსაც სიბრტყის ნებისმიერი ორი P და Q წერტილისა და ამ წერტილების $P'=S(P)$ და $Q'=S(Q)$ ანასახებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$P'Q' = PQ$$

სიბრტყის იზომეტრიული გარდაქმნა ანუ მოძრაობა ეწოდება. ამგვარად, მოძრაობა სიბრტყის ორ წერტილს შორის მანძილს არ ცვლის.

ქვემოთ შევეცდებით კომპლექსური რიცხვების გამოყენებით ცხადი სახით ჩავწეროთ სიბრტყის გარდაქმნები: ღერძული სიმეტრია, ცენტრული სიმეტრია, პარალელური გადატანა, მობრუნება და ჰომოთეტია.





ღერძული სიმეტრია

M და M' წერტილებს ეწოდებათ სიმეტრიულები l წრფის მიმართ, თუ ისინი l წრფის პერპენდიკულარულ წრფეზე არიან განლაგებულნი და

ამ წრფეთა გადაკვეთის წერტილი M' მონაკვეთს შუაზე ყოფს. თვით l წრფის წერტილები თავის თავის სიმეტრიულები არიან.

გარდაქმნას, რომლის დროსაც სიბრტყის ყოველ M წერტილს l წრფის მიმართ სიმეტრიული M' წერტილი ეთანადება ღერძული სიმეტრია ეწოდება. ამ შემთხვევაში, l წრფეზე მდებარე ყოველ წერტილს ისევ ეს წერტილი ეთანადება. l წრფეს სიმეტრიის ღერძი ეწოდება.

დავადგინოთ ნამდვილი ღერძის მიმართ $M(z)$ წერტილის სიმეტრიული M' წერტილის $z' = F(z)$ კომპლექსური კოორდინატი.

ვინაიდან OX ღერძის მიმართ სიმეტრიულ წერტილებს შეუღლებული კომპლექსური რიცხვები შეესაბამება, ამიტომ $z' = \bar{z}$. პირიქითაც, თუ M' წერტილის z' კომპლექსური კოორდინატი $\bar{z}$ -ის ტოლია, მაშინ $M(z)$ და $M'(z')$ წერტილები სიმეტრიულნი არიან ნამდვილი ღერძის მიმართ. ამგვარად, ნამდვილი ღერძის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნა ჩაიწერება სახით:

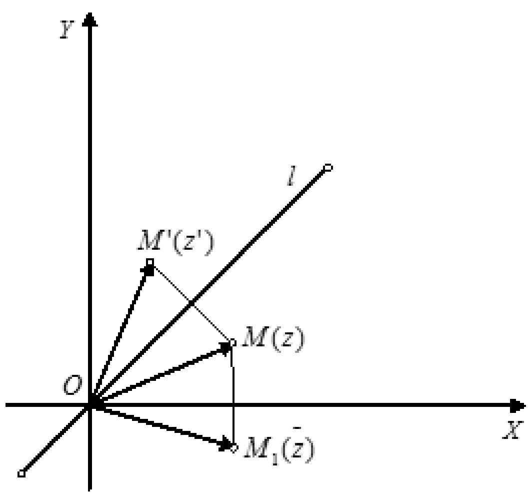
$$F(z) = \bar{z}.$$

კოორდინატთა სათავეზე გამავალი l ღერძის მიმართ სიმეტრიის $F(z)$ ასახვას აქვს სახე:

$$F(z) = \bar{z}(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi),$$

სადაც, φ არის კუთხე l წრფესა და ნამდვილ ღერძს შორის, გადაზომილი საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით. მართლაც,

$$|\vec{OM}| = |\vec{OM_1}| = |\vec{OM}'|$$



ამიტომ $\overline{OM}'$ ვექტორის მისაღებად საკმარისია $\overline{OM}_1$ ვექტორი მოვაბრუნოთ 2φ კუთხით საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით ანუ M' წერტილის კომპლექსური კოორდინატი მიიღება M_1 წერტილის $\bar{z}$ კომპლექსური კოორდინატის $\cos2\varphi + i\sin2\varphi$-ზე გამრავლებით.

შევნიშნოთ, რომ წარმოსახვითი ღერძის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნას ექნება სახე:

$$F(z) = -\bar{z}.$$

თეორემა. ღერძული სიმეტრია არის მოძრა-ობა.

დამტკიცება. ავაგოთ საკოორდინატო სისტემა ისე, რომ მისი აბსცისთა ღერძი l სიმეტრიის ღერძს ემთხვეოდეს. მაშინ განსახილველი გარდაქმნა იქნება სიმეტრია ნამდვილი ღერძის მიმართ და მოიცემა ფორმულით:

$$F(z) = \bar{z}.$$

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე AB მონაკვეთი, რომლის ბოლოებია $A(z_1)$ და $B(z_2)$ წერტილები. განხილული გარდაქმნით A და B წერტილები, შესაბამისად, $A'(z_1)$ და $B'(z_2)$ წერტილებზე აისახებიან. AB და $A'B'$ მონაკვეთების სიგრძეები მათი შესაბამისი $\vec{AB}$ და $\vec{A'B'}$ ვექტორების სიგრძეების ტოლია, ამიტომ

$$AB = |z_2 - z_1| \text{ და}$$
$$A'B' = |\bar{z}_2 - \bar{z}_1| = |\overline{z_2 - z_1}|.$$

მაგრამ, $|z_2 - z_1| = |\overline{z_2 - z_1}|$. თეორემა დამტკიცებულია.

ცენტრული სიმეტრია

M და M' წერტილებს ეწოდებათ სიმეტრიულები O წერტილის მიმართ, ანუ ცენტრულად სიმეტრიულები O ცენტრის მიმართ, თუ M' მონაკვეთი O წერტილზე გადის და O წერტილით შუაზე იყოფა.

გარდაქმნას, რომლის დროსაც O წერტილისაგან განსხვავებულ ყოველ M წერტილს O წერტილის მიმართ სიმეტრიული M' წერტილი ეთანადება ცენტრული სიმეტრია ეწოდება. ასეთ შემთხვევაში O წერტილს თავის თავი ეთანადება და მას სიმეტრიის ცენტრი ეწოდება.

განვიხილოთ სიბრტყეზე დეკარტეს საკოორდინატო სისტემა, სათავით O წერტილი. ამ საკოორდინატო სისტემაში O ცენტრის მიმართ სიმეტრიულ M და M' წერტილებს ექნებათ კოორდინატები $M(z)$ და $M'(-z)$. პირიქითაც, თუ M' წერტილის კომპლექსური კოორდინატი $(-z)$-ის ტოლია, მაშინ $M(z)$ და $M'(-z)$ წერტილები ცენტრულად სიმეტრიულები არიან კოორდინატთა სათავის მიმართ. ამგვარად, $O(0,0)$ სათავის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნა ჩაიწერება სახით:

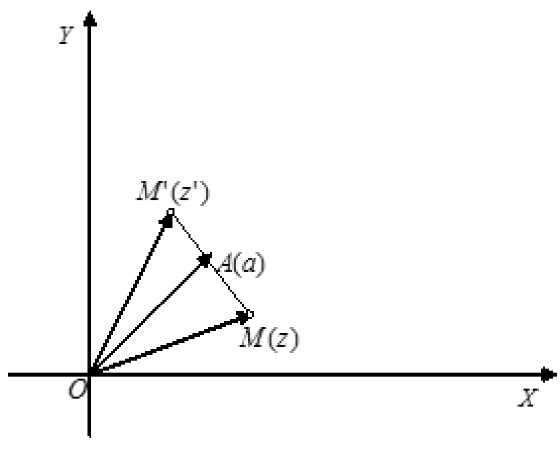
$$F(z) = -z\,.$$

$A(a)$ ცენტრის მიმართ ცენტრული სიმეტრიის $F(z)$ ასახვას ექნება სახე:

$$F(z) = 2a - z,$$

მართლაც, $A(a)$ წერტილი MM' მონაკვეთის შუა წერტილია, ამიტომ

$$a = \frac{z'+z}{2}.$$



საიდანაც $z' = F(z) = 2a - z$.

თეორემა. წერტილის მიმართ სიმეტრია წარმოადგენს მოძრაობას.

დამტკიცება. განვიხილოთ საკოორდინატო სისტემა, რომლის სათავეც სიმეტრიის ცენტრია. ვთქვათ, A' და B' წერტილები კოორდინატთა სათავის მიმართ, შესაბამისად, $A(z_1)$ და $B(z_2)$ წერტილების სიმეტრიულნი არიან, მაშინ $A'(-z_1)$ და $B'(-z_2)$. $\vec{AB}$ და $\vec{A'B'}$ ვექტორების შესაბამისი კომპლექსური რიცხვებია $z_2 - z_1$ და $-z_2 - (-z_1) = -(z_2 - z_1)$. მაგრამ, $|z_2 - z_1| = |-(z_2 - z_1)|$. ამრიგად, AB და $A'B'$ მონაკვეთების სიგრძეები ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია.

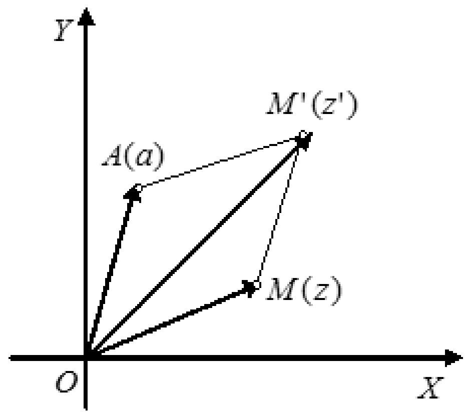
პარალელური გადატანა

სიბრტყის გარდაქმნას, რომლის დროსაც სიბრტყის ყოველი M წერტილი ისეთ M' წერტილზე აისახება, რომ $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OA}$, სადაც $\overrightarrow{OA}$ ამ სიბრტყეში მდებარე რაიმე არანულოვანი ვექტორია, პარალელური გადატანა ეწოდება.

ამგვარად, პარალელური გადატანის დროს სიბრტყის ყოველი წერტილი ამავე სიბრტყეზე ერთსა და იმავე მანძილზე ერთი და იგივე მიმართულებით გადადგილდება.

პარალელური გადატანისას $M(z)$ წერტილის შესაბამისი M' წერტილის z' კომპლექსური კოორდინატი გამოითვლება ფორმულით:

$$z' = z + a,$$



სადაც $a = \overrightarrow{OA}$. პირიქითაც, თუ M' წერტილის კომპლექსური კოორდინატია $z' = z + a$, მაშინ $M'(z')$ წერტილი $M(z)$ წერტილისაგან პარალელური გადატანით მიიღება.

თეორემა. სიბრტყის პარალელური გადატანა მოძრაობაა

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია AB მონაკვეთი, სადაც $A(z_1)$ და $B(z_2)$ მაშინ $|z_2 - z_1|$ არის AB მონაკვეთის სიგრძე.

$$F(z)=z+a$$

პარალელური გადატანა $A(z_1)$ და $B(z_2)$ წერტილებს $A'(z_1 + a)$ და $B'(z_2 + a)$ წერტილებზე ასახავს. ამიტომ $A'B'$ მონაკვეთის სიგრძე იქნება

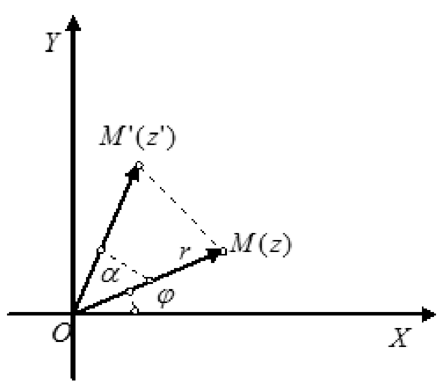
$$\left|(z_2+a)-(z_1+a)\right|=\left|z_2-z_1\right|.$$

როგორც ვხედავთ, $AB = A'B'$. თეორემა დამტკიცებულია.

მობრუნება

O წერტილის გარშემო, α კუთხეზე მობრუნება ეწოდება გარდაქმნას, რომელიც სიბრტყის ყოველ M წერტილს ამავე სიბრტყის ისეთ M' წერტილს შეუსაბამებს, რომ $OM = OM'$ და $\angle MOM' = \alpha$. ამ გარდაქმნის დროს O წერტილი თავის თავზე აისახება და მას მობრუნების ცენტრი ეწოდება. α კუთხეს – მობრუნების კუთხე ქვია.

განვიხილოთ საკოორდინატო სისტემა, რომლის O სათავე მობრუნების ცენტრია. დავუშვათ, ამ საკოორდინატო სისტემაში M წერტილის კომპლექსური კოორდინატია $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.



z კომპლექსური რიცხვისა და $\cos\alpha + i\sin\alpha$ კომპლექსური რიცხვის გამრავლებით მივიღებთ $r(\cos(\varphi + \alpha) + i\sin(\varphi + \alpha)$. ამრიგად, z რიცხვის $\cos\alpha + i\sin\alpha$ რიცხვზე გამრავლება განსაზღვრავს კოორდინატთა სათავის გარშემო z რიცხვის შესაბამისი $\overline{OM}$ ვექტორის მობრუნებას α კუთხით. მობრუნების შედეგად ვღებულობთ $\vec{OM}$ ვექტორს, სადაც $M'(z(\cos\alpha + i\sin\alpha))$. პირიქით, თუ M' წერტილის კომპლექსური კოორდინატია $z' = z\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, მაშინ M' წერტილი M წერტილისაგან კოორდინატთა სათავის გარშემო მისი α კუთხეზე მობრუნებით მიიღება.

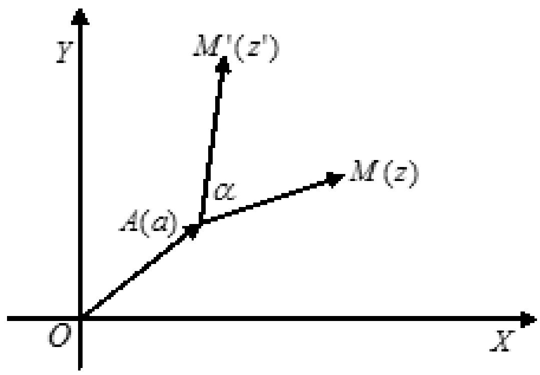
ამგვარად, კოორდინატთა სათავის გარშემო α კუთხეზე მობრუნებას განსაზღვრავს $F(z)$ გარდაქმნა, რომელიც ჩაიწერება სახით:

$$F(z)=z(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

ნებისმიერი $A(a)$ წერტილის გარშემო მობრუნების შესაბამისი გარდაქმნა ჩაიწერება სახით:

$$F(z)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(z-a)+a,$$

მართლაც, $\vec{AM}'=z'-a$.



მეორეს მხრივ, $\vec{AM}'=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(z-a)$, ამიტომ $z' = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(z - a) + a$.

თეორემა. რაიმე O ცენტრის გარშემო α კუთხეზე მობრუნება წარმოადგენს მოძრაობას

დამტკიცება. ვთქვათ, კოორდინატთა სისტემის O სათავე მობრუნების ცენტრია, α კი – მობრუნების კუთხე. ვთქვათ, $A(z_1)$ და $B(z_2)$ მოცემული წერტილებია, მაშინ მათი A' და B' ანასახები იქნება: $A'(z_1(\cos\alpha + i\sin\alpha))$ და $B'(z_2(\cos\alpha + i\sin\alpha))$.

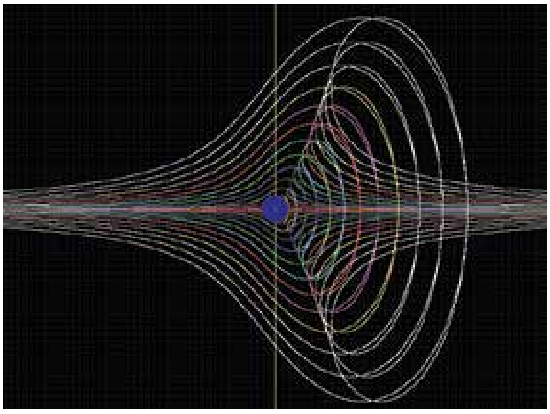
ამგვარად,

$$\vec{AB}=z_2-z_1 \text{ და } \vec{A'B'}=(z_2-z_1)(\cos\alpha+i\sin\alpha),$$

მაგრამ

$$|z_2 - z_1| = |(z_2 - z_1)(\cos\alpha + i\sin\alpha)|.$$

თეორემა დამტკიცებულია.



ჰომოთეტია

განვიხილოთ სიბრტყის რაიმე O წერტილი და $k \neq 0$ რიცხვი. ჰომოთეტია O ცენტრითა და k კოეფიციენტით ეწოდება სიბრტყის გარდაქმნას, რომელიც, O წერტილისაგან განსხვავებულ, სიბრტყის ნებისმიერ M წერტილს ამავე სიბრტყის ისეთ M' წერტილს შეუსაბამებს, რომელიც O და M წერტილების შემაერთებელ წრფეზე ძევს და $OM' = k \cdot OM$. ამასთან, OM' და OM მონაკვეთებს ერთი და იგივე მიმართულება აქვთ, როცა $k > 0$ და აქვთ ერთმანეთის საწინააღმდეგო მიმართულება, როცა $k < 0$. ამ გარდაქმნის დროს O წერტილს თავისი თავი ეთანადება.

გეომეტრიულად, $|k| > 1$ კოეფიციენტის მქონე ჰომოთეტია განსაზღვრავს O ცენტრიდან სიბრტყის „გაწელვას“, ხოლო $|k| < 1$ კოეფიციენტის მქონე ჰომოთეტია – სიბრტყის „შეკუმშვას“ ჰომოთეტიის O ცენტრისაკენ. როცა $k > 0$ ჰომოთეტიას ეწოდება პირდაპირი. ამ შემთხვევაში წერტილი და მისი ანასახი ჰომოთეტიის ცენტრის ერთ მხარეს არიან განლაგებულნი. როცა $k < 0$ ჰომოთეტიას ეწოდება შებრუნებული. ასეთ შემთხვევაში წერტილი და მისი ანასახი ჰომოთეტიის ცენტრის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობენ.

იმ შემთხვევაში, როცა ჰომოთეტიის ცენტრი საკოორდინატო სისტემის სათავეს წარმოადგენს, ჰომოთეტიის გარდქმნას ექნება სახე:

$$F(z) = k \cdot z\,,\ 0 \neq k \in R.$$

$A(a)$ ცენტრისა და $k \neq 0$ კოეფიციენტის მქონე ჰომოთეტია ჩაიწერება სახით:

$$F(z) = k \cdot (z - a) + a.$$

საზოგადოდ, ჰომოთეტია არ წარმოადგენს სიბრტყის მოძრაობას.

თეორემა. ჰომოთეტიის გარდაქმნის დროს სიბრტყის ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელი წრფე ამ წერტილების ანასახებზე გავლებული წრფის პარალელურია. ამასთან, ანასახი და აღებული წერტილებით განსაზღვრული მონაკვეთების სიგრძეთა ფარდობა ჰომოთეტიის კოეფიციენტის მოდულის ტოლია.

დამტკიცება. განვიხილოთ საკოორდინატო სისტემა, რომლის სათავეც $k \neq 0$ კოეფიციენტის მქონე ჰომოთეტიის ცენტრია. განვიხილოთ $A(z_1)$ და $B(z_2)$ წერტილები. $F(z)=k \cdot z$ ჰომოთეტიის დროს ამ წერტილების ანასახები იქნება $A'(k \cdot z_1)$ და $B'(k \cdot z_2)$. ასეთ შემთხვევაში გვექნება:

$$\vec{AB} = z_2 - z_1 \text{ და}$$
$$\overrightarrow{A'B'} = k \cdot z_2 - k \cdot z_1 = k \cdot (z_2 - z_1)\,.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\overrightarrow{AB}$ და $\vec{A'B'}$ ვექტორები პარალელურია და მათი სიგრძეების ფარდობაა $|k|$. თეორემა დამტკიცებულია.

საილუსტრაციოდ, განვიხილოთ ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნის ნიმუში:

ამოცანა 1. ვთქვათ, ABC და $A'B'C'$ სამკუთხედები ნამდვილი ღერძის სიმეტრიულები არიან.

ვაჩვენოთ, რომ ამ სამკუთხედების ცენტროიდები (სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი) სიმეტრიულები იქნებიან იმავე ღერძის მიმართ.

ამოხსნა. ვთქვათ, $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$, მაშინ ცხადია, რომ $A'(\bar{z}_1)$, $B'(\bar{z}_2)$ და $C'(\bar{z}_3)$. ABC სამკუთხედის G ცენტროიდის კომპლექსური კოორდინატია $\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$, ხოლო $A'B'C'$ სამკუთხედის – G' ცენტროიდისა $\frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3}{3}$. მაგრამ კომპლექსური რიცხვებისათვის

$$\frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3}{3}=\frac{1}{3}(\overline{z_1+z_2+z_3})$$

ამოცანა 2. $ABCD$ პარალელოგრამში O წერტილი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია, ხოლო M, N, P და Q შესაბამისად, OAB, OBC, OCD და ODA სამკუთხედების ცენტროიდებია. ვაჩვენოთ, რომ $MNPQ$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

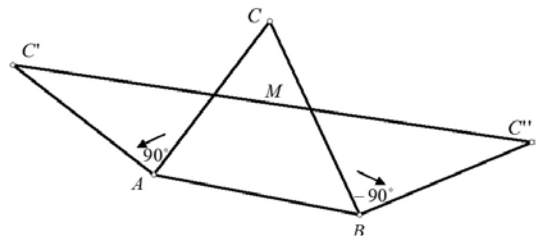
ამოხსნა. ვთქვათ, კომპლექსურ სიბრტყეზე პარალელოგრამი ისეა განლაგებული, რომ მისი სიმეტრიის ცენტრი კოორდინატთა სათავეა და გვერდები საკოორდინატო ღერძების პარალელური. სიმეტრიულობის გამო, თუ პარალელოგრამის ორი მეზობელი წვეროა $A(z_1)$ და $B(z_2)$ წერტილები, მაშინ დანარჩენი ორი წვერო იქნება $C(-z_1)$ და $D(-z_2)$. OAB, OBC, OCD და ODA სამკუთხედების ცენტროიდები იქნება წერტილები:

$$N\left(\frac{z_1+z_2}{3}\right), M\left(\frac{z_2-z_1}{3}\right), P\left(\frac{-z_1-z_2}{3}\right)$$
$$\text{და } Q\left(\frac{z_1-z_2}{3}\right).$$

მაგრამ $\vec{MN}=\frac{2z_1}{3}$ და $\vec{PQ}=\frac{2z_1}{3}$. რაც იმას ნიშნავს, რომ $\vec{MN}=\vec{PQ}$ ანუ $MNPQ$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

ამოცანა 3. ABC სამკუთხედის AC გვერდი A წვეროს გარშემო მობრუნდა 90^o-ით, ხოლო BC გვერდი B წვეროს გარშემო მობრუნდა (-90^o)-ით. ვაჩვენოთ, რომ თუ AC' და BC'' მონაკვეთები აღებული სამკუთხედის შესაბამისი გვერდების ანასახებია, მაშინ $C'C''$ მონაკვეთის შუა წერტილის მდებარეობა C წვეროს მდებარეობაზე არაა დამოკიდებული.

ამოხსნა. ვთქვათ, $A(z_1)$, $B(z_2)$ და $C(z_3)$, ხოლო $C'C''$ მონაკვეთის შუა M წერტილის კოორდინატია $M(z)$



მაშინ

$$C'(z_1+(z_3-z_1)i) \text{ და } C''(z_3-(z_3-z_2)i),$$

ხოლო $M(z)$ წერტილისათვის

$$z=\frac{1}{2}(z_1+z_2+(z_2-z_1)i).$$

როგორც ვხედავთ, M წერტილის კომპლექსური კოორდინატი არაა დამოკიდებული C წერტილის კომპლექსურ კოორდინატზე, შესაბამისად არც M წერტილის მდებარეობაა დამოკიდებული C წერტილის მდებარეობაზე.

ამოცანა 4. $A'B'C'D'$ პარალელოგრამი $ABCD$ პარალელოგრამისაგან მიიღება ჰომოთეტიით, რომლის ცენტრია კოორდინატთა O სათავე. ვაჩვენოთ, რომ R, R' და O წერტილები, სადაც R და R', შესაბამისად, $ABCD$ და $A'B'C'D'$ პარალელოგრამების დიაგონალების გადაკვეთის წერტილებია, ერთ წრფეზე მდებარეობენ.

ამოხსნა. ვთქვათ, პარალელოგრამის წვეროებია $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$, $D(z_4)$ წეტილები. მაშინ გვექნება, რომ $z_4 = z_1 + z_3 - z_2$. ჰომოთეტია $F(z) = k \cdot z$, ცენტრით კოორდინატთა სისტემის O სათავე, $ABCD$ პარალელოგრამს ისეთ $A'B'C'D'$ პარალელოგრამზე ასახავს, რომ მისი წვეროების ანასახებისათვის გვექნება: $A'(k\cdot z_1)$, $B'(k\cdot z_2)$, $C'(k\cdot z_3)$ და $D'(k \cdot z_4)$.

$ABCD$ პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილისათვის $R\left(\frac{z_1+z_3}{2}\right)$, ხოლო მისი ანასახისათვის $R'\left(\frac{k\cdot(z_1+z_3)}{2}\right)$. როგორც ვხედავთ, R და R' წერტილები ასევე ჰომოთეტიურები არიან იმავე ცენტრით O და იგივე k კოეფიციენტით. ამგვარად, R, R' და O წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ.

დამატებითი ამოცანები.

1. $A'B'C'$ სამკუთხედი ნამდვილი ღერძის მიმართ ABC სამკუთხედის სიმეტრიის შედეგად არის მიღებული. დაადგინეთ $A'B'C'$ სამკუთხედის წვეროების კომპლექსური კოორდინატები, თუ ცნობილია, რომ $A(2-i)$, $B(3+i)$ და $C(1-i)$

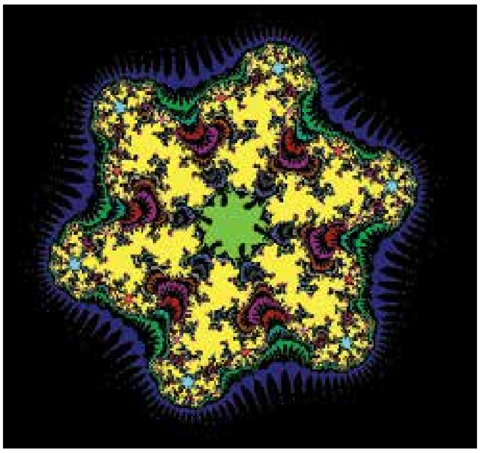
2. $\vec{p}$ ვექტორის გასწვრივ პარალელური გადატანისას ABC სამკუთხედი $A'B'C'$ სამკუთხედზე აისახება. იპოვეთ $A'B'C'$ სამკუთხედის წვეროების კომპლექსური კოორდინატები, თუ ცნობილია, რომ $A(1+4i)$, $B(4-2i)$, $C(-2+3i)$ და $\vec{p}=1-2i$.

3. აჩვენეთ, რომ თუ პარალელოგრამის ორი მოპირდაპირე გვერდის შუა წერტილების შემაერთებელი წრფე პარალელოგრამის სიმეტრიის ღერძს წარმოადგენს, მაშინ ასეთი პარალელოგრამი მართკუთხედია

4. დაადგინეთ პარალელოგრამის მეოთხე წვეროს კოორდინატები, თუ მისი სამი მომდევნო წვეროს კომპლექსური კოორდინატებია z_1, z_2 და z_3.

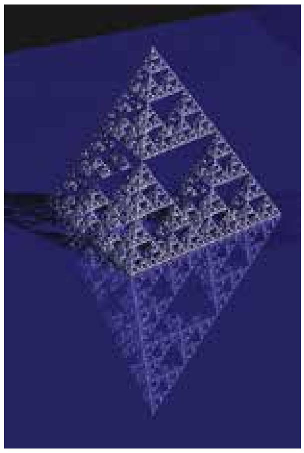
5. წესიერი სამკუთხედის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია მოთავსებული. დაადგინეთ ამ სამკუთხედის A და B წვეროების კომპლექსური კოორდინატები თუ მისი მესამე წვეროა $C(3+2i)$.

ელ. ფოსტა: ruslan.surmanidze@tsu.ge

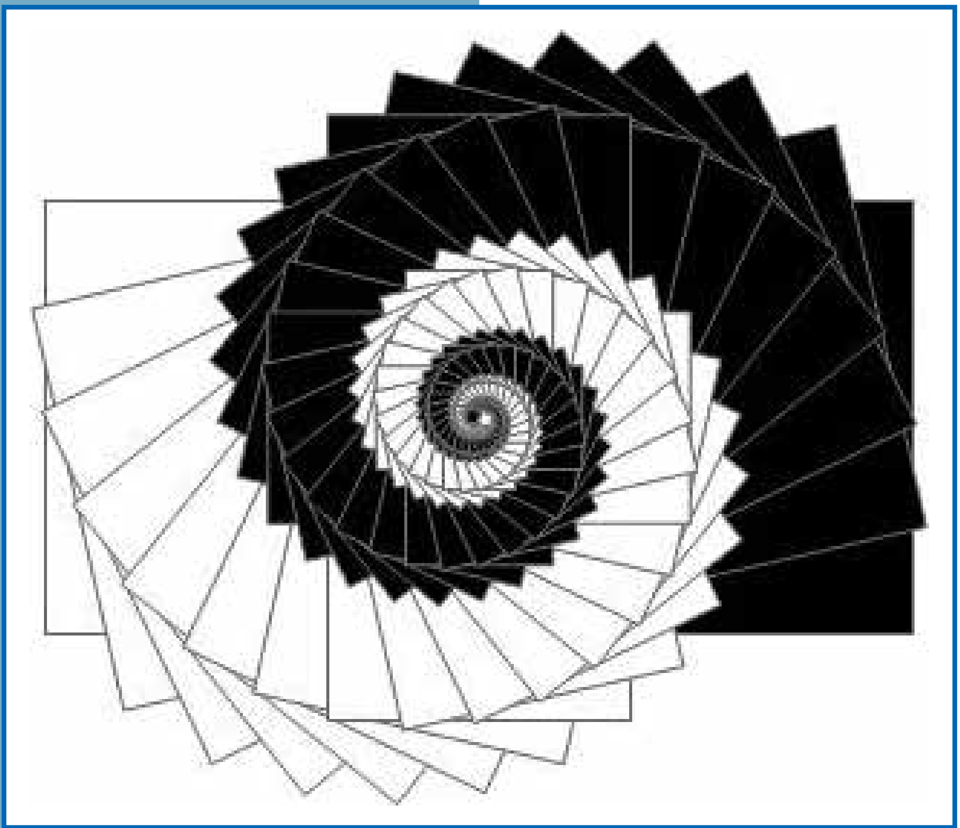


$$\oint_{|z|=1} z \cdot \operatorname{Re} z \, dz$$

$$e^{i\pi}+1=0$$



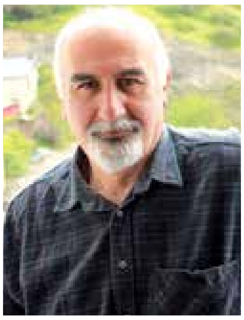
მათემატიკა



გეომეტრიული გარდაქმნა

დიალოგი ბუნების წიგნის ენის შესახებ

ავტორი ალფრედ რენიი
ინგლისურიდან თარგმნა ილია თავხელიძემ

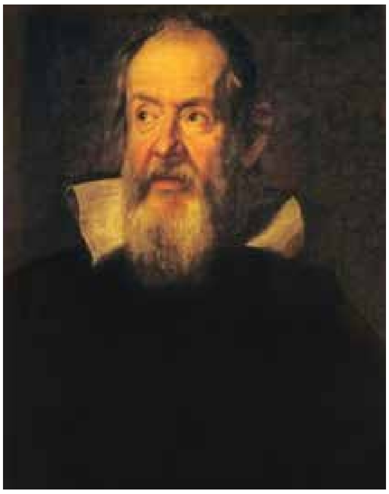


ილია თავხელიძე

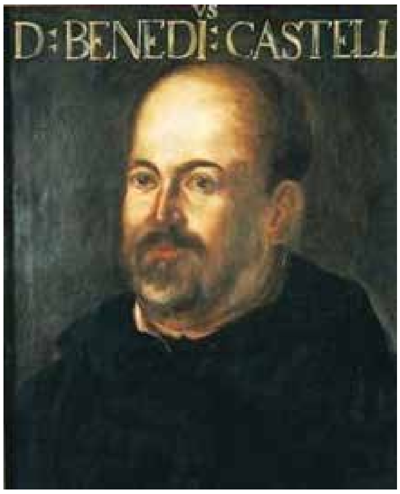
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი, ივ.ჯავახიშვილი თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, აკადემიკოს ილია ვეკუას პრემიის ლაურეატი 1984 წ. დაჯილდოვებულია უკრაინის მათემატიკოსთა 2009 წლის ყრილობის აკადემიკოს ნიკოლოზ ბოგოლიუბოვის მემორიალური ოქროს მედლით.

არსებობს ამ ნაწარმოების კიდევ ერთი თარგმანი, რომელიც ეკუთვნის პროფესორ ფილიმონ ხარშილაძეს და ის მეოცე საუკუნის სამოცდაათიან წლებშია შესრულებული.

ევანჯელისტა ტორიჩელი
1608-1647



გალილეო გალილეი
1564-1642



აბატი ბენედეტო კასტელი
1574-1643

გასაუბრება გალილეო გალილეის, ტორიჩელისა და სენიორა ნიკოლინის შორის

ტორიჩელი – სენიორა – ნება მიბოძეთ წარმოგიდგეთ. მე გახლავართ ევანჯელისტა ტორიჩელი, აბატი კასტელის მოსწავლე.

სენიორა ნიკოლინი – აა! ეს თქვენ ხართ – ის ახალგაზრდა, რომელმაც გამოაქვეყნა ძალზე შთამბეჭდავი წერილი და თავი, საჯაროდ, კოპერნიკისა და გალილეის მიმდევრად გამოაცხადა?

ტორიჩელი – მრავალი ჩვენგანი, ახალგაზრდა, ოცნებობს ამგვარ ცხოვრების გზაზე. აბატი კასტელისგან შევიტყე ახალი ნაშრომის შესახებ, რომელის წერაც დაუწყია მასწავლებელს და მსურს ვესაუბრო მას.

სენიორა ნიკოლინი – ნუთუ თქვენთვის არაა ცნობილი, რომ სენიორ გალილეი – უზენაესი სასამართლოს პატიმარია?! განსაკუთრებული მხოლოდ ისაა, რომ, ჩვეულებრივი სიტუაციისაგან განსხვავებით, მას ნება დართეს აქ, ჩემი მეუღლის სახლში, ეცხოვრა. და ისიც მხოლოდ იმიტომ, რომ **ტოსკანის დიდმა ჰერცოგმა** თხოვნა აღძრა ამის შესახებ. ხოლო ჩემმა ქმარმა, დიდი ჰერცოგის წარგზავნილმა რომში, პირობა დადო, რომ არავის დაუშვებდა სენიორ გალილეისთან.

ალფრედ რენიი (20 III.1921 – 1 II.1970)

გამოჩენილი უნგრელი მათემატიკოსი; დაამთავრა ბუდაპეშტის უნივერსიტეტი; 1947 წელს დაიცვა დოქტორის ხარისხი სეგედის უნივერსიტეტში გამოჩენილი მათემატიკოსის ფ. რიცის ხელმძღვანელობით; 1949 წლიდან მოყოლებული იყო დებრეცენის უნივერსიტეტის პროფესორი; დააფუძნა ბუდაპეშტის მათემატიკის ინსტიტუტი, რომელიც დღეს მისი სახელობისაა; მისი ძირითადი შრომები ეხება ალბათობის თეორიის, მათემატიკური სტატისტიკის, ინფორმაციის თეორიის, კომბინატორიკის და გრაფთა თეორიის საკვანძო საკითხებს; ინფორმაციის თეორიაში მის მიერ შემოღებულია სპექტრი (ე.წ. რენის ენტროპია) , რომელიც წარმოადგენს “შენონის ენტროპიისა” და “კულბაკ-ლეიბლერის განსხვავების” განზოგადებას. დაწერა 32 სამეცნიერო ნაშრომი პოლ ერდოშთან ერთად, მათ შემოიტანეს “შემთხვევითი გრაფების ერდოშ-რენის მოდელი”.

ტორიჩელი – სენიორა არავინ არ იცის, რომ მე აქ მოვედი, – არავინ მითვალთვალებდა!

სენიორა ნიკოლინი – კეთილი, ნებას დაგრთავთ, მაგრამ მხოლოდ იმიტომ, რომ დარწმუნებული ვარ, მოხუცს ესიამოვნება ესაუბროს მას, ვინც მის იდეებს იზიარებს. უნდა მოგახსენოთ, რომ სხვა მსმენელის არ არსებობის გამო, ის ხანდახან თავისი ახალი ნაშრომის შესახებ მე მესაუბრება. სამწუხაროდ, მე ყოველთვის არ მესმის მისი. დღეს სენიორ გალილეი შესანიშნავ ხასიათზეა, ვინაიდან მრავალი უძილო კვირის შემდეგ მას პირველად ეძინა კარგად. მომყევით. გაფრთხილებთ, ვინმემ თუ დაგინახათ, ვიტყვით, რომ ჩემი ნათესავი ხართ და ჩემ სანახავად მოხვედით.

ტორიჩელი – გმადლობთ, სენიორა, თქვენ მე დიდი პატივი დამდეთ.

სენიორა ნიკოლინი – თუ შეიძლება აქეთ მობრძანდით... სენიორ გალილეი, მე მოგიყვანეთ სტუმარი, რომლის დანახვა გაგიხარდებათ, ეს გახლავთ ევანჯელისტა ტორიჩელი.

გალილეი – რა თქმა უნდა, მე მართლაც მოხარული ვარ. ჩემო კეთილო, რა მშვენიერია, რომ არ შეგეშინდათ ერეტიზმში ბრალდებული მოხუცებულის მონახულება.

ტორიჩელი – სენიორ, მე და ჩემი მეგობრები მივიჩნევთ, რომ თქვენი წიგნი – ***დიალოგი სამყაროს მოწყობის ორი სისტემის შესახებ***, ჩვენი „ცხოვრების წიგნია„. აბატი კასტელისგან გავიგე, რომ ამჟამად თქვენ ახალ წიგნზე მუშაობთ, რომელიც იქნება აღმატებული ყველა იმ ნაშრომზე, რომელიც კი როდესმე მექანიკაში დაწერილა. მე მოვედი, რათა რაიმე მაინც შევიტყო ამ ნაშრომის შესახებ.

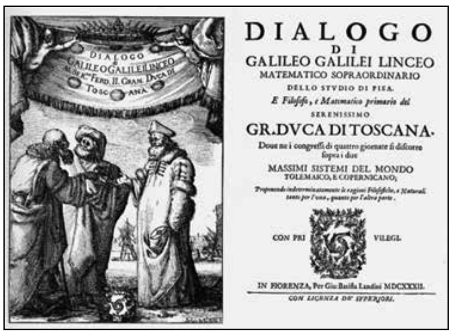
გალილეი – მე დიდი ხანია ვემზადებოდი ამ წიგნის დასაწერად. რამდენიმე თვის წინ მე ბოლოსდაბოლოს მივიღე გადაწყვეტილება, დავიწყე წერა, მაგრამ იძულებული ვიყავი შემეწყვიტა, ვინაიდან გამომიძახეს აქ, რომში, ინკვიზიციის სასამართლოზე. ამ დროიდან მე არ მქონა არც ერთი წუთი თუნდ ერთი სტრიქონის მისამატებლად. მე ერთადერთი სურვილი მამოძრავებს, დავასრულო წიგნი, რომელშიც თავს მოვუყრი ცოდნას მოძრაობის შესახებ. ეს, რაღა თქმა უნდა, ჩემი საუკეთესო ნაშრომი იქნება. მაგრამ ეჭვი მაქვს, რომ ამ ნაშრომს მე ბოლომდე ვერ მივიყვან. გინდაც მოვიპოვო გამაჯვება, ეს **პიროსის გამარჯვება** (279 წ.ძვ.წ.აღ. ასკულუმთან ბრძოლაში მეფე პიროსმა სძლია რომაელებს და წარმოთქვა: „კიდევ ერთი ასეთი გამარჯვება და დავრჩები არმიის გარეშე„! – ი.თ.) იქნება, ვინაიდან მე აღარ მეყოფა ძალა დავასრულო ჩემი წიგნი.

ტორიჩელი – მე ბედნიერი ვიქნები თუნდაც რაიმე შევიტყო, ამ წიგნის შინაარსის შესახებ.

გალილეი – ბერძენმა მათემატიკოსებმა, თავიანთ ნაშრომებში, შესანიშნავი შედეგები მიიღეს, ხოლო ზოგიერთებმა, მაგალითად **არქიმედემ**, ბრწყინვალედ გამოიყენა თავისი შედეგები პრაქ-

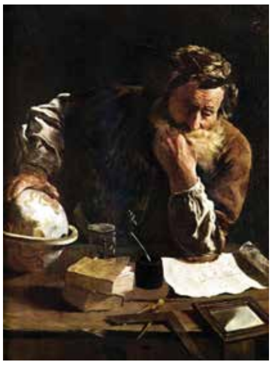
ნიკოლოზ კოპერნიკი 1473-1543

ფერდინანდო-II მედიჩი ტოსკანიის დიდი ჰერცოგი 1610-1670

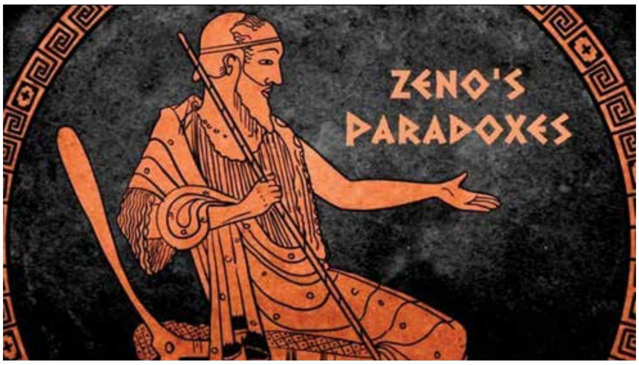


გალილეის ნაშრომის **„სამყაროს მოწყობის ორი სისტემის შესახებ“** – ყდა

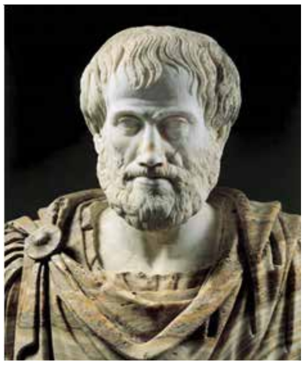
პიროსი – „წითური“ 319/318-272 ძვ.წ.ა



არქიმედე



ძენონი ელეადან
490-425 BC



არისტოტელე
384-322 BC

ტიკაში. მაგრამ სამე იმაშია, რომ მათ გადაუხვიეს მოძრაობის მათემატიკურ შესწავლას, და მათ შემდეგ არც არავის უცდია ამის გაკეთება. ჩემი ნაშრომის, თუ ოდესმე შევძელი მისი დასრულება, ძირითადი ნაწილი ზუსტად ამ საკითხს, მოძრაობის მათემატიკურ აღწერას დაეთმობა.

ტორიჩელი – მართლაც, გაუგებარია, რატომ არ შეეცადნენ ბერძნები ეს გაეკეთებინათ? რა არის ამის მიზეზი?

გალილეი – ბერძენი ფილოსოფოსები ხშირად მსჯელობდნენ მოძრაობის შესახებ. განვიხილოთ მაგალითად ***ძენონის პარადოქსები: „აქილევსი და კუ“ ან „ისარი“***. ძენონი ცდილობდა ეჩვენებინა, რომ მოძრაობა შეუძლებელია – მოძრაობის ცნება წინააღმდეგობრივია და შესაბამისად მისი აღწერა მათემატიკური მეთოდებით შეუძლებელია.

არისტოტელე შეეცადა უარეყო ძენონის პარადოქსები, თუმცა მხოლოდ იმის დამტკიცება შესძლო, რომ მოძრაობა არსებობს. ეს კი ყოველი ბავშვისათვის ცნობილია. **ძენონის პარადოქსების ჭეშმარიტი უარყოფა იქნებოდა მხოლოდ მოძრაობის მათემატიკური აღწერა**. არისტოტელეს არც კი უცდია ეს გაეკეთებინა. ჩემი ნაშრომი, თუ მას ოდესმე დასრულება უწერია, შესძლებს ამას. არისტოტელეც და ძენონიც ამტკიცებდნენ, რომ მოძრაობის შესწავლა, შეუძლებელია გახდეს მათემატიკის ამოცანა. მათი ამოსავალი საფუძველშივე განსხვავდებოდა ერთმანეთისაგან. არისტოტელეს თანახმად, საბულებისმეტყველო მეცნიერებებს საქმე აქვთ დამოუკიდებლად არსებულ, მაგრამ ცვალებად ობიექტებთან, იმ დროს როდესაც მათემატიკა სწავლობს უცვლელ და ურთიერთდამოკიდებულ ობიექტებს, ხოლო ურთიერთდამოკიდებული და ცვალებადი ობიექტები, მათ შორის მოძრაობაც, ვერ გახდება რომელიმე მეცნიერების შესწავლის საგანი. ამგვარად, უკვე 2000 წელია რაც, **არისტოტელეს აკრძალვის მეოხებით, მათემატიკოსებისა და ფილოსოფოსების აზროვნებამ გვერდი აუქცია მოძრაობის მათემატიკურ შესწავლას**. რა თქმა უნდა, ეს მცდარი სწავლება ეფუძნება ხელოვნურ ზღვარს მათემატიკასა და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებს შორის. მისი გადალახვა მხოლოდ რამოდენიმე ადამიანმა გაბედა და თანაც გადალახა.

ტორიჩელი – მე ბევრს მოველი თქვენი ნაშრომისაგან. სამარცხვინოა, რომ თქვენ, მასწავლებელო, გაწუხებენ უაზრო მითითებებით და ყოველგვარად აფერხებენ წიგნზე მუშაობას. ეს წიგნი ხომ ახალ ერას გახსნის მეცნიერებაში. მაგრამ, ნება მომეცით შეგეკითხოთ: რატომ ჩამოხვედით რომში და არ დაიმალეთ სადმე, სადაც თქვენ ვერავინ შეგაწუხებდათ?

გალილეი – რა უნდა მექნა? მე ინკვიზიციამ გამომიძახა.

ტორიჩელი – თქვენ შეგეძლოთ გაქცეულიყავით იქ, სადაც თქვენ ინკვიზიციის ხელი ვერ მოგწვდებოდათ.

გალილეი – რომში ჩამოსვლისას, ჯერ კიდევ მჯეროდა შევძლებდი დამერწმუნებინა ეკლესია, რომ დედამიწის მოძრაობა არ არის სარწმუნოების საკითხი. ის არის ფაქტი, რომლის შესახებ მსჯელობაც უნდა მიენდოს მეცნიერებას. ვგრძნობდი, ვალდებული ვიყავი, არა მარტო მეცნიერების, არამედ ეკლესიის წინაშეც – განმემარტა ეს. ეკლესიის მიერ **პტოლემაოსის სისტემის** მხარდაჭერა – იგივეა, რომ დარჩე გემში, რომელიც იძირება. შევეცადე მეჩვენებინა ეს ჩემ ნაშრომში „დიალოგი.“ ვიმედოვნებდი, მომეცემოდა ხელსაყრელი შემთხვევა პირადად გამეჟღერებინა ჩემი არგუმენტები და მათი დახმარებით დამერწმუნებინა ეკლესია შეეცვალა აზრი **კოპერნიკის თეორიის** შესახებ.

მე ვიყავი დარწმუნებული, რომ შევძლებდი პაპის, რომელსაც მე ვიცნობდი ადრე, როგორც კარდინალ მაფეო ბარბერინის, დარწმუნებას, რომ დამდგარიყო ჩემს მხარეზე. მან მე ბევრჯერ დამდო პატივი – ალბათ გაგებული გექნება, რომ მან ერთხელ პოემაც კი მომიძღვნა. თანაც მე მას ყოველთვის, როგორც მეცნიერების მეგობარს ისე ვიცნობდი. მან ხომ თავისი, როგორც პაპის მოღვაწეობა დაიწყო უბედური კამპანელას (ბრალდება-ბიბლიოთეკის დაუკითხავად სარგებლობა) ციხიდან განთავისუფლებით. ასევე ვთვლიდი, ეკლესიის ინტერესებში შედიოდა მეცნიერებას მისცემოდა საშუალება თავისუფლად შეესწავლა სამ-

ყაროს მოძრაობა. მოლოდინი არ გამართლდა. პაპმა ჩემს შესახებ გაგონებაც კი არ მოისურვა. ჩემმა მტრებმა პაპი დაარწმუნეს, რომ ნაშრომში „დიალოგი", ერთ-ერთი გმირის, „ალალი სიმპლიჩიოს" („Simple – მარტივი"), სახე მისი მსგავსებით შევქმენი. ამის გამო, ძველი მეგობრობა აუტანელი სიძულვილით შეცვალა და ჩემი სახელის გაგონებაც კი არ უნდა. შესაძლოა, შენ მართალი ხარ, არ იყო საჭირო ჩემი რომში ჩამოსვლა, მაგრამ ახლა გვიანაა ამაზე საუბარი.

ტორიჩელი – მე ასე არ ვთვლი. ნება მიბოძეთ პირდაპირ გამოვთქვა ჩემი სათქმელი.

გალილეი – ბრძანე, მე არაფერი მაქვს დაფარული სენიორა ნიკოლინისაგან, იგი ჩემი საუკეთესო მეგობარია. მან დაარწმუნა ბიძამისი, პადრე რიკარდი, ნება დაერთო გამოქვეყნებულიყო ჩემი „დიალოგი". მას მერე რაც აქ ვარ, დედობრივი ზრუნვით განმსჭვალული, ყოველთვის ფიქრობს, როგორ დამამშვიდოს, როგორ დამეხმაროს ყველა იმ უბედურების დაძლევაში, რომელიც იძულებით თავს დამატყდა. ასე რომ, შეგიძლია გულწრფელად ილაპარაკო.

ტორიჩელი – ეჭვიც არ მეპარება. როცა სინიორა ნიკოლინიმ ნება დამრთო გწვეოდით, მივხვდი, ის სანდო ადამიანია. მაგრამ ჩვენ დროში კედლებსაც კი ყურები აქვთ.

სენიორა ნიკოლინი – ამ სახლში შეგიძლიათ თავისუფლად ისაუბროთ.

გალილეი – მენდე, ჩემო ახალგაზრდა მეგობარო. რამდენიმე დღის წინ სინიორა ნიკოლინიმ გაათავისუფლა ერთ-ერთი მსახური, რადგან გაირკვა, რომ ის ინკვიზიციის სასარგებლოდ ჯაშუშობდა. მხოლოდ სენიორა არ მიმხელდა ამ ამბავს, ერიდებოდა ჩემს შეწუხებას. ასე არაა ძვირფასო კატარინა?

სენიორა ნიკოლინი – ვაღიარებ, მაგრამ თქვენ მაინც როგორღაც შეიტყვეთ ამის შესახებ. დანარჩენ მსახურებს კი ვენდობი. ყველანი ფლორენციელები არიან და ერთგულებით გამოირჩევიან. საშუალება გაქვთ ისაუბროთ ღიად და რასაც იტყვით ჩვენს შორის დარჩება.

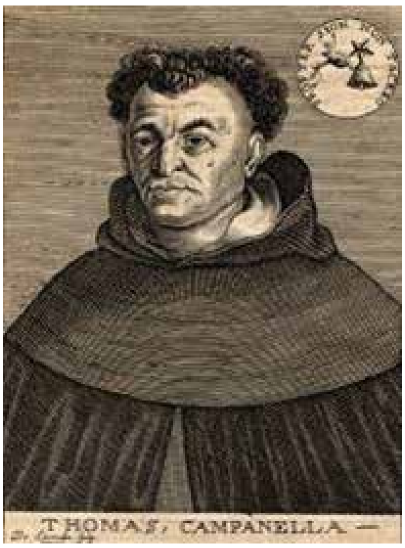
ტორიჩელი – მე და ჩემმა მეგობრებმა, რომლებიც გალილეის მიმდევრებად ვიწოდებით, უკვე ყველაფერი მოვამზადეთ თქვენი გაქცევისათვის. თანხმობის შემთხვევაში, უპირველეს ყოვლისა, გადაგიყვანდით ვენეციაში, სადაც ერთხანს უსაფრთხოდ იქნებოდით. რესპუბლიკა არავითარ გარემოებაში არ გადაგცემდათ ინკვიზიციის ხელში. სურვილის შემთხვევაში, შეიძლებოდა ნიდერლანდებში გამგზავრება. იქ ყველა პირობაა შექმნილი წყნარი მუშაობისათვის და წიგნის გამოქვეყნებაც შესაძლებელია. ყველა წვრილმანი გათვალისწინებულია. თუ თქვენ იტყვით «დიახ», ჩვენ მაშინათვე მოვილაპარაკებთ გაქცევის თარიღზე.

გალილეი – ჩემო კეთილო, ჩემი მასპინძლები პასუხს აგებენ ჩემს გამო და მე არ მინდა მათ უსიამოვნება შეხვდეს, რომ არ ჩავთვალოთ სხვა დანარჩენი, მხოლოდ ეს ერთი მიზეზიც კი საკმარისია, რომ უარი ვთქვა თქვენ წინადადებაზე.

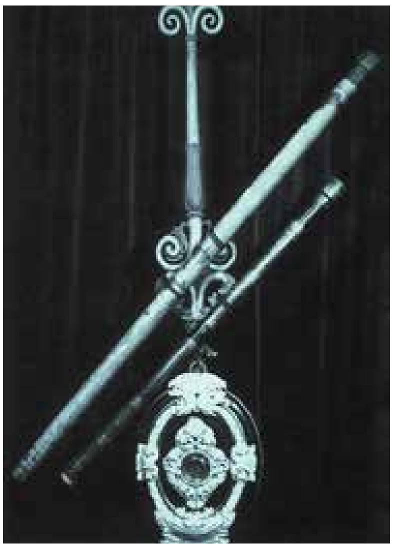
ტორიჩელი – სენიორ, ჩვენ ეს გარემოებაც გავითვალისწინეთ. გეგმა ასეთია – უნდა გაგათავისუფლოთ უშუალოდ ინკვიზიციის ხელიდან, როდესაც, დღეის შემდეგ, თქვენ წახვალთ დაკითხვაზე წმინდა კონგერგაციაში. ეს მოხდება ქუჩაში და ამგვარად, ვერავინ ვერ შეძლებს დაადანაშაულოს სინიორ ნიკოლინი. ჩვენი ერთგული ხალხი ადვილად გაუსწორდება დაცვას.

გალილეი – ჩემო კეთილო, ვერ გამოვთქვამ ჩემ სიამოვნებასა და სიხარულს, რომ ახალგაზრდობას დაუსახავს ასეთი გეგმა ჩემ გასათავისუფლებლად. საქმე იმაშია, რომ როგორი მომხიბლავიც არ უნდა იყოს იგი, მას განხორციელება არ უწერია, რადგან ჩემი ბებერი სხეული ვერ გა-

კარდინალი მაფეო ბარბერინი, შემდგომ პაპი ურბან VIII 1568-1623-1644



ტომაზო კამპანელა 1568-1639



გალილეის ტელესკოპი

დაიტანს ამგვარი მოგზაურობის ყველა უხერხულობას. შესაძლოა გაგონილი გაქვს, რომ ცოტა ხნის წინათ, მძიმე ავადმყოფობა გადავიტანე და ჯერაც სრულიად არ ვარ გამოჯანმრთელებული.

ტორიჩელი – ჩვენ ამ გარემოებაზეც ვიფიქრეთ. ერთ-ერთ ჩემს მეგობარს, ექიმს, შეეძლო მოწყობილიყო თანამეგზურთა შორის და ეზრუნა თქვენს ჯანმრთელობაზე. მარშრუტის ყველა წვრილმანი გათვლილია. რომიდან ვენეციამდე, ღამის სათევად, არჩეულია საიმედო ადგილები. რაღა თქმა უნდა, ამ მოგზაურობისას, ისეთ კომფორტს ვერ ვუზრუნველყოფთ, როგორიც ამ სახლშია, მაგრამ არ დაგავიწყდეთ, ნებისმიერ დროს შეიძლება წმინდა კონგრეგაციის ციხეში გადაგიყვანონ. მე მგონი, არჩევანი რომ გქონდეთ გასაკეთებელი მოკრძალებული, წესიერი მეცხვარის საცხოვრისსა და ციხეს შორის, თქვენ დიდხანს არ იფიქრებდით.

გალილეი – ჩემო ახალგაზრდა მეგობარო, ვაფასებ ამ კეთილ სურვილს, მაგრამ შენ ვერ წარმოგიდგენია თავი მოხუცებული ადამიანის ადგილზე. მოდი, აღარ ვისაუბროთ ამ საკითხზე. დავუშვათ შევძლებ გადავიტანო მოგზაურობის ყველა უხერხულობა, მაგრამ განა მკითხე მინდა თუ არა რომის დატოვება სამუდამოდ?

ტორიჩელი – განა ახლახან არ აღიარეთ, რომ არ იყო მიზანშეწონილი რომში ჩამოსვლა. მეგონა თქვენ მზად იყავით, ხელსაყრელი შემთხვევისთანავე დაგეტოვებინათ ეს ქალაქი.

გალილეი – ჩემო კეთილო ვერ გაგიგია. მე არ შემიძლია დავიხიო უკან! მე უნდა მივიყვანო ეს ბრძოლა ბოლომდე, მიუხედავად იმისა, რომ ჩემი გამარჯვების ალბათობა გაცილებით მცირეა, ვიდრე მეგონა, როდესაც აქ ჩამოვდიოდი. გაქცევა ჩემ მტრებს გამარჯვებას მოუტანს. იტალიაში კი დაიკარგება მეცნიერული ძიების თავისუფლება. თქვენ, ახალგაზრდა თაობის, გამო მე ამას არ ჩავიდენ.

ტორიჩელი – მე თქვენი არ მესმის, მასწავლებელო. ადრე ამბობდით, რომ გული გწყდებათ, რადგან არა გაქვთ პაპის მხარდაჭერა. ვისი ნდობა შეგიძლიათ? მე ვთვლი, იეზუიტებს შორის ბევრია, ვინც იცის თქვენი სიმართლე, თუმცა იმედი მაქვს, არ გგონიათ, რომელიმე გაბედავს და შეეკამათება პაპს. ამას წინათ ვესაუბრე პადრე გრინბერგს, ღიად ვკითხე რას ფიქრობს თქვენი „დიალოგის“ შესახებ.

გალილეი – და რა გიპასუხათ ამ ღირსეულმა ბერმა?

ტორიჩელი – მას სურდა დარჩენილიყო ერთგული, როგორც თავისი მეცნიერული, ასევე რელიგიური სინდისისა ერთდროულად. მან თქვა, რომ აფასებს თქვენს კრისტალურად მკაფიო ლოგიკას და შეუდარებელ ცოდნას. მიუხედავად იმისა, რომ „დიალოგის“ ზოგიერთი ფრაზა შედგენილია საკმაოდ გაუფრთხილებლად და მტრებს აძლევს საბაბს, რომ შინაარსი არასწორად იქნას გაგებული, რამაც გამოიწვია მრავალი მაღალჩინოსანის საწინააღმდეგო განწყობა თქვენს მიმართ; თავად მას არასოდეს შეჰპარვია ეჭვი თქვენი მიზნების სისუფთავეში. იგი თვლის, რომ შესანიშნავი არგუმენტებია, მაგრამ ჰგონია, რომ აღმაფრენამ ძალზე შორს წაგიყვანათ. ამიტომ მასაც კი აქვს რამოდენიმე, ძალზედ სერიოზული შენიშვნა.

გალილეი – ჭეშმარიტად დიპლომატიური პასუხია. ყველას შეუძლია იპოვოს მასში ის რაც თავად უნდა. შენ, რა თქმა უნდა, მართალი ხარ. მე არ შემიძლია ასეთი ფრთხილი მეგობრებისგან რაიმე სერიოზული მხარდაჭერის იმედი მქონდეს. მას კიდევ რაიმე ხომ არ უთქვამს?

ტორიჩელი – დიახ. რაღაც, ალბათ მნიშვნელოვანი. ის გთვლით თქვენ კარგ კათოლიკედ.

გალილეი – **პადრე გრინბერგმა შესანიშნავად იცის, რომ ჩემი სწავლება არ ეხება რელიგიურ საკითხებს. უბრალოდ მტრები, რელიგიას ამოფარებული მოქმედებენ ჩემს წინააღმდეგ**. ისინი ასეთ ტაქტიკას თავიდანვე მიმართავდნენ. ახლაც, რამდენიმე ათეული წლის მზაკვრული ინტრიგების შემდეგაც, მათ შეძლეს თავის მხარეს გადაებირებინათ ეკლესია, მეცნიერების და ჩემს წინააღმდეგ. ყველაფრის მიუხედავად შეკითხვის არსი სრულიად სხვაა.

ტორიჩელი – კი მაგრამ, ვინ არიან თქვენი რეალური მტრები და რატომ ვერ გიტანენ თქვენ?

გალილეი – ჩემი ნამდვილი მტრები, სულელი და უნიჭო კოლეგები, ფსევდომეცნიერები არიან. იმეორებენ რა არისტოტელეს ფრაზებს თუთიყუშებივით, არ სურთ გაიხედონ **ჩემ ტელესკოპში**, რადგან მაშინ იძულებული გახდებიან გამოასწორონ მასწავლებლების მიერ დაშვებული შეცდომები. ისინი ვერ მიტანენ, რადგან მათ ეშინიათ ჭეშმარიტად მეცნიერული მეთოდებისა. ჩემი აზრით, *ფილოსოფიის ნამდვილი მიზანი არის გაიგოს ბუნების კანონები, ხოლო ამის მიღწევა შესაძლებელია მხოლოდ ძალზე ფაქიზი დაკვირვებებით და კარგად გააზრებული და დადგმული ექსპერიმენტებით. გარდა ამისა, გასათვალისწინებელია, რომ* ***ბუნების კანონები მხოლოდ მათემატიკის საშუალებით შესაძლოა იყოს აღწერილი*** და ამიტომ ის, რასაც ჩემი მტრები ფილოსოფიას უწოდებენ, მხოლოდ არისტოტელეს ციტატების ერთმანეთისათვის სროლაა.

ტორიჩელი – გაუგებარია, როგორაა შესაძლებელი მიისწრაფოდე გაიგო ბუნების კანონები და ამავ დროულად უარყო მეცნიერული მეთოდები. უეჭველია, რომ ყოველივე ჭეშმარიტი არისტოტელეს სწავლებაში, ისევე როგორც სხვა ბერძენ მეცნიერებთან, ჩამოყალიბებული იყო იმავე მეცნიერული მეთოდის საშუალებით.

გალილეი – მე არ მეშინია ამის თქმა: დღეს არისტოტელე ცოცხალი რომ ყოფილიყო, წინააღმდეგი იქნებოდა მისი ციტატებით ფსევდომეცნიერული თამაში წარმართულიყო. არ და-

გავიწყდეთ, ჩემ მტრებს არ სურთ გაიგონ ბუნება. მათ აინტერესებთ არა მეცნიერება, არამედ სწავლულის მანტია და კარგი ანაზღაურება. ინტრიგა გახდა ჩვეულებრივი მოვლენა; უკვე შევეჩვიე, რომ რაც არ უნდა დავწერო, ან ვთქვა მათი თავდასხმის გარეშე არ ჩაივლის. მეცნიერულ ძიებას ინტრიგა ურჩევნიათ და ამაში მწვერვალებს მიაღწიეს. ხელს მიშლიან მუშაობაში, უსარგებლოდ გაიფლანგა საუკეთესო წლები, ბრალდებისაგან და ტყუილისაგან თავდაცვაში, უკვე მოვხუცდი და წიგნი, რომელზეც ვფიქრობდი მთელი ეს წლები, ჯერ კიდევ არაა დაწერილი.

ტორიჩელი – ჩვენი გეგმის მიღების შემთხვევაში, თქვენ შესაძლებლობა გექნებოდათ, დაგეწერათ ნაშრომი, რომელსაც ასე დიდ ხანს ელოდება ყველა, ვინც ჭეშმარიტად დაინტერესებულია მეცნიერებით. მე არ მესმის, რატომ არ გინდათ გამოხვიდეთ თქვენთვის აგრერიგად მიუღებელი მდგომარეობიდან. თქვენ შეუძლებელია ელოდეთ რაიმე სიკეთეს თქვენი მტრებისაგან, ხოლო თქვენ მეგობრებს არ ძალუძთ გააკეთოს რაიმე თქვენთვის. რისი ჯერ კიდევ გჯერათ თქვენ?

გალილეი – მე მწამს სამართლიანობის გამარჯვების. წარმოიდგინეთ, სინამდვილეში მათ არც კი იციან, რაში მადანაშაულებენ. „დიალოგი“, რომელიც თვით პაპის მიერაა მოწონებული, ცენზორს წარვუდგინე. ის, მიღებული წესის თანახმად, ყოველმხრივ განიხილეს და დასტური მისცეს წიგნის გამოქვეყნებას. ამბობენ, ცენზორს არ ეყო სიფრთხილე, მას არ უნდა მიეცა თანხმობაო, მაგრამ ეს ჩემი საქმე არ არის. რა უნდა მიყონ მათ მე? რა თქმა უნდა, **შეუძლიათ აკრძალონ „დიალოგი“**, რომელიც აღარც კი მახსოვს, იმდენად დიდი ხნის წინათ დავწერე. თუ მის დაწვას გადაწყვეტენ, არც კი ვიცი სად იპოვნიან თუნდაც ერთ ეგზემპლარს. კარგი იქნებოდა, ამ მიზნისათვის კიდევ ერთხელ თავიდან დაებეჭდათ. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ვერც კი დაასაბუთებენ, რომ ცენზორი შეცდა. მე მკაცრად ვიცავდი **კარდინალ ბელარამინის ინსტრუქციას, არ მექადაგა კოპერნიკის სწავლება**. ჩემ „დიალოგში“ სრულიად ობიექტურად დავასახელე მისი სისტემის დამადასტურებელი თუ უარმყოფელი ყველა ფაქტი. ნებისმიერი, ვინც კითხულობს ამ ნაწარმოებს, ხედავს, რომ მე წარმოვაჩენ დედამიწის უძრაობის დამადასტურებელ უფრო ძლიერ არგუმენტებს, ვიდრე ამას ახერხებენ ჩემი უვიცი მტრები, რომლებიც უარყოფენ კოპერნიკის სწავლებას. რა ბრალი მიმიძღვის იმაში, თუ ეს არგუმენტები არადამაჯერებელი აღმოჩნდა. დაე მან, ვისაც სურს შემარცხვინოს, მოიძიოს დედამიწის უძრაობის უკეთესი დამადასტურებელი ფაქტები. ამ დრომდე, დაკითხვებისას, არ მომეცა საშუალება მესაუბრა ამის შესახებ. გაჩუმებას მაიძულებდნენ და ისევ და ისევ მეკითხებოდნენ, რატომ არ მოვაგონე ცენზორს, რომ ჯერ კიდევ 1616 წელს წმინდა კონგრეგაციას ჰქონდა ამ საკითხთან შეხება. რა უაზრობაა, ცენზორს ჩემზე უკეთ უნდა სცოდნოდა ამის შესახებ. აღმოჩნდა, რომ მე უნდა მომეყოლა რაც მითხრა ბელარამინიმ თექვსმეტი წლის წინ. მაშინ მან მხოლოდ გამაცნო წმინდა კონგრეგაციის გადაწყვეტილება. შემდგომ ისინი მეკითხებოდნენ, რა მირჩია ბელარამინიმ, არ მექადაგა კოპერნიკის სწავლების შესახებ, თუ არ მემსჯელა ამ სწავლებაზე. არადა, ამ მეორე საკითხის შესახებ მას არაფერი უთქვამს. ჯერ-ჯერობით მაქვს ერთი გამოუყენებელი არგუმენტი, ესაა ბელარამინის წერილი, რომელშიც ის ჩვენ საუბარს ეხება. მასში ხაზგასმულია მხოლოდ, რომ მე არ უნდა დავიცვა კოპერნიკის თეორია.

სენიორა ნიკოლინი – და თუ თქვენი მტრები საწინააღმდეგო დოკუმენტებს წარმოადგენენ, რას მოიმოქმედებთ?

გალილეი – ასეთი დოკუმენტები არ არსებობს.

სენიორა ნიკოლინი – მაგრამ ხომ ხდებოდა ადრეც, რომ დოკუმენტებს აყალბებდნენ.

გალილეი – მე ჩემ მტრებსაც კი არ ვთვლი ასეთი სიმდაბლის ჩამდენად.

სენიორა ნიკოლინი – ნუ დაივიწყებთ, ვინც სიმართლის წინააღმდეგ იბრძვის, არაა წუნია მეთოდების არჩევაში, ის სულ უფრო და უფრო იხლართება ჭორებისა და ტყუილების ლაბირინთში.

გალილეი – შეუძლებელია. დარწმუნებული ვარ, თუ ვაჩვენებ წერილს ბელარამინის, ყველა ბრალდება მომეხსნება. ეხლაა დრო გავაკეთო ეს, რადგან ისინი დაკითხვას მხოლოდ სხვადასხვა ფორმალობების შესახებ მიტარებენ და საქმის არსის გამო – ბრუნავს თუ არა დედამიწა თავისი ღერძის გარშემო და ამავ დროულად მზის ირგვლივ, თუ გაჩერებულია სამყაროს ცენტრში – ერთი სიტყვაც კი არ თქმულა. თუ ერთხელ მაინც მომეცა საშუალება ღიად გამოვთქვა ჩემი აზრი, ვგონებ შევძლებ შევცვალო საქმის მსვლელობა.

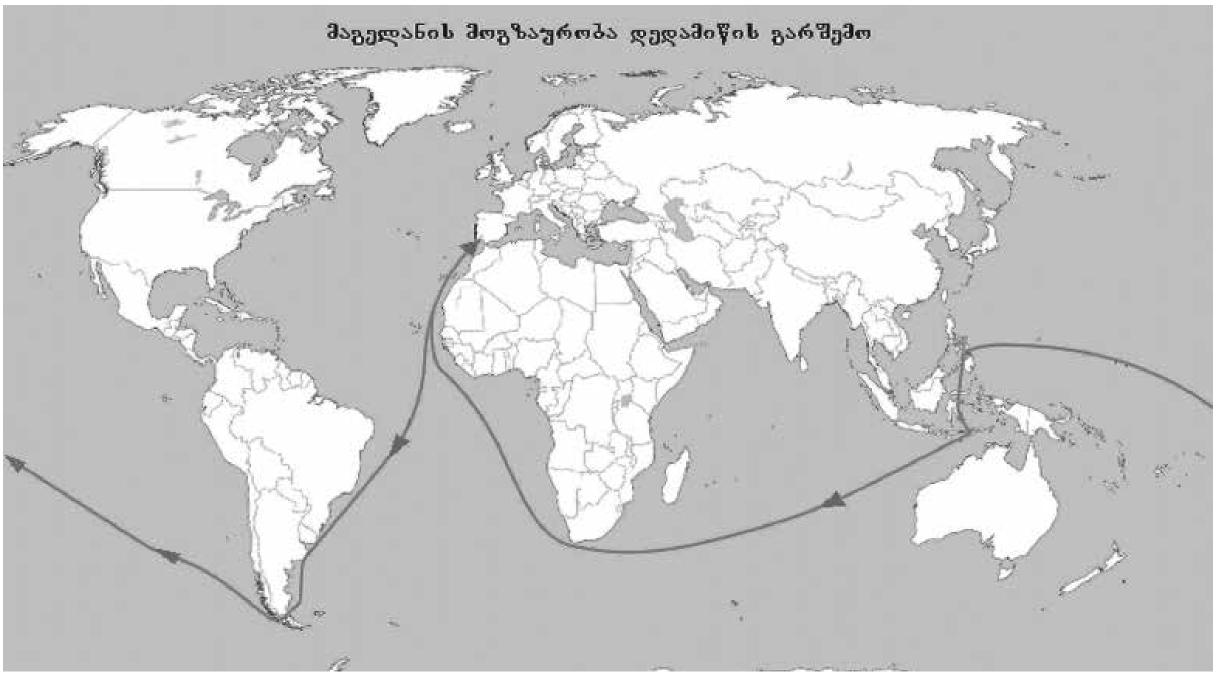
ტორიჩელი – მასწავლებელო, რას იტყოდით ასეთი შესაძლებლობა, რომ მოგეცეთ? დაამტკიცებდით, რომ კოპერნიკის თეორია ერთადერთი სწორი თვალსაზრისია?

გალილეი – ჩემო კეთილო, სიამოვნებით გავაკეთებდი ამას, დარწმუნებული ვარ სიმართლეში, მაგრამ საუბედუროდ, ვერ შევძლებ დავამტკიცო ყველაფერი. მხოლოდ იმის თქმა შემიძლია, რომ კოპერნიკის თეორია ყველა არსებულ ფაქტთან შესაბამისობაში იმყოფება და არ არსებობს საწინააღმდეგო ფაქტი. ყველა მოჩვენებითი წინაღობა იოლი ასახსნელია. მე უკვე ვაჩვენე, რომ დედამიწა მოძრაობს, მაგრამ ჩვენ, მასზე მცხოვრებნი და მასთან ერთად მოძრავნი, ვერ ვამჩნევთ ამას. ეს ყოველდღიური გამოცდილება ვერ უარყოფს კოპერნიკის თეორიას. ასეთივე მდგომარეობაა დედამიწის სფერულ ფორმასთან დაკავშირებით. ოდესღაც, ადამიანები, ამ აზრს სრულიად უარყოფდნენ. დანტეს ეპოქაში თვლიდნენ, ასეთი დაშვება ეწინააღმდეგება საღ აზრს. თავის ცხოვრებისეულ გამოცდილებაზე დაყრდნობით, ამტკიცებდნენ, რომ დედამიწის სფეროს ფორმა

ანტიპოდები

ფერნანდო მაგელანი
1480-1521

თუ ექნება ადამიანები მის მოპირდაპირე მხარეს **თავდაყირა** („ფეხებით ზემოთ“) ივლიანო. ბევრი უაზრობა იყო გამოთქმული **ანტიპოდების** შესახებ. ამჟამად კი ყველას გადაავიწყდა ეს კამათი და ხალხი მიეჩვია იმ აზრს, რომ დედამიწა ბურთის მსგავსია. რაღა დარჩენოდათ სათქმელად, განა ვერ ხედავდნენ, რომ **აღმოსავლეთით წასული გემები დასავლეთიდან ბრუნდებოდნენ**? აგერ, 111 წელიწადია გასული, რაც **მაგელანის** გემი „ვიქტორია“ დედამიწის გარშემო მოგზაურობიდან დაბრუნდა. სამწუხაროდ ჩვენ ჯერ კიდევ არა გვაქვს ასეთი დამაჯერებელი და ეფექტური არგუმენტები დედამიწის მოძრაობის დასამტკიცებლად; ამაშია სიმართლისათვის ბრძოლის სიძნელე. მე შემიძლია დავამტკიცო მხოლოდ ის, რომ ყველა არგუმენტი, ნაუცბათევად მოტანილი კოპერნიკის სწავლების წინააღმდეგ, წარმოადგენს ან გაუგებრობას, ან უბრალოდ უმეცრებაა. ასევე დავასაბუთებ, რომ უფრო მარტივია აიხსნას მზის, მთვარისა და პლანეტების მოძრაობა კოპერნიკის ჰიპოთეზის საშუალებით, ვიდრე პტოლემაოსის თეორიით. იუპიტერის თანამგზავრები, სატურნის რგოლები, ვენერას „რკალი“ და მრავალი სხვა ფენომენი, რომელიც მე აღმოვაჩინე, კოპერნიკის თეორიის დამადასტურებელია; თუმცა ამის მკაცრად დამტკიცება ჯერ არ არსებობს. რაც შეეხება ბრალდებას, თითქოს „დიალოგი“ დავწერე კოპერნიკის თეორიის სამართლიანობის დასადასტურებლად, ვპასუხობ – ასეთი ასეთი განზრახვა არ მქონია. დავფარე მხოლოდ ის, რომ ეს ვერ



მაგელანის მოგზაურობის მარშრუტი

იოჰან კეპლერი
1571-1630

განვახორციელე, რადგან ამის დამამტკიცებელი, გადამწყვეტი არგუმენტები ჯერჯერობით ხელთ არ მაქვს.

ტორიჩელი – რას იტყვით ზღვის მიქცევა – მოქცევის თეორიის შესახებ? არ გიფიქრიათ, რომ ეს არის დამაჯერებელი დამტკიცება?

გალილეი – როდესაც მე ვწერდი ჩემ „დიალოგს“, არ ვანიჭებდი დიდ მნიშვნელობას ამგვარ დამტკიცებებს. როდესაც სამი წლის შემდეგ გადავიკითხე ის თავიდან, უნდა ვაღიარო, ამ ნაწილით დავრჩი უკმაყოფილო. ნაშრომის გადაკეთების შემთხვევაში, ან სულ ამოვიღებდი ამ ნაწილს, ან სხვანაირად დავწერდი მას. (ორიგინალში მოყვანილი ეს თეორია მცდარი აღმოჩნდა! ი.თ.)

ტორიჩელი – რატომ? ზღვის მიქცევა – მოქცევის თქვენეული ახსნა დედამიწის ორმაგი მოძრაობით, ძალიან დამაჯერებელია.

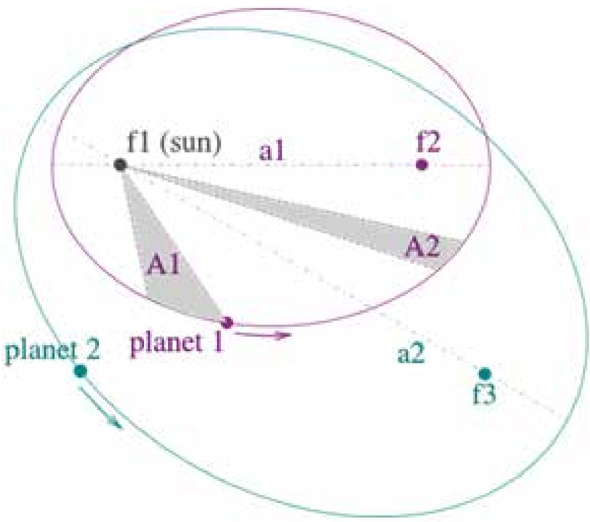
გალილეი – არ გამიგოთ არასწორად, ეჭვი არ მეპარება მიქცევა – მოქცევის ჩემეულ ახსნაში. მიუხედავად იმისა, რომ ამგვარი ახსნა ყველაზე მარტივია, ეს არგუმენტი არ არის გადამწყვეტი, სხვა არგუმენტებთან შედარებით.

ტორიჩელი – გავიგე.

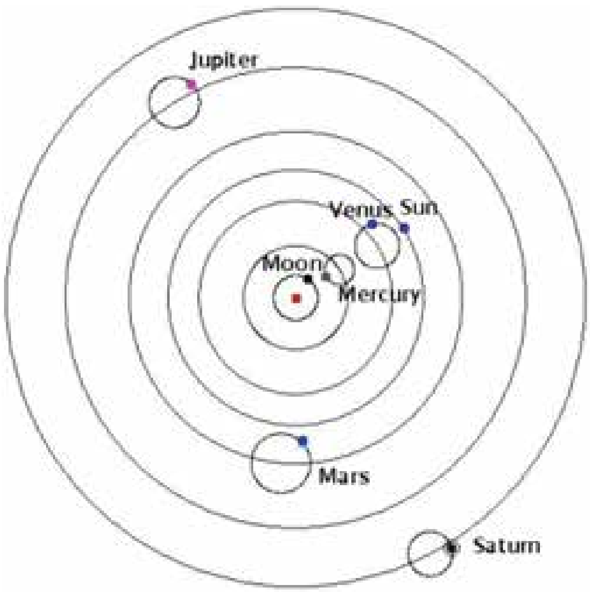
გალილეი – ვიცი, გაგიკვირდა, საჭირო იყო კი ამხელა შრომის დახარჯვა, თუ მაინც ვერ შევძლებდით საბოლოოდ გაგვერკვია ეს საკითხი. გთხოვ, არ შემეპასუხო! ვიცი, ამ აზრმა გაგიელვა თავში, რაც სრულიად ბუნებრივია. ჯერ კიდევ წინა თვეში ხშირად ვფიქრობდი ხომ არ ჯობდა მომეცადა რამდენიმე წელიწადი, სანამ არ ვიპოვნი დამაჯერებელ დასაბუთებას, მაგრამ კარგად რომ დავფიქრდი, ჩემ თავსვე ვუპასუხე, „არა“. უკვე მოხუცი ვარ განა შემიძლია დიდ ხანს ვიცადო. ალბათ მე იმ დროსაც კი ვერ მივაღწევ, როდესაც ნაპოვნი იქნება დამაჯერებელი არგუმენტები. თამამად შემიძლია ვთქვა: გინდ ჯერ არ იყოს გარკვეული საკითხის საბოლოო პასუხი, რაც ცნობილია უკვე საკმარისად მნიშვნელოვანია. ამიტომ ვალდებული ვარ გამოვთქვა ჩემი მოსაზრებები, რადგან ეს დაეხმარება ვინმე სხვას, მოძებნოს დამაჯერებელი მტკიცებულებანი. ისე ვშიშობ, რომ ეს ძალზე შორეული პერსპექტივაა. კოპერნიკის ჰიპოთეზაც კი საჭიროებს დახვეწას: ის არ აღწერს ზუსტად ხილული პლანეტების მოძრაობას. მე ვერ შევძელი ამეხსნა ეს განსხვავება თეორიასა და დაკვირვებას შორის.

ტორიჩელი – ვიცი, კეპლერი ამბობს, რომ თუ ყოველი პლანეტის ორბიტას განვიხილავთ როგორც ელიფსის ფორმას, რომლის ფოკუსშია მზე და დაუშვებთ, რომ პლანეტები მოძრაობენ მუდმივი სიჩქარით ისე, რომ სიჩქარის ნამრავლი პერპენდიკულარის (რომელიც ფოკუსიდან პლანეტის მოძრაობის ადგილამდეა, რომელშიც მეყსეულად იმყოფება) სიგრძეზე, მაშინ მიიღება საუკეთესო თანხვდომა თეორიასა და დაკვირვებების შედეგებს შორის.

გალილეი – ნუთუ კეპლერი გამოთქვამდა ამგვარ მოსაზრებას? საკვირველია, რომ ამ დრომ-



კეპლერის კანონები გრაფიკულად;
ორი პლანეტის შემთხვევა



პტოლემაოსის ეპიციკლური სისტემა

ქრისტოფერ კლავიუსი
1538-1612

დე ეს მხედველობიდან გამომეპარა. არა მგონია, რომ ამგვარი მოსაზრებების საჭიროება იყოს. რატომ უნდა იმოძრაონ პლანეტებმა მხოლოდ ელიფსურ ორბიტებზე? ხომ არ ჰგავს ეს მოსაზრება ეპიციკლებზე მოძრაობის ჰიპოტეზას, რომელიც მხოლოდ იმისათვის გამოიყენება, რომ შეათანხმონ პტოლემაოსის თეორია ფაქტებთან. ჰიპოთეზა, რომ პლანეტები მოძრაობენ წრიულ ორბიტაზე მუდმივი სიჩქარით, ერთადერთია, რომელიც მე შემიძლია ავხსნა მექანიკის კანონებით და ის ყველაზე მარტივია!

ტორიჩელი – ის, რაც მარტივია, ყოველთვის ჭეშმარიტი როდია! თქვენ, მასწავლებელო, დასცინეთ მათ, ვისაც არ უნდოდა დათანხმებოდა მთვარეზე მთების არსებობას, იმის მიუხედავად, რომ ისინი შეეძლოთ დაენახათ თქვენს ტელესკოპში. არ აღიარეს მხოლოდ იმიტომ, რომ მათი არსებობის შემთხვევაში, მთვარე სრულყოფილი სფერო ვერ იქნებოდა. ეს კი, მათი აზრით, შეუძლებელია.

გალილეი – რა თქმა უნდა სასაცილოა არგუმენტია, უფრო მეტად კი უბადრუკი, ვიდრე ის, რომლის მეშვეობითაც კლავიუსი ცდილობდა დაესაბუთებინა მთვარის სფერულობა. მისი მოსაზრებით: მთვარის ხეობები სავსეა უხილავი ნივთიერებით, ამიტომაა, რომ მიუხედავად მთებისა, რომლებსაც ჩვენ ვხედავთ, მთვარეს მაინც ზუსტი სფეროს ფორმა აქვს. ასეთივე წარმატებით შემიძლია განვაცხადო, რომ კლავიუსს ვირის ყურები აქვს, მხოლოდ ისინი გამჭვირვალე და უხილავი არიან, უგრძნობელნი არანაირად არ გამოირჩევიან. რაც შეეხება კეპლერის ელიფსებს, ეს ჰიპოთეზა აუცილებლად შესამოწმებელია. თუ არ შეიზღუდება ეკლესიის მიერ მეცნიერულ ძიებათა თავისუფლება, დედამიწის მოძრაობისა და ბუნების მოვლენების შესწავლისას, მაშინ ეს გაკეთდება ამ მოკლე ხანში. ისინი ამბობენ, ჩემი „დიალოგი" არის კოპერნიკის თეორიის მედროშე. მაგრამ ჩემი წიგნის მთავარი მიზანია – **მეცნიერების თავისუფლების მედროშეობა**. აი, რატომ დავწერე ის. აი, რატომ განვიცდი ყოველნაირ დევნას, რომელიც დაკავშირებულია ჩემს ნაშრომებთან. მე არ ვღელავ კოპერნიკის თეორიის ბედზე. ადრე თუ გვიან, ეს ჭეშმარიტება იქნება გაზიარებული. გაცილებით უფრო მაღელვებს ის, რომ თუ ამ ბრძოლას წავაგებ, მეცნიერული აზრი დიდი ხნით პარალიზებული იქნება, ყოველ შემთხვევაში, იტალიაში. რა მოხდება, თუ შევძლებ ნიდერლანდებში გაქცევას და, ჩემს ასაკში, ახალი ცხოვრების დაწყებას? ეს იქნება ნიშანი იმისა, რომ უარი ვთქვი ბრძოლაზე. სანამ იმედის ნაპერწკალი მაინც ბჟუტავს ჩემში, ამას არ ვიზამ. შენ კი გთხოვ, გადაეცი ჩემი საუკეთესო სურვილები შენს მეგობრებს! ძალზე სასიამოვნოა იმის გაგება, რომ არსებობენ ადამიანები, რომლებსაც უნდათ დახმარება გამიწიონ.

ტორიჩელი – თქვენ ყოველთვის შეგიძლიათ იქონიოთ ჩემი და ჩემი მეგობრების იმედი: შე-

ასკანიო პიკოლომინი
1590-1671

საძლებლობის ფარგლებში ყველაფერს გავაკეთებთ, მაგრამ ვშიშობ, თუ დავიცდით, შემდგომში დასახული გეგმის შესრულება ძალიან გვიანი იქნება. მშვიდობით, მასწავლებელო! შემატყობინეთ თუკი გადაიფიქრებთ. შევეცდები როგორმე დაგეხმაროთ.

გალილეი – მშვიდობით, ჩემო მეგობარო! მადლობელი ვარ ყველაფრისათვის, იმისთვისაც რაც გსურდა გაგეკეთებინა ჩემთვის. მშვიდობით!

სენიორა ნიკოლინი – სენიორ მე გავაცილებ სენიორ ტორიჩელის... ტორიჩელი ისეთი სასიამოვნო ახალგაზრდა ყმაწვილია... სენიორ გალილეი გასინჯეთ ეს შესანიშნავი ფლორენციული ჭერამი! მათი შემხედვარე – ყველა უბედურება გავიწყდება. მე დიდი ყურადღებით ვუსმენდი თქვენ დისკუსიას, თუმცა ყველაფერი ვერ გავიგე. როდესაც გექნებათ დრო, გთხოვთ ამიხსნათ ზოგიერთი რამ.

გალილეი – მზად ვარ თუნდაც ახლა. კატარინა, მე მიყვარს საუბარი თქვენთან მეცნიერების შესახებ, რადგან გაგაჩნიათ საღი, სქოლასტიკური პედანტიზმისგან განთავისუფლებური აზრი.

სენიორა ნიკოლინი – უმჯობესი ხომ არ არის რომ მოისვენოთ? ნუთუ არ დაიღალეთ წინა საუბრით?

გალილეი –არა, მხოლოდ ოდნავ ხასიათი გამიფუჭდა, სხვაფრივ კი სრულიად მხნედ ვარ და სიამოვნებით გაგესაუბრებით. მითხარით გეთაყვა, რა გაინტერესებთ?

სენიორა ნიკოლინი – სენიორ, მე ვერ გავიგე, ზუსტად რა თქვით კოპერნიკის მოძღვრების შესახებ; თქვენ ამბობთ, რომ დარწმუნებული ბრძანდებით მის სისწორეში, მაგრამ არ ძალგიძთ არაფრის დამტკიცება და თუ ეს არ შეგიძლიათ, მაშინ რატომღა გჯერათ მისი სიმართლის? თუ ფლობთ დამაჯერებელ არგუმენტებს, რაღა საჭიროა სხვა მტკიცებულება?

გალილეი – ეს ძალზე მწვავე კითხვაა და შეუძლებელია უპასუხოთ მას ერთი ან ორი სიტყვით; თავდაპირველად, იძულებული ვიქნები მოგიყვეთ მეცნიერული მეთოდის შესახებ, თუმცა ჯერ რაღაც უნდა გკითხოთ, რადგან უბრალოდ მკლავს ინტერესი. მომიყევით როგორ გაიგეთ, რომ თქვენი მსახური მითვალთვალებდა?

სენიორა ნიკოლინი – სიამოვნებით ბატონო, მოგიყვებით რაც მოხდა, რადგან თქვენ როგორღაც თვითონ გაიგეთ ამის შესახებ. მე მიკვირდა, რომ ჯუზეპე, ასე ერქვა იმ საძაგელს, ხანდახან ქრებოდა რამდენიმე საათით. წინა პარასკევს, შუადღისას ბაზარში წავედი და ის დავინახე დომინიკელ ბერთან მოჩურჩულე. ეს, რა თქმა უნდა საეჭვო იყო, მაგრამ მაშინ ამისათვის დიდი მნიშვნელობა არ მიმიცია, უბრალოდ გავიფიქრე, ეს კაცი უნდა შემოწმდეს. ამისათვის, ჩავსვი ერთი ჩემი შევარდენთაგანი ტომარაში და ვთხოვე პადრე კასტელის გამოეშვა ის ჩვენსკენ, ადრესატი კი თქვენ უნდა ყოფილიყავით. როდესაც კარზე დააკაკუნეს, ჯუზეპე გავგზავნე გასაღებად და ცოტა ხნის შემდეგ უკან მივყევი. შევარდენი ტალანში კორიდორში დაფრინავდა, ჯუზეპე კი გასისხლიანებული ხელებით ცდილობდა მის დაჭერას. ამგვარად, მე უკვე

ალექსანდრე მაკედონელი და გორდიას კვანძი

თითქმის დავრწმუნდი, მაგრამ კიდევ დამრჩა ეჭვი, იქნებ ის უბრალოდ ცნობისმოყვარეა. გადავწყვიტე კიდევ ერთხელ შემემოწმებინა. მივწერე თქვენი ჯანმრთელობის ანგარიში არქიეპისკოპოს ასკანიო პიკოლომინის, შემდეგ მელანი იატაკზე დავაქციე და წერილი განზრახ დავტოვე მაგიდაზე. დავუძახე ჯუზეპეს და ვუბრძანე დალაგება მე კი გავედი ტერასაზე, საიდანაც ვუთვალთვალებდი ჩემი პატარა ვენეციური სარკის საშუალებით. დავინახე როგორი ყურადღებით წაიკითხა წერილი ამ გარეწარმა და ჩანიშვნები გაიკეთა. უკვე სრულიად დავრწმუნდი მის ღალატში, მაგრამ საბოლოო შემოწმების მიზნით, მეორე დღეს ვკითხე: „შენ იცი წერა-კითხვა?“. მან მიპასუხა, რომ თავის სახელის დაწერასაც კი ვერ შეძლებს. „გაეთრიე ჩემი სახლიდან! ასეთი უმეცრები არ მჭირდება“ – ვთქვი მე. მართალი გითხრათ არ ვიცი, რატომ გაწყენთ თავს ამ გრძელი ამბით.

გალილეი – თქვენ სულაც არ მაბეზრებთ თავს. ვხედავ, რომ თქვენ, თუმცა არ შეგისწავლიათ მეცნიერული მეთოდი, გაცილებით განსწავლული ბრძანდებით მის შესახებ, ვიდრე პადუის უნივერსიტეტის ყველა პრიპათეტიკოსი. სინამდვილეში, აი რა გააკეთეთ თქვენ. შენიშნეთ, რომ ჯუზეპე სადღაც ქრებოდა და მოგინდათ გაგეგოთ, რა იყო ამისი მიზეზი. როცა დაინახეთ, როგორ ეჩურჩულებოდა დომინიკელ ბერს, ჩამოაყალიბეთ ჰიპოთეზა – „ჯუზეპე ჯაშუშია“. აღარ დაელოდეთ შემთხვევით მტკიცებულებებს, არამედ დაგეგმეთ ექსპერიმენტი შევარდენის საშუალებით. თქვენ დაისვით კითხვა, თუკი ჯუზეპე ჯაშუშია, ის გახსნის სხვისთვის განკუთვნილ გზავნილს. ასეც მოხდა. ზედაპირულად მოაზროვნე უკვე ჩათვლიდა, რომ მისი ეჭვი დამტკიცებულია, მაგრამ თქვენ დაისვით შემდეგი კითხვა: შესაძლოა თუ არა ჯუზეპეს საქციელის ახსნა სხვანაირად, მაგალითად უბრალო ცნობისმოყვარეობით? მართალია ექსპერიმენტმა თქვენთვის მოსალოდნელ შედეგამდე მიგიყვანათ, პასუხი ჯერ კიდევ საბოლოო არ იყო და თქვენ გაიაზრეთ ეს. ამიტომ კიდევ ერთი ექსპერიმენტი დაგეგმეთ, წერილის საშუალებით. შედეგი ისეთი იყო, როგორსაც მოელოდით. ამ ყველაფრის მიუხედავად ბოლო მცდელობას მიმართეთ და ჰკითხეთ მას, იცოდა თუ არა მან წერა-კითხვა. მსახურმა უარყო ცოდნა. ასეთმა პასუხმა სრულიად დაგარწმუნათ, რომ ის ჯაშუშია და გააძევეთ კიდეც სასახლიდან. მას ვისაც სურს ჩამოხსნას ფარდა ბუნების საიდუმლოს, არსით იგივე უნდა გააკეთოს. დაკვირვების საფუძველზე უნდა წამოაყენოს ჰიპოთეზა, შემდგომ დაადასტუროს ის კარგად დაგეგმილი ექსპერიმენტით. არასაკმარისია ბუნების მიერ შემთხვევით წარმოთქმული სიტყვების მიყურადება, აუცილებელია მისი გამოკითხვა. თუ ცდა არ იძლევა შედეგს, როგორსაც ველოდით, ჩვენი ჰიპოთეზა უარყოფილია. თუკი სასურველ პასუხს მივიღებთ, ჰიპოტეზა მაინც არ ჩაითვლება დამტკიცებულად. აუცილებელია ვკითხოთ ჩვენ თავს: იქნებ არსებობს სხვა ახსნა? თუკი ვიპოვნით მას და ახალი მოსაზრება განსხვავებული იქნება ჩვენი ჰიპოთეზისაგან, უნდა ჩატარდეს ახალი ექსპერიმენტი, რომ გადაწყდეს რომელია ჭეშმარიტი, თუ მეორე ექსპერიმენტის შედეგი შეესაბამება პირველ ჰიპოთეზას და ეწინააღმდეგება მეორეს, უკანასკნელი უნდა იქნეს დაწუნებული, ან უკეთეს შემთხვევაში შეცვლილი.

სენიორა ნიკოლინი – ასეთ შემთხვევაში პროცესი არასოდეს არ დასრულდება, რადგან ყოველთვის შესაძლოა მოიძებნოს მოცემული ექპერიმენტის ძალზე ჩახლართული ახსნა. მაგალითად, ჩვენ შეგვიძლია ცნობისმოყვარეობა ვუწოდოთ ჯუზეპეს მიერ წერილის წაკითხვის ფაქტს, მაგრამ ეს საკმარისი ახსნა არ იქნება იმისათვის, რომ გავიგოთ რატომ გადაწერა მან წერილი. მართალია, ამ ფაქტსაც შეიძლება მოვუძებნო სხვაგვარი ახსნა, მაგალითად, რომ მას მოეწონა ჩემი წერილის სტილი, შესაძლოა შეეშინდა მისთვის გადამწერის თანამდებობა არ შემეთავაზებინა და ამიტომ იცრუა წერა-კითხვა არ ვიციო. ხომ არ ნიშნავს ყოველივე ეს, რომ ჰიპოტეზები მხოლოდ უნდა დავიწუნოთ არასოდეს იქნება შესაძლებელი მათი დამტკიცება?

გალილეი – არა. ყოველი წინააღმდეგობრივი ექსპერიმენტის შემდეგ უნდა შევცვალოთ არასწორი ჰიპოთეზა და ამით ავარიდოთ თავი წინააღმდეგობას, მაგრამ ექსპერიმენტი, რომელის შედეგი ისეთია, როგორსაც ველოდით ჩვენი ჰიპოთეზის თანახმად და რომელიც არათავსებადია საწინააღმდეგო ჰიპოთეზასთან (თუ ის არ შეიცვალა), ადასტურებს ჩვენს ჰიპოთეზას. მრავალი შეთანხმებული ექსპერიმენტი გვარწმუნებს ჩვენი ჰიპოთეზის სისწორეში, იმ შემთხვევაშიც, თუ გადამწყვეტი დამტკიცება არ გაგვაჩნია.

სენიორა ნიკოლინი – მე თანდათან ვხვდები. მაგალითად, ვადებ საკერებელს ძველ, გაცვეთილ პერანგს მარტო იმისათვის, რომ მეორე წუთსვე გავხიო სხვა ადგილას. ბოლოსდაბოლოს გასაგები ხდება, უმჯობესია გადავაგდო ის პერანგი. სენიორ, ახლა მიპასუხეთ, როგორ დავრწმუნდეთ ჩვენი ჰიპოთეზის აბსოლუტურ სისწორეში?

გალილეი – სინამდვილეში, ფიზიკური ჰიპოთეზა ბუნების მოვლენის შესახებ არასოდეს არ შეიძლება, რომ დამტკიცდეს, ისე როგორც მათემატიკური თეორემა – გარკვეული აქსიომებიდან ლოგიკური დასკვნების მეშვეობით. ჰიპოთეზები (მოსაზრებები) ბუნების მოვლენის შესახებ თვითონ წარმოადგენენ გარკვეულ აქსიომებს, ხოლო აქსიომები „ჯერჯერობით„ შეუძლებელია დამტკიცდნენ მათემატიკურად. ეს ეხება აგრეთვე გეომეტრიის აქსიომებს. მათ სამართლიანობაში დარწმუნებული ვართ მხოლოდ იმიტომ, რომ ვიცით გეომეტრია, რომელიც ამ აქსიომებს ეფუძნება, სწორად აღწერს იმ სამყაროს, სადაც ჩვენ ვცხოვრობთ. ფიზიკური ჰიპოთეზების დამტკიცება საერთოდაც შეუძლებელია ფორმალური გზით.

ერთადერთი რაც ჩვენ შეგვიძლია გავაკეთოთ, ესაა გამოვიყვანოთ ამ ჰიპოთეზებიდან დასკვნები ექსპერიმენტალურად შემოწმებადი დამზერადი მოვლენების შესახებ და დავადასტუროთ ისინი. მაგრამ დასკვნის გაკეთება ჰიპოთეზიდან ხორციელდება მათემატიკური მეთოდების საშუალებით, ამიტომ ჩვენ ჰიპოთეზებს ვიყენებთ როგორც აქსიომებს, ხოლო დასკვნები გამოგვყავს მათემატიკური სიმკაცრით.

სენიორა ნიკოლინი – აი თურმე რატომაა საჭირო მათემატიკა ბუნების შესასწავლად.

გალილეი – ეს მხოლოდ ერთი მიზეზია; არის კიდევ ერთი, უფრო ღრმა მიზეზი: ბუნების ძირითადი კანონები გამოისახებიან მხოლოდ მათემატიკური ფორმით. ბუნების დიადი წიგნი შესაძლოა წაკითხულ იქნას მხოლოდ მათ მიერ, ვინც იცის ენა, რომელზედაც ისაა დაწერილი, და ეს ენა – მათემატიკაა. ის, ვინც ყბედობს ბუნების შესახებ, იმის მაგივრად, რომ დააკვირდეს მას და ექსპერიმენტების საშუალებით აიძულოს ის ალაპარაკდეს, ვერასდროს შეიცნობს მას. თუ ვინმემ მიაღწია წარმატებას და ბუნებამ დაილაპარაკა მასთან, ეს მათემატიკის ენაზე იქნება. სხვა შემთხვევაში ეს არ მოხდება. ხოლო თუ არ ვიცით ეს ენა? ჩვენ ვერც კი გავგებთ რაზე დაგველაპარაკა ის! ამავე დროს, არ არის საკმარისი ნაგლეჯ-ნაგლეჯ (აქა-იქ) ვიცოდეთ ეს ენა. სამწუხაროდ, ასეთი ადამიანი – ძალზე ბევრია. არასწორად იქნება გაგებული ბუნების ნათქვამი. თუ ის მათემატიკის ენაზე გამოთქვამს თავის ნააზრევს, შედეგი იქნება საცოდავი. არსებობს მრავალი ფილოსოფოსი, რომელსაც გააჩნია იქედნური, მე ვიტყოდი, ბარბაროსული წარმოდგენა მათემატიკის შესახებ. დღესდღეობით ისინი ვერ შეძლებენ უარყონ მისი აუცილებლობა, ისინი თვლიან, რომ ყველას ვინც იყენებს მათემატიკას ბუნების კვლევისას, არ ევალება იცოდეს ის სრულყოფილად. ეს ვირები ამბობენ, რომ მათ ჭირდებათ საბოლოო შედეგები. მათ არა ყოფნით დრო და სიბეჯითე იბრძოლონ დამტკიცებისათვის და თეორემების ზუსტი ფორმულირებებისათვის. ასე ფიქრი და ქმედება ისეთივე სისულელეა, როგორც ნათქვამი: „მოდით, მოვაცალოთ ხეს ფოთლები და ფესვები, რადგან ჩვენ მხოლოდ ნაყოფი გვჭირდება“. ნებისმიერი, ვისაც მათემატიკის ნაყოფით უნდა ტკბობა, უნდა, მოსწონს ეს მას თუ არა, მიიღოს მისი აზროვნების სტილი.

სენიორა ნიკოლინი – ვერ გამიგია, როგორ შეიძლება იყენებდე მათემატიკას და მისი სულის საწინააღმდეგოდ იყო განწყობილი. მე ახალბედა ვარ და ვიცი ზუსტად იმდენი, რამდენიც თქვენ, სენიორ გალილეი, მომიყევით ჩვენი საუბრების დროს. ჩემი მხრივ დიდი უტაქტობა იქნებოდა გამომეთქვა ამის შესახებ ჩემი მოსაზრება. და მაინც, მე რაღაც შევნიშნე. არც მინდა შეგაწუხოთ. თქვენთვის ხომ ცნობილია ის ყველაფერი, რაც მე შემიძლია ვთქვა.

გალილეი – გეთაყვა, გააგრძელეთ და გამიმხილეთ თქვენი მოსაზრება. ძალზე მაინტერესებს, რაზე გაამახვილეთ თქვენი ყურადრება. თქვენი მიუკერძოებელი გონი ხშირად ამჩნევს ისეთ დეტალებს, რომლებიც მხედველობიდან გამორჩებათ ხოლმე ჩემ მეცნიერ კოლეგებს.

სენიორა ნიკოლინი – შევნიშნე, რომ ბოლომდე მანამ არ მესმის მათემატიკური თეორემის არსი, სანამ საბოლოოდ არ გავიგებ მის დამტკიცებას. ხანდახან კი თეორემის შინაარსს ვხვდები მას შემდეგ, როცა მთავაზობთ მეორე, პირველისგან სრულიად განსხვავებულ დამტკიცებას. თავდაპირველად, ვაღიარებ, ვერ გავიგე, რისთვის იყო საჭირო მეორე ვერსიის არსებობა და რატომ რატომაა არასაკმარისი ერთი. შემდეგ განვსაჯე, სინამდვილეში, უფრო სასარგებლო იქნებოდა საკითხის განსხვავებული კუთხითდან განხილვა, ისევე, როგორც სკულპტურის დათვალიერებაა მიზანშეწონილი სხვადასხვა პოზიციიდან. რა თქმა უნდა, მესმის, თუ რატომ ანებებს თავს ბევრი ძნელ დამტკიცებას. მეც მეშინოდა არგუმენტების რთული და გრძელი ჯაჭვისა, საც ყურადღებით და ნაბიჯ-ნაბიჯ რომ უნდა მედევნებინა თვალი. ამ დროს თავს ვგრძნობდი, როგორც მეკლდეური, რომელსაც მწვერვალამდე მისაღწევ გზაზე სახიფათო ნაპრალები ელოდება. იგი ძალზე ყურადღებით უნდა იყოს, იზრუნოს იმაზე, რომ ფეხი არ დაუცდეს, მაგრამ, როგორც კი მიაღწევს მიზანს და მიმოიხედავს, დაძლეული სირთულეების ჯილდოდ შესანიშნავი ხედი გადაეშლება თვალწინ. თავიდან მე თავს ვაძალებდი გამეგო რთული დამტკიცებები მხოლოდ საბოლოო სილამაზის დანახვის იმედით, მაგრამ ახლახან მე ვიპოვნე მოულოდნელ და მახვილგონივრული დამტკიცების ნაბიჯებში ისეთივე სიხარული, რომელსაც მანიჭებს შესანიშნავი მუსიკა. ჩემის აზრით, იგივე ემართება მეკლდეურს: თავიდან ის თანხმდება დამქანცავ გამოცდას საბოლოო, მშვენიერი ხედის იმედით, მაგრამ ასვლის პროცესში, სირთულეების გადალახვა, ახალი ფანდების აღმოჩენა, სულ სხვა სიხარულს ანიჭებს.

გალილეი – ვერ წარმოიდგენთ, რამდენად სასიამოვნოა ჩემთვის თქვენი მოსმენა. ხანგრძლივი სიცოცხლის მანძილზე, მხოლოდ რამდენიმე მიმდევარმა გამიგო და კარგად შეიცნო მათემატიკის ჭეშმარიტი სულისკვეთება. როცა რაიმე ახალს გიყვებით, თვალებში გიყურებთ, გაკვირდებით. ველოდები, როდის აინთება მათში სინათლე, ნიშანი იმისა, რომ თქვენ გაიგეთ არსი. სინათლე, მსმენელის თვალებში, ყოველთვის უდიდეს სიხარულს მანიჭებს. ამგვარ სიამოვნებას განვიცდით, როდესაც, თითქმის ჩამქრალ ბუხარში, რომლის გაღვივებასაც ვცდილობთ, უცებ ცეცხლის ალს დავინახავთ. ზოგიერთი მათემატიკოსი აიძულებს თავის მოსწავლეებს დაიზუთხონ გარკვეული წესები და სხვადასხვა მექანიკური შაბლონი. ამგვარი სწავლება ბევრი არაფერი ღირს.

ჭეშმარიტი მათემატიკოსი ძალიან ცდილობს იმას, რომ მისმა მოსწავლეებმა გაუგონ მას, ის ცდილობს ასწავლოს მათ ფიქრი. ვინც იზეპირებს რეცეპტებს იმის მაგივრად, რომ ღრმად გაითავისოს არსი, ვერასოდეს გამოიყენებს მათ სწორად. კარგად გამოთვლა შესაძლებელია მხოლოდ ფიქრით. ვინც ამას დაუფიქრებლად გააკეთებს, საკმაოდ რთულ, არასაჭირო გზას გაივლის. შესაძლოა, შეცდომა არც დაუშვას, მაგრამ შედეგი უსარგებლო იქნება. ამასთან, თქვენს ნათქვამს მინდა დავამატო კიდევ ორი მოსაზრება. უპირველეს ყოვლისა, მათემატიკა არა მარტო სასარგებლო და სრულიად აუცილებელია მათთვის, ვინც ცდილობს გაიგოს ბუნება ან გამოიყენოს მისი ძალა, მაგალითად მანქანების აგებისას, აგრეთვე ის საინტერესო, მშვენიერი, წარმტაცი და გასაოცარი თავგადასავალია ადამიანის გონებისა. ასე მგონია, სილამაზე მათემატიკის არა დამხმარე და დამატებითი თვისებაა, არამედ ერთერთი მახასიათებელი განსაკუთრებულობა. სიმართლე ყოველთვის ლამაზია, სილამაზე ყოველთვის ჭეშმარიტი. ძველმა ბერძნებმა ეს ძალიან კარგად იცოდნენ. მათ კი, ვისაც მათემატიკაზე ბარბაროსული წარმოდგენა აქვთ, არ ესმით ეს. ვერ ხედავენ ამ სილამაზეს, ან ხედავენ, მაგრამ ძალზე ეჭვიანები არიან. ფიქრობენ, რომ ეს ზედმეტი ფუფუნებაა და პირს იბრუნებენ მისგან. ამით ჭეშმარიტებას უახლოვდებიან ჰგონიათ. ისინი პრაქტიკული ადამიანების სახეებით სულელურად იღიმებიან და ეზიზღებათ ყველა ვინც ჭეშმარიტად არის განმსჭვალული მათემატიკის სულისკვეთებით. თუმცა არაფერი არაა ისეთი უგნური, როგორც ეს ქედმაღლური ზიზღი, რომელიც ააშკარავებს საკუთარ უძლურებას. ასეთივე ზიზღი შეეყარა ალექსანდრე დიდს, რომელმაც სიბრაზისგან გაჩეხა გორდიას კვანძი ხმლით, რადგან ვერ შეძლო ამ ამოცანის ამოხსნა. აღმოსავლეთელი ტირანების კარზე ხელოვნება და მეცნიერება ფუფუნება იყო მხოლოდ, ძველ საბერძნეთში კი ჩვეულებრივი ცხოვრების ორგანულ ნაწილს შეადგენდა. ორივე ეხმარებოდა ადამიანს, შეეცნო თავისი თავი, გარემომცველი სამყარო. ორი ათასი წლის შემდეგ ჩვენ ვაპირებთ ბერძენთა საქმეების გაგრძელებას. უნდა დავიწყოთ იქედან, სადაც გაჩერდა არქიმედე.

სენიორა ნიკოლინი – მართალი ბრძანდებით. ეს ძალიან წააგავს ჩვენი საუკუნის ფერმწერების საქციელს. ახლა დავუბრუნდეთ იმ ორ დამატებას, რომელიც ჩემ ნათქვამთან მიმართებაში გაქვთ, სად არის მეორე?

გალილეი – მეორე დამატება მჭიდროდაა დაკავშირებული პირველთან. აქამდე მე ვლაპარაკობდი მათემატიკის მშვენიერებაზე, იმაზე, რომ ჭეშმარიტად გაგება ამ მეცნიერებისა, ისეთსავე სიამოვნებას მოგანიჭებთ, როგორსაც ადამიანის მიერ შექმნილი ხელოვნების ნიმუშის შეგრძნება და ეს გამოვლინდება თვალებში სინათლის აელვარებით, ოღონდ გარჯის გარეშე არაფერი მოხდება. თქვენი შედარება მეკლდეურთან ძალზე მართებულია. შეუპოვარი გონებრივი მუშაობის გარეშე არავის ძალუძს შორს წაიწიოს მათემატიკაში, მაგრამ ყოველ ადამიანს, რომლისთვისაც ნაცნობია შემეცნების სიხარული, არ დაინანებს დახარჯულ ძალისხმევას. ამ მეცნიერების სწავლების მთავარი მიზანია, აზიაროს ადამიანი ამგვარ სიხარულს და მასზე დაფუძნებით ასწავლოს მას მოწესრიგებული და ლოგიკური აზროვნება, რომელიც მათემატიკაში სრულიად აუცილებელია. ეს ძალზე ფასეულია, რადგან ლოგიკური აზროვნების ხელოვნება, ნებისმიერ შემთხვევაში გამოიყენება.

სენიორა ნიკოლინი – ვიღაც-ვიღაცეები გვარწმუნებენ, თუ ყველა დამოუკიდებლად ფიქრს დაიწყებს, ეს ქაოსს გამოიწვევსო. ისინი ამბობენ, მეცნიერმა უნდა მისდიოს ავტორიტეტებს. როგორია ამაზე თქვენი მოსაზრება?

გალილეი – მთელი ცხოვრება ვებრძოდი ასეთ შეხედულებებს. მხოლოდ ერთ მაგალითს მოვიტან. არისტოტელე თვლიდა, რომ მოძრაობის შესანარჩუნებლად საჭიროა ძალა. მაგრამ ეს არასწორია. ჩემი ნაშრომის მთავარი თეზისი, გამყარებული მრავალი მტკიცებულებით, მდგომარეობს შემდეგში: ძალა აუცილებელია მხოლოდ არათანაბარი მოძრაობისათვის, თუ მოძრავ სხეულზე ძალა არ მოქმედებს, მაშინ ის ინარჩუნებს თანაბარ მოძრაობას. ორი ათასი წელი ადამიანებს არისტოტელეს ავტორიტეტის უფრო სჯეროდათ, ვიდრე თავიანთი თვალების. ყოველდღიურ ცხოვრებაში, ისევე როგორც მეცნიერებაში, მნიშვნელოვანია, რომ ნებისმიერს შეეძლოს იფიქროს თავის მაგივრად. ადამიანს, ცხოველისაგან განსხვავებით, ფიქრის შესაძლებლობა აქვს. ის, ვისაც არ სურს იფიქროს დამოუკიდებლად, ცხოველის დონეზე ეშვება. ჩვენ ძალზე გადავუხვიეთ საუბრის ძირითადი თემიდან, ამიტომ არ ვიცი, ვუპასუხე თუ არა თქვენ კითხვას.

სენიორა ნიკოლინი – უნდა გამოგიტყდეთ, ზუსტად ვერ გავიგე რას გულისხმობდით, როცა ამბობდით, რომ ჯერ ვერ იპოვეთ კოპერნიკის თეორიის სიმართლის დამადასტურებელი გადამწყვეტი მტკიცებულება. ადრე თქვენ ბრძანებდით, რომ ის არ არსებობს.

გალილეი – ეს ასე არაა სენიორა. დასაბუთება ჰიპოთეზისა, თითქოს დედამიწა უძრავად ძევს სამყაროს ცენტრში და მზე მის ირგვლივ ბრუნავს, შესაძლებელია წარმოვადგინოთ. საქმე იმაშია, რომ კოპერნიკის თეორიის გადამწყვეტ მტკიცებულებაზე საუბრისას, მე მხედველობაში მაქვს ისეთი დაკვირვება ან ექსპერიმენტი, რომელიც ვერანაირი გონიერი გზით ვერ ახსნის სამყაროს პტოლემაოსის წარმოდგენით. გასაგები რომ იყოს, რატომაა ეს კითხვა ასეთი ძნელი, გაიაზრეთ შემდეგი ექსპერიმენტი. წარმოიდგინეთ, იმყოფებით გემზე, კაიუტაში ფანჯრების გარეშე; გაღ-

ვიძებისას არ იცით, დგას გემი, თუ მოძრაობს სწორხაზოვნად მუდმივი სიჩქარით, ამიტომ ვერც შეამჩნევთ განსხვავებას ამ ორ მდგომარეობას შორის, თუნდაც სათანადო მოწყობილობები გქონდეთ. რაიმე საგნის დაცემის შემთხვევაში, ვარდნა განხორციელდება ერთი და იგივე კანონის შესაბამისად, მიდის გემი თუ გაჩერებულია. ყველაფერი სხვაგვარად იქნება, თუ მოძრაობისას სიჩქარე ან მიმართულება იცვლება. სანამ გემი მიდის პირდაპირ და თანაბარი სიჩქარით, ამას თქვენ ვერ შეამჩნევთ დაკეტილი კაიუტიდან, თუ ფანჯარა გაქვთ, შეგიძლიათ მხოლოდ იმის დადგენა, მოძრაობს თუ არა გემი ნაპირთან მიმართებაში. დავუშვათ, ღია ზღვაში, ხედავთ კიდევ ერთ გემს. ამჩნევთ, რომ თქვენი გემი გადაადგილდება იმ მეორის მიმართ, მიუხედავად ამისა, თქვენ მაინც არ იცით, მოძრაობს მხოლოდ თქვენი გემი, ის მეორე, თუ ორივე ერთად.

სენიორა ნიკოლინი – გასაგებია, მაგრამ კოპერნიკის თეორიის თანახმად, დედამიწა არ მოძრაობს წრფის გასწვრივ, იგი მზის გარშემო ბრუნავს. ხომ არ ჰგავს ეს იმ შემთხვევას, როდესაც გემი იცვლის მოძრაობის მიმართულებას და ამას, როგორც თქვენ ბრძანეთ, დახურულ კაიუტაშიც კი მივხვდებით.

გალილეი –გემი მოძრაობის მიმართულებას თუ ძალიან ნელა ცვლის, ამის მიხვედრა ძნელია, ჩვენ, უბრალოდ, გარკვეული ხნის შემდეგ აღმოვაჩენთ გეზის მკვეთრ ცვლილებას. დედამიწა ერთ ბრუნს მზის გარშემო ერთი წელი უნდება, ამიტომ ერთი საათისა, თუ ერთი წუთის განმავლობაში მიმართულების ცვლილება, ძალზე მცირეა, რაც ართულებს დაკვირვების წარმოებას.

სენიორა ნიკოლინი – და რას იტყვით დედამიწის თავისი ღერძის გარშემო ტრიალის შესახებ? როგორც გავიგე, კოპერნიკის თანახმად, დედამიწა აკეთებს ერთ სრულ ბრუნს დღე-ღამის განმავლობაში. შეგვიძლია თუ არა როგორმე შევნიშნოთ ეს მოძრაობა?

გალილეი – ახლა ვხედავ, კარგად გესმით, სახელდობრ, როგორ გადამწყვეტ არგუმენტს ვეძებ, თუმცა ჯერ-ჯერობით ვერ მიპოვია. მაინც ვარ დარწმუნებული, რომ მეცნიერება მალე მიაკვლევს მას.

სენიორა ნიკოლინი – მე კიდევ ერთი კითხვა მაქვს. ბოლომდე ვერ გავიგე, რა თქვით მათემატიკის ენაზე დაწერილ ბუნების კანონების შესახებ. უფრო გავერკვეოდი, თუ თქვენ რაიმე მაგალითს მოიტანდით.

გალილეი – გთხოვთ, მობრძანდით ფანჯარასთან. შეხედეთ ამ ბურთს. მე მას ვისვრი. დააკვირდით, როგორ განახორციელებს ის ვარდნას მიწაზე. რა შენიშნეთ?

სენიორა ნიკოლინი – მე მეჩვენება, რომ ის სულ უფრო და უფრო ჩქარა ვარდება.

გალილეი – მართალი ბრძანდებით, მაგრამ როგორ იცვლება სიჩქარე? თუ თქვენ განიხილავთ მანძილებს, რომლებიც ბურთმა თანაბარი დროის ინტერვალებში დაფარა, დაინახავთ, რომ ისინი ერთმანეთთან ისეთივე მიმართებაში არიან, როგორც კენტი რიცხვები: მეორე წამის განმავლობაში ბურთი გადის სამჯერ მეტ მანძილს ვიდრე პირველ წამში. მესამე წამის განმავლობაში – ხუთჯერ, მეოთხე წამის – შვიდჯერ და ა.შ. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თავისუფლად ვარდნილი სხეულის სიჩქარე თანაბრად იზრდება. ესაა თანაბრად-არათანაბარი მოძრაობა. ადრე სქოლასტებს ჰქონდათ საქმე ასეთი ტიპის მოძრაობასთან, მაგრამ ისინი არ სარგებლობდნენ მათემატიკით, ხოლო ეს მოძრაობა მათემატიკის გარეშე არ აღიწერება და არც მისი ჭეშმარიტად გაგებაა შესაძლებელი.

სენიორა ნიკოლინი – ძალიან საინტერესოა.

გალილეი – მოიცადეთ, დავასრულოთ ჩვენი საუბარი ვარდნილ სხეულებზე. ყველაფერი, რაც ადრე ვთქვი, შემდეგი სიტყვებით გამოიხატება: თავისუფლად ვარდნილი სხეულის სიჩქარე იზრდება დროის პროპორციულად. ახლა განვიხილოთ გზა რომელსაც გაივლის ვარდნილი სხეული, ვარდნის დასაწყისიდან, რაღაც ნებისმიერ მომენტამდე. აღვნიშნოთ ის მანძილი, რომელსაც სხეული პირველი წამის განმავლობაში გადის, a– თი. მაშინ, როგორც უკვე მოგახსენეთ, მეორე წამში გავლილი იქნება $3a$. სრულად კი $a + 3a = 4a$. გახსოვთ, რას ვამბობდი მესამე წამის შესახებ?

სენიორა ნიკოლინი – რა თქმა უნდა, მანძილი $5a$-ს ტოლია. შესაბამისად, პირველი სამი წამის შემდეგ, სხეულს გავლილი ექნება $4a + 5a = 9a$, მეოთხე წამის განმავლობაში $7a$ – და სრული გზა მთლიანად იქნება $7a + 9a = 16a$.

გალილეი – ამგვარად, ვარდნილ სხეულს, ორი წამის შემდეგ, დაფარული ექნება მანძილი $4a$, სამი წამის მერე $9a$ და ოთხი წამის შემდეგ $16a$. ამჩნევთ თუ არა რაიმე კანონზომიერებას?

სენიორა ნიკოლინი – მეჩვენება, რომ ვარდნის დაწყებიდან გავლილი მანძილი გასული დროის კვადრატის პროპორციულია. ასე არაა?.

გალილეი – დიახ, სწორედ ასეა და არა მარტო მაშინ, როდესაც დრო არის 1, 2, 3, 4... წამი, არამედ ზოგადად.

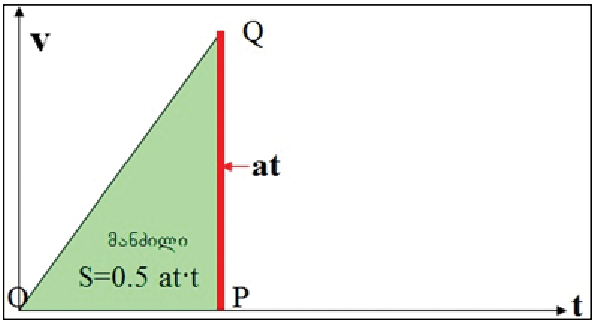
სენიორა ნიკოლინი – როგორ შეიძლება ამის დამტკიცება ზოგად შემთხვევაში?

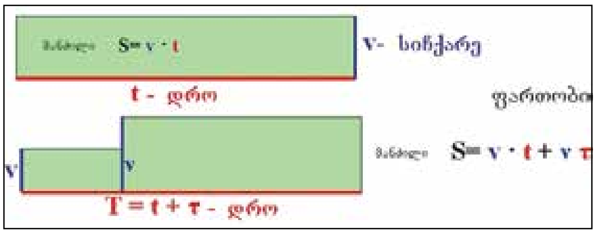
გალილეი – ძალიან მარტივად. დახატეთ სწორი ხაზი. ამ ხაზზე ამოირჩიეთ წერტილი O, რომელიც შეესაბამება ვარდნის პროცესის საწყის ადგილს. მეორე წერტილი P იმავე წრფეზე, რომელიც O წერტილის მარჯვნივაა, შეესაბამება ვარდნის დაწყებიდან t მომენტს. ამ P წერტილში ავღმართოთ O P წრფის მართობი და ავირჩიოთ მასზე რაიმე წერტილი Q, რომლიდანაც მანძილი P წერტილამდე, ტოლია ვარდნილი სხეულის სიჩქარისა t მომენტში. რადგან სიჩქარე დროის პროპორციულია, წერტილი Q იქნება, მიმიხვდით სენიორა.

სენიორა ნიკოლინი – მაგრამ როგორაა შესაძ-

ლებელი ამ ფიგურაზე სრული განვლილი მანძილის გამოთვლა?

გალილეი – ძალზე მარტივად სენიორა: – მანძილი რომელიც გავლილია t მომენტამდე, OPQ სამკუთხედის ფართობის ტოლია.





სენიორა ნიკოლინი – რატომ?

გალილეი – მუდმივი სიჩქარის შემთხვევაში გავლილი მანძილი ტოლია სიჩქარის ნამრავლისა დროზე. გავლილი მანძილი ტოლია მართკუთხედის ფართობისა, რომლის ერთი გვერდი წარმოსახავს დროს, ხოლო მეორე სიჩქარეს. როდესაც სიჩქარე ცვალებადია, სიტუაცია ხდება უფრო რთული, მაგრამ მანძილი ისევ და ისევ ფართობის ტოლია. მაგალითად, თუ ჯერ სიჩქარე მუდმივია, რაღაც ხნის განმავლობაში, ხოლო მერე მყისიერად იცვლება, (იზრდება რაღაც მნიშვნელობამდე), მაშინ განვლილი მანძილი ტოლია იმ ფიგურის ფართობისა, რომელიც ორი მართკუთხედისაგან შედგება. თუ სიჩქარე რამდენჯერმე იცვლება მყისიერად, მაგრამ ყოველთვის მუდმივი რჩება, მაშინ განვლილი მანძილი იმ ფიგურის ფართობის ტოლია, რომელიც რამდენიმე მართკუთხედისაგან შედგება. თუ სიჩქარე იწყება ნულიდან, იცვლება უწყვეტად და თანაბრად, მაშინ განვლილი მანძილი სამკუთხედის ფართობის ტოლია. ეს რომ გაიგოთ, თქვენ უნდა განიხილოთ სამკუთხედი, რომელიც შედგება უსასრულო რაოდენობა უსასრულოდ წვრილი სხვადასხვა სიმაღლის მქონე მართკუთხედებისაგან

სენიორა ნიკოლინი – გასაოცარია. და ეს საკითხი განიხილება თქვენ წიგნში მოძრაობის მათემატიკური თეორიის შესახებ?

გალილეი – დიახ, ასევე სხვა მრავალი რამ. იმგვარად, როგორც შესაძლებელია გამოვთვალოთ, თუ სად იქნება ქვა ვარდნის დაწყებიდან ორი ან სამი წამის შემდეგ, შესაძლებელია იმის ჩვენებაც, რომ ნებისმიერად ნასროლი ქვის ტრაექტორია პარაბოლაა. ეს საკითხი საინტერესოა არა მარტო პრაქტიკული მნიშვნელობის გამო. მასზე დაყრდნობით, შემიძლია ვაჩვენო როგორ უნდა მოვახდინოთ სხვადასხვა ტიპის მოძრაობების კომბინაცია. მე არ მესმის, რატომ არავინ, შესაძლოა მხოლოდ არქიმედეს გარდა, ზედმიწევნით არ იკვლევდა, თუ რა ხდება, როდესაც ხელიდან უვარდებათ ან ისვრიან ქვას. ჯერ კიდევ პტოლემაოსი ცდილობდა გამოეთვალა მზის, მთვარისა და პლანეტების ხილული ორბიტები. მათზე დაკვირვება მიდიოდა დღეებისა და წლების განმავლობაში. მე ვამტკიცებ, რომ მოძრაობა აქ, დედამიწაზე, ექვემდებარება იგივე კანონებს, რასაც ცაში.

სენიორა ნიკოლინი – ანუ სამყარო ჰგავს დიდ საათს. შესაძლებელია ზუსტად გავთვალოთ, როგორ ბრუნავენ მისი მექანიზმის ბორბლები, ყველაზე პატარები და ყველაზე დიდები.

გალილეი – ეს გასაოცარი კანონზომიერებანი ბუნების წიგნის მხოლოდ ერთ თავს შეადგენენ, მაგრამ იქვე კიდევ არის სხვა მრავალი, ასევე არაპროგნოზირებადი, შემთხვევითი მოვლენები.

სენიორა ნიკოლინი – რა გაქვთ მხედველობაში?

გალილეი – წარმოიდგინეთ ახალი ვარსკვლავები, რომლებიც ერთხელ, მაგალითად სამოცი წლის წინათ, უეცრად გაჩნდნენ ცაზე. ერთ ხანს კაშკაშებდნენ სულ უფრო და უფრო ძლიერად, მერე კი უეცრად გაქრნენ ისევე მოულოდნელად, როგორც გაჩნდნენ. გაიხსენეთ მზის ლაქები, ზედაპირთან ახლოს, მის გარშემო რომ მოძრაობენ. ისინი ჩნდებიან, ტრიალებენ, ხან იზდებიან, ხან მცირდებიან და ქრებიან. სამყარო არანაირად არ ჰგავს არავითარ მექანიზმს. ხანდახან ის უფრო ჭირვეულ ქალს წააგავს.

სენიორა ნიკოლინი – მეჩვენება, რომ ბუნების წიგნის ზოგიერთი თავი მათემატიკური ენით არ უნდა იყოს დაწერილი, რადგან მათში საუბარი მიდის მოვლენებზე, რომელთა წინასწარ გათვლა შეუძლებელია.

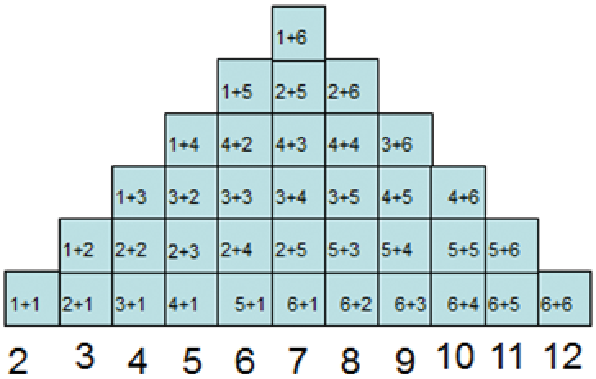
გალილეი – თქვენ ცდებით სენიორა, აქამდე პირველი მცდელობა იყო, შემთხვევითი მოვლენების მათემატიკურად აღწერისა, თუმცა ამის გაკეთება შესაძლებელია, და ეს, ამას წინათ, ძალზე მარტივ მაგალითზე ვაჩვენე.

სენიორა ნიკოლინი – რომელზე?

გალილეი – კამათელის თამაში ძველია, მაგრამ ჯერ კიდევ პოპულარული. როგორ „დაჯდება“ ის, მთლიანადაა დამოკიდებული შემთხვევაზე. მის წახნაგებზე დატანილია რიცხვები 1, 2, 3, 4, 5, 6, როცა მას ვისვრით, დარწმუნებით მხოლოდ იმის თქმა შეიძლება, რომ ამ რიცხვებიდან ერთ-ერთი „დაჯდება“, მაგრამ ბევრჯერ გამეორების შემთხვევაში, გარკვეულ კანონზომიერებას აღმოვაჩენთ: ყოველი რიცხვი, ამ ექვსეულიდან, თითქმის ერთნაირი რაოდენობით ამოვა. კიდევ უფრო საინტერესოა, თუ ერთდროულად ორ კამათელს ავაგდებთ და ავჯამავთ „დამჯდარ“ რიცხვებს. რას უნდა ველოდოთ ამ შემთხვევაში?

სენიორა ნიკოლინი – ეს ხომ ცხადია, ჯამი შე-

კამათელი



ვარიანტები

საძლოა იყოს ნებისმიერი რიცხვი 2-დან 12-ის ჩათვლით.

გალილეი – მართალია, მაგრამ ეს 11 შესაძლო რიცხვი გამოვა არა ერთნაირი სიხშირით. ყველაზე მეტი რაოდენობით იქნება 7, ყოველი შემთხვევის თითქმის ერთი მეექვსედი, შემდეგ იქნება რიცხვები 6 და 8, ხუთი ოცდამეთექვსმეტედი. 5 და 9 – ერთ მეთორმეტედ შემთხვევაში, 3 და 11 – ერთ მეთვრამეტედში, და ბოლოს, 2 და 12 შეადგენენ ყველა გდების ერთ ოცდამეთექვსმეტედს.

სენიორა ნიკოლინი – უცნაურია. ასე რატომ გამოდის?

გალილეი – მიზეზი ძალზე მარტივია. ჩვენ შევიძლია ჯამი ოთხი, ანუ ერთიანისა და სამიანის ნაკრები, მივიღოთ სამი გზით. მაგალითისათვის, პირველად კამათელი „დაჯდა“ ჯერ ერთიანზე, მერე სამიანზე, მეორედ პირიქით, სამიანზე და ერთიანზე. კიდევ რჩება მესამე ვარიანტი, როდესაც ორივე კამათელი ორიანზე „დაჯდა“. ამავე დროს, ჯამი თორმეტი, შესაძლებელია მივიღოთ მხოლოდ ერთადერთ შემთხვევაში, როდესაც ორივე კამათელი „დაჯდება“ ექვსიანზე. ამიტომაა, რომ ჯამი ოთხიანი, სამჯერ უფრო ხშირად გამოვა, ვიდრე თორმეტი.

სენიორა ნიკოლინი – სენიორ, ოდესმე მეც ვცდი ვითამაშო კამათელი თქვენი წესების თანახმად. თქვენ თვლით, რომ ყველაფერი ამის ცოდნა, მოგცემთ საშუალებას მოიგოთ ბევრი ფული?

გალილეი – თამაში რჩება თამაშად, რადგან წესებით დადგენილია, რომ არც ერთი მოთამაშე ცალკე, არ აღმოჩნდეს უკეთეს პირობებში, მაგრამ როდესაც წესები დადგენილია არასწორად, შესაძლებელია ბევრის მოგება. მაგალითად, თუ გაქვთ იმდენი ფული, რომ ითამაშო მანამ, სანამ შემთხვევითობის კანონები არ იქნება თქვენდამი კეთილგანწყობილი.

სენიორა ნიკოლინი – ვერ ვიფიქრებდი, რომ მათემატიკაა კამათლის თამაშის საფუძველში. რა ჰქვია ამ დარგს?

გალილეი – ის ისეთი ახალგაზრდაა, ჯერ სახელიც კი არ აქვს. შეიძლება უწოდოთ შემთხვევითობების აღრიცხვა.

სენიორა ნიკოლინი – რატომ არაფერი მსმენია ამის შესახებ?

გალილეი – მათემატიკოსები მიეჩვივნენ შეისწავლონ რაც კანონზომიერი და ზუსტია. აქამდე გაურბოდნენ შემთხვევითობებს; ეჩვენებოდათ, რომ ამგვარი მოვლენების შესწავლა მათი კომპეტენცია არ არის. არისტოტელეს ავტორიტეტმა გაამყარა მიმართულება, რომლის თანახმადაც მათემატიკას საქმე უნდა ჰქონდეს რაიმე უცვლელთან, ხოლო შემთვევაზე ძალიან და გასაოცრად ხომ არაფერი არ იცვლება? გარდა ამისა, არსებობენ სხვა და უფრო ძველი ცრურწმენებიც. მაგალითად, ასეთი ჩვევა, დაინახო კამათლის გდებაში, ჩიტების ფრენაში, სამსხვერპლო ცხოველის ღვიძლის არასწორ ფორმასა და ა.შ. – „ღვთის ნების“ (განგების) გამოხატულება. ეს ყველაფერი იყო ადამიანების საკრალური შიშის მიზეზი, როდესაც ისინი შემთხვევით მოვლენას ხვდებოდნენ. უმეტესობა თვლიდა, რომ ღვთის მგმობელობასა ამგვარი მოვლენების ახსნა ადამიანის გონის საშუალებით. არადა, ჩემი თვალსაზრისია – ადამიანს აქვს გონი, რათა ის გამოიყენოს!

სენიორა ნიკოლინი – მე მომწონს მათემატიკის შესაძლებლობა, როგორც თქვენგან მაქვს გაგონილი, გადააქციოს ყველაზე რთული მარტივად; მათემატიკური ჭეშმარიტების ჩირაღდანზე მრავალი მოვლენა, ძნელი და გაუგებარი, ნათელი და მარტივი ხდება.

გალილეი – ეს მართალია, მაგრამ ხანდახან მათემატიკა გამოაჩენს, რომ რაღაც, ერთი შეხედვით მარტივი, სინამდვილეში ძალიან რთულია.

სენიორა ნიკოლინი – სენიორ მაინც რა გაქვთ მხედველობაში?

გალილეი – მოგიყვანთ ერთ უბრალო მაგალითს. ამ ფურცელზე დავწეროთ მთელი რიცხვები ნულიდან და ასე შემდეგ: 0, 1, 2, 3, ... წარმოვიდგინოთ, მიმდევრობა გრძელდება უსასრულოდ. ახლა მათ შორის გამოვარჩიოთ რიცხვები, რომლებიც რაიმე რიცხვის კვადრატს წარმოადგენენ. დავიწყებთ რა მოძრაობას მარცხნიდან და წავალთ მარჯვნივ, შევნიშნავთ, რომ სულ უფრო იშვიათად შეგვხვდება ასეთი რიცხვები, რადგან მანძილი ორ მეზობელ ასეთ რიცხვს შორის იზრდება.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	...
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	...

სენიორა ნიკოლინი – მართლაც, მანძილები – კენტი რიცხვები: 1, 3, 5, 7, 9, ...

გალილეი – გავს ვარდნილი ქვის განვლილ მანძილებს, მაგრამ მითხარით, გეთაყვა, ვიქნები თუ არა მართალი, თუ ვიტყვი, რომ მიმდევრობაში „კვადრატული“ რიცხვები უფრო ცოტაა ვიდრე მთელი რიცხვები?

სენიორა ნიკოლინი – რა თქმა უნდა.

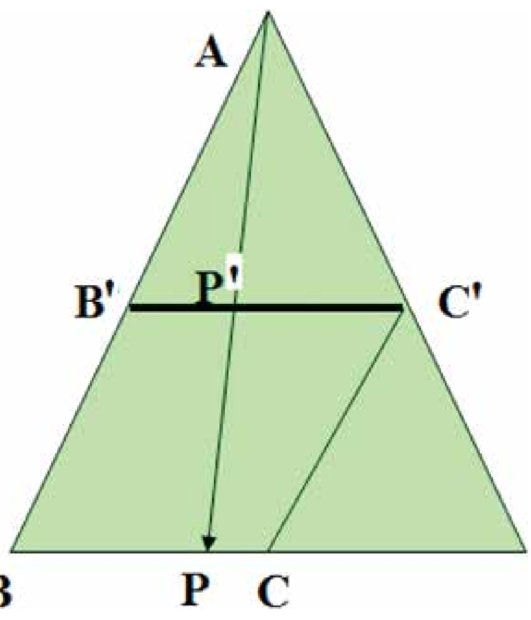
გალილეი – მაშინ დავწეროთ ხელახლა ეს მიმდევრობა და ყოველ რიცხვს მივუწეროთ ქვემოთ მისი კვადრატი. მეორე სტრიქონში მხოლოდ „კვადრატული“ რიცხვები დაგროვდა, ასე არ არის? თანაც, თითოეული მხოლოდ ერთხელ გვხვდება.

სენიორა ნიკოლინი – დიახ.

გალილეი – ისინი ერთმანეთის ქვემოთაა განთავსებული, ამგვარად ქვედა სტრიქონში იმდენივე რიცხვია, რამდენიც ზედაში. კიდევ გააგრძელებთ მტკიცებას, თითქოს „კვადრატული“ რიცხვები უფრო ცოტაა, ვიდრე მთელი? (იხ. ცხრ.)

სენიორა ნიკოლინი – ამ მაგალითმა საბოლოოდ დამაკარგვინა ორიენტაცია. რაშია საქმე?

გალილეი – არსი შემდეგში მდგომარეობს: ***რაც სამართლიანია სასრული სიმრავლეებისათვის, არაა აუცილებელი იყოს სამართლიანი უსასრულო სიმრავლეებისათვისაც...*** ძენონმა ეს დიდი ხნის წინათ შეამჩნია. გახსოვთ მისი პარადოქსი, „სტადიუმი„? მან იცოდა, რომ შესაძლებელია A წერტილიდან $B'C'$ მომაკვეთზე მდებარე წერტილების პროეცირება დიდ BC მონაკვეთზე ისე, რომ მცირე მონაკვეთის ყოველ P' წერტილს, შეესაბამება დიდი მონაკვეთის P წერტილი. მაგრამ მან არ იცოდა, რომ ეს ეხება მთელ რიცხვებსაც.



სენიორა ნიკოლინი – ამგვარადვე შესაძლებელია იმის ჩვენება, რომ საერთოდ ლუწი რიცხვების რაოდენობა იმდენივეა რაც მთელი რიცხვებისა, იმისა და მიუხედავად რომ ყოველი მეორე რიცხვი ლუწია.

გალილეი – ვხედავ კარგად გესმით ჩემი სენიორა. ნებისმიერი ადამიანი წვდება რაღაცას ბოლომდე, თუ კი მას შეუძლია გარდაქმნას და შეუცვალოს სახე ამ რაღაცას თავისათვის. ერთი სიტყვით – შექმნას ყველაფერი ხელახლა.

სენიორა ნიკოლინი – კეთილი. თუ მზარეული ამზადებს მხოლოდ რეცეპტის მიხედვით, ის ჭეშმარიტი კულინარი არ არის. მას უნდა შეეძლოს თავისუფლად შეცვალოს მომზადების წესი, დაამატოს ან დააკლოს სუნელი, ისე, რომ ყოველ ჯერზე საკვები სხვადასხვანაირი გემოსი გამოვიდეს.

გალილეი – კარგი კულინარი დგამს ცდებს, როგორც მეცნიერი, თუმცა მეცნიერს არ შეუძლია ექსპერიმენტი თავისუფლად ჩაატაროს, რადგან ერეტიზმში ეჭვმიტანილად გამოაცხადებენ.

სენიორა ნიკოლინი – სენიორ გალილეი, სანამ თქვენ ამდენი საინტერესო პრობლემის თაობაზე მესაუბრებოდით, ღამეც დამდგარა. თქვენი ძილის დროა, შეგაყოვნეთ. ალბათ ძალზე დამღლელია არა ჩემთვის ამ ჭეშმარიტებების ახსნა?

გალილეი – ო არა, პირიქით, დიდი სიამოვნება მივიღე და დროებით დავივიწყე ჩემი მდგომარეობა.

სენიორა ნიკოლინი – თქვენ არ გჭირდებათ ამაზე ამდენი ფიქრი.

გალილეი – თქვენ რა, მათემატიკით იმიტომ ხართ დაინტერესებული, რომ გამომიყვანოთ მძიმე ფიქრებიდან?

სენიორა ნიკოლინი – იმედია არ ბრაზდებით ამის გამო, ხომ ასეა? მერწმუნეთ, თუგინდ მქონოდა კიდეც ამგვარი აზრები, მე მართლაც მაინტერესებს ეს საკითხები. მეჩვენება, სენიორ გალილეი, რომ თქვენ არა მარტო ბუნების წიგნის წაკითხვა იცით, არამედ ადამიანის სულისაც, თუ მოინდომეთ. არ მესმის, რატომ არ იყენებთ თქვენ ცოდნას, რათა უკეთ დაიცვათ თავი და ნაკლებად გააღიზიანოთ მტრები.

გალილეი – თქვენი წმინდა სულის წიგნის წაკითხვა ჩემთვის ისეთივე სიამოვნებაა, როგორიც ბუნების საიდუმლოებების...

გალილეი – თქვენც იმ აზრზე ხართ, რომ უნდა გავიქცე? თქვენც ფიქრობთ, რომ უნდა მივიღო მათი წინადადება?

სენიორა ნიკოლინი – მე ვიცი რამდენად რეალურია მათი გეგმები და დაგვირგვინდება თუ არა ისინი წარმატებით. ერთადერთი მიზეზი, რატომაც ვიტყვი „დიახ", ეს არის. თქვენ ადგილას, სენიორ გალილეი, ვეცდებოდი გამეგო ეს. თუ გეგმა განხორციელებადია, რაშიც ბოლომდე მაინც არა ვარ დარწმუნებული, უპრიანი იქნებოდა მიგეღოთ ის. არ მინდოდა ჩარევა, მაგრამ ახლა, რადგან თქვენ თვითონ მკითხეთ, მე გამოვთქვი ჩემი მოსაზრება.

გალილეი – არ გჯერათ ჩემი გამარჯვებისა?

სენიორა ნიკოლინი – თქვენ ამბობთ, რომ გჯერათ მხოლოდ სიმართლის. უეჭველია, ადრე თუ გვიან სიმართლე გაიმარჯვებს, მაგრამ ვიქნებით კი ცოცხალი იმ დროისთვის, როდესაც ეს მოხდება. თქვენ თვლით, რომ მტრების მიერ წამოყენებული ბრალდებები უსაფუძვლოა და ისინი ვერ შესძლებენ მათ დასაბუთებას. მეჩვენება, შეცდომას უშვებთ რადგან გგონიათ ინკვიზიცია ისეთივე მაღალი პრინციპებით ხელმძღვანელობს სიმართლის დასამტკიცებლად, როგორითაც თქვენ ემსახურებით მეცნიერებას. დავანებოთ თავი ამ თემას. უკვე გვიანია. იმედი მაქვს, დაიძინებთ ისევე მშვიდად, როგორც გუშინ.

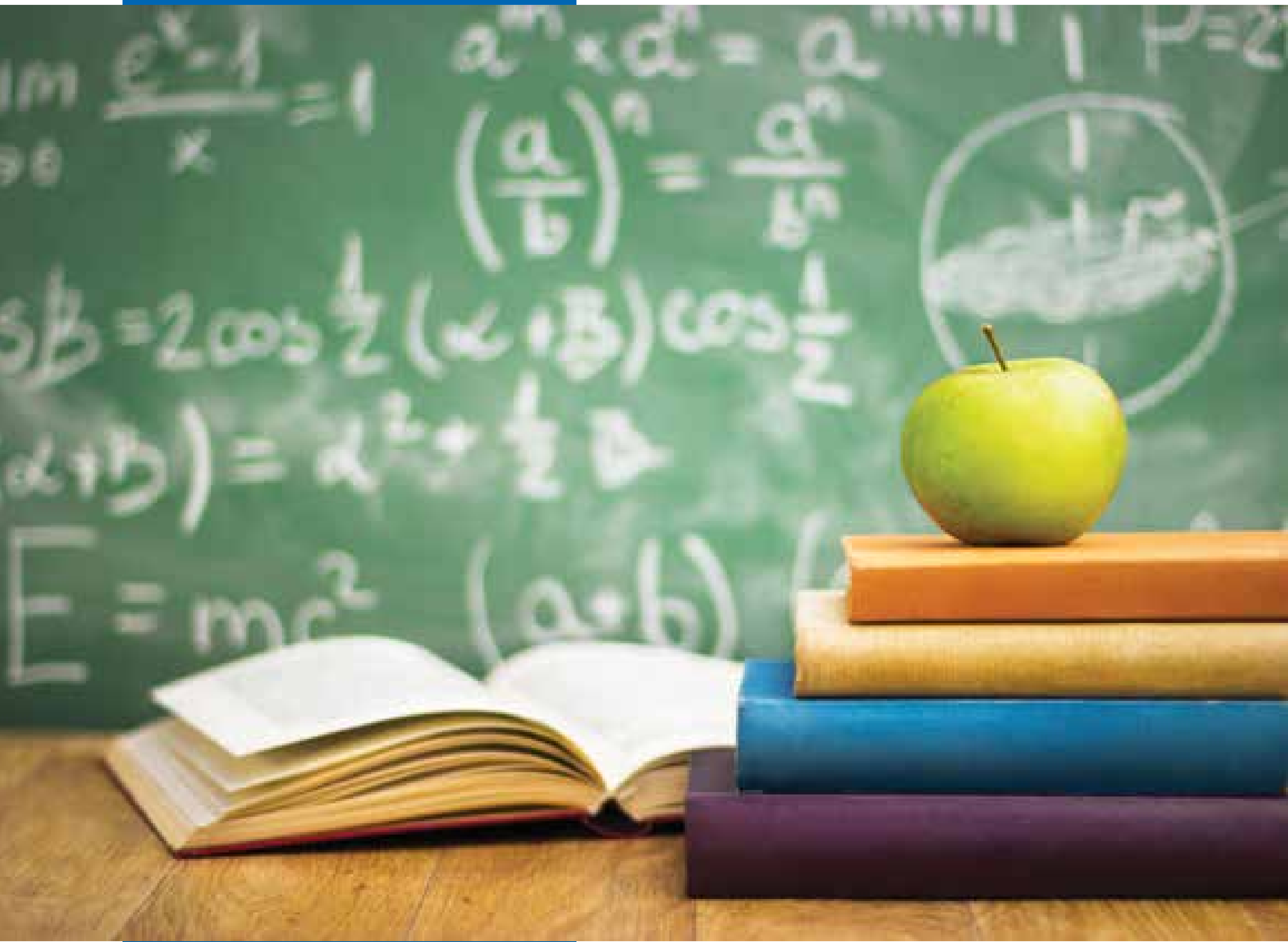
გალილეი – წინა ღამეს მესიზმრა, ოთახი, სადაც მეძინა, უცებ აფრინდა მაღლა, ღრუბლებზე მაღლა, უჰაერო სივრცეში. ვერ წარმოიდგენთ, რა შესანიშნავია უყურო ამ სიმაღლიდან დედამიწას, რომელიც ხდება სულ უფრო და უფრო პატარა და მზის შუქზე ისევე კიაფობს, როგორც ღამით მთვარე. ვხედავდი, როგორ მოძრაობს ის, მედიდურად ბრუნავს მზის გარშემო და იმავდროულად თავისი ღერძის გარშემო. ბედნიერი ვიყავი, როგორც არასოდეს ჩემი ცხოვრებაში. საკუთარი თვალებით ვხედავდი დედამიწის მოძრაობას! ვიხედებოდი ტელესკოპში, რომლითაც ადრე დედამიწიდან ცას გავცქეროდი. ეს იყო ძალზე კარგი ტელესკოპი, ბევრად უკეთესი იმათზე, ოდესმე რომ გამიკეთებია. სახეებს ვცნობდი. მე მივმართე ის რომში. წარმოგიდგენიათ, ინჰოფერი და პასკუალიო დავინახე. ეს ბრიყვები ბინძური სულით, ლაპარაკ-ლაპარაკით ტიბრის გასწვრივ მოსეირნობდნენ. დავაჭირე ტელესკოპის კნოპს ხელი და გავიგონე მათი საუბარი; ისინი დედამიწის მოძრაობაზე მსჯელობდნენ. ამტკიცებდნენ, სიცრუე და ერეტიკული დოქტრინააო. დედამიწა ხელს არ უშლიდა მათ სულელურ ლაყბობას. ღირსეულად აგრძელებდა თავის გზას ორბიტაზე, აგრძელებდა ტრიალს ასევე თავისი ღერძის გარშემო და მიაქანებდა მათაც. ისინი კვლავ უაზროდ ცილს მწამებდნენ მე და კოპერნიკს. ისეთი სიცილი ამიტყდა, რომ ცრემლები წამომივიდა. ჩემივე ხმამაღალმა სიცილმა გამომაღვიძა.

სენიორა ნიკოლინი – მართლაც, შესანიშნავი რამ გინახავთ. შესაძლოა, ამ ღამით თქვენ ნახავთ სიზმარს იმ დროზე, როდესაც პატარა ბავშვები ისწავლიან სკოლაში, თუ როგორ მოძრაობს დედამიწა მზის გარშემო.

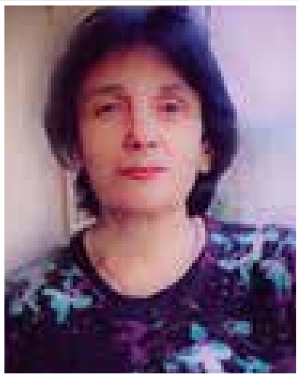
გალილეი – მე ხშირად ვოცნებობ ღამღამობით, როდესაც არ მძინავს. ვიმედოვნებ, ასეთი დრო მალე დადგება. მეცნიერების პროგრესის შეჩერება შეუძლებელია, მაგრამ ხანდახან ეჭვი მიპყრობს, იქნება ის შორეული დრო ისეთი ბედნიერი, როგორიც წარმომიდგენია? აღარ იქნება დოგმები და ცრურწმენები? არ იცხოვრებენ ბრიყვი, შურიანი, ბოროტი, ინტრიგანი ადამიანები? არ შეეცდებიან ასეთი ადამიანები ცილისწამებით ჩრდილი მიაყენონ წესიერ ადამიანს? არ დაჩებიან პარაზიტები მეცნიერების მწვანედ აყვავებულ ხეზე?

სენიორა ნიკოლინი – მართალია, არარაობები ალბათ ისევ იცხოვრებენ, მაგრამ ყოველთვის იარსებებენ ადამიანები, რომელთათვის სიმართლე ყველაფერზე უფრო მნიშვნელოვანი იქნება. ისინი მოიხედავენ უკან, ჩვენი საუკუნისკენ, დაინახავენ, რომ გალილეო გალილეი იდგა თავის თანამედროვეებზე ორი თავით უფრო მაღლა და სიამაყით გამოაცხადებენ თავს მისი საქმის გამგრძელებლად.

მათემატიკა



მათემატიკური ანალიზის ელემენტები მასწავლებელთა სასერტიფიკაციო გამოცდებზე



რუსუდან მესხია

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასისტენტ-პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკაში მასწავლებელთა სასერტიფიკაციო გამოცდების პროგრამის პროექტში წარმოდგენილია მათემატიკური ანალიზის ელემენტები და საგამოცდო ტესტებში გვხვდება ამ თემატიკასთან დაკავშირებული რამდენიმე საკითხი. აქვე გვინდა შევნიშნოთ, რომ მათემატიკაში ეროვნული სასწავლო პროგრამის მიხედვით დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის ელემენტები, კერძოდ, ფუნქციის წარმოებული, წარმოებულის გამოყენებით ფუნქციის თვისებების შესწავლა, ექსტრემუმის ამოცანების ამოხსნა, განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა არ არის გათვალისწინებული, გარდა მათემატიკური პროფილის სპეციალიზებული სკოლებისა.

მიგვაჩნია, რომ თორმეტწლიანი სწავლების პირობებში შესაძლებელია საჯარო სკოლის კურსდამთავრებულებს ჰქონდეთ ელემენტარული ჩვევები ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის ამოცანების ამოხსნის და ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლისა დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის გამოყენებით. ამასთან, ჩვენ არ ვგულისხმობთ, რომ მათემატიკის სასკოლო კურსში გათვალისწინებული იყოს მიმდევრობის ზღვრის, ფუნქციის ზღვრის მკაცრად ჩამოყალიბებული განსაზღვრებები, მათი თვისებების შესწავლა და ამ თემასთან დაკავშირებული დებულებების დასაბუთება.

განვიხილოთ ამოცანები, რომლებიც წარმოდგენილია მასწავლებელთა სასერტიფიკაციო გამოცდების ტესტებში და დაკავშირებულია მათემატიკური ანალიზის თემატიკასთან. მათი ამოხსნები არ არის გამოქვეყნებული გამოცდებისა და შეფასების ეროვნული ცენტრის გამოცემებში, რადგან აღნიშნული საკითხები საგამოცდო ტესტებში ფასდება ერთი ქულით. ვფიქრობთ, მასწავლებლებისთვის, რომლებიც სასერტიფიკაციო გამოცდებისთვის ემზადებიან, ინტერესმოკლებული არ იქნება ამ ამოცანების ამოხსნის ანალიზი. გარდა ტესტებში მოცემული ამოცანებისა მოვიყვანთ ზოგიერთი სხვა ამოცანის ამოხსნასაც აღნიშნული თემატიკიდან, რომელიც ჩვენი აზრით საინტერესოა.

ამოცანა 1 (მასწავლებელთა სასერტიფიკაციო გამოცდის 2014 წლის ტესტიდან). წრფე კვეთს აბსცისთა ღერძს (5;0) წერტილში და ეხება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს წერტილში, რომლის აბსცისაა 3. იპოვეთ $\dfrac{f'(3)}{f(3)}$.

ამოხსნა. როგორც ცნობილია, x_0 წერტილში წარმოებადი $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისადმი (x_0; $f(x_0)$) წერტილში გავლებული მხების საკუთხო კოეფიციენტი $k=f'(x_0)$ და მხების განტოლება მოი-

ცემა შემდეგი სახით:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

ამიტომ $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისადმი $(3; f(3))$ წერტილში გავლებული მხების განტოლება იქნება:

$$y = f'(3)(x - 3) + f(3).$$

პირობის თანახმად, მხები გადის (5;0) წერტილზე, ამიტომ მხების განტოლებიდან გვექნება:

$$0 = f'(3) \cdot 2 + f(3).$$

აქედან,

$$\frac{f'(3)}{f(3)} = -\frac{1}{2}.$$

ამოცანა 2. $y = x^2 - 2x + 5$ პარაბოლის მკვეთი გადის წერტილებზე, რომელთა აბსცისებია $x_1 = 1$ და $x_2 = 3$. შეადგინეთ პარაბოლის იმ მხების განტოლება, რომელიც პარალელურია აღნიშნული მკვეთისა.

ამოხსნა. მკვეთი გადის $A(1; f(1))$ და $B(3; f(3))$ წერტილებზე, სადაც $f(1) = 4$, ხოლო $f(3) = 8$. ამიტომ მისი საკუთხო კოეფიციენტი არის

$$k_{AB} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{8 - 4}{2} = 2.$$

მხები პარალელურია AB მკვეთისა, ამიტომ მხების საკუთხო კოეფიციენტი $k = 2$, მაგრამ, მეორეს მხრივ, მხების საკუთხო კოეფიციენტი $k = f'(x)$, ამიტომ $f'(x) = 2$. $f'(x) = (x^2 - 2x + 5)' = 2x - 2$, ე. ი. $2x - 2 = 2$, $x = 2$.

ამრიგად, მხები გადის $(2; f(2))$ წერტილზე და მისი განტოლება იქნება:

$$y = 2(x - 2) + f(2), \text{ სადაც } f(2) = 5,$$

ე.ი. $y = 2x + 1$ საძიებელი მხების განტოლებაა.

ამოცანა 3. ვიპოვოთ $y = x^2 - 2x + 5$ და $y = x^2 + 2x - 11$ პარაბოლებისადმი გავლებული საერთო მხების განტოლება.

ამოხსნა. ვთქვათ, საერთო მხები $y = x^2 - 2x + 5$ პარაბოლას ეხება $A(x_1; f_1(x_1))$ წერტილში, ხოლო $y = x^2 + 2x - 11$ პარაბოლას კი – $(x_2; f_2(x_2))$ წერტილში. ერთის მხრივ, საერთო მხების საკუთხო კოეფიციენტია $k = (x^2 - 2x + 5)'_{x=x_1} = 2x_1 - 2$, ხოლო, მეორეს მხრივ, $k = (x^2 + 2x - 11)'_{x=x_2} = 2x_2 + 2$, ამიტომ $2x_1 - 2 = 2x_2 + 2$, $x_1 - x_2 = 2$. შევადგინოთ $A(x_1; f_1(x_1))$ წერტილში $y = x^2 - 2x + 5$ პარაბოლისადმი გავლებული მხების განტოლება:

$$y = (2x_1 - 2)(x - x_1) + f_1(x_1),$$
$$\text{სადაც } f_1(x_1) = x_1^2 - 2x_1 + 5.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ მხები გადის $(x_2, f_2(x_2))$ წერტილზეც, სადაც $f_2(x_2) = x_2^2 + 2x_2 - 11$, მივიღებთ:

$$f_2(x_2) = (2x_1 - 2)(x_2 - x_1) + f_1(x_1),$$

ე.ი. $f_2(x_2) - f_1(x_1) = (2x_1 - 2)(x_2 - x_1)$. მაგრამ, $x_2 = x_1 - 2$, ამიტომ გვექნება:

$$(x_1 - 2)^2 + 2(x_1 - 2) - 11 - x_1^2 + 2x_1 - 5 = (2x_1 - 2) \cdot (-2).$$

აქედან,

$$x_1^2 - 4x_1 + 4 + 2x_1 - 4 - 11 - x_1^2 + 2x_1 - 5 = -4x_1 + 4,$$
$$4x_1 = 20, \; x_1 = 5$$

და

$$f_1(5) = 20, f_1'(5) = 8.$$

ამრიგად, საერთო მხების განტოლება იქნება:

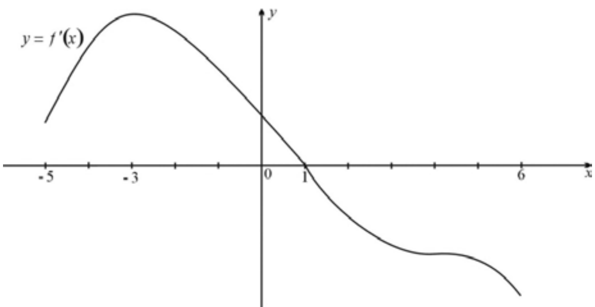
$$y = 8(x - 5) + 20,$$
$$y = 8x - 20.$$

ამოცანა 4 (მასწავლებელთა სასერტიფიკაციო გამოცდის 2013 წლის ტესტიდან). $y = f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[-5; 6]$ შუალედზე. ნახაზზე 1 მოცემულია ამ ფუნქციის წარმოებულის გრაფიკი. რომელ წერტილზე იღებს $f(x)$ ფუნქცია თავის უდიდეს მნიშვნელობას?

ამოხსნა. როგორც ცნობილია, სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია ამ სეგმენტზე ღებულობს თავის უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს. უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები რომ ვიპოვოთ, საჭიროა გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობები სეგმენტის ბოლოებზე და იმ წერტილებზე, სა-

დაც წარმოებული ნულის ტოლია ან არ არსებობს და მათ შორის ავირჩიოთ უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები. მოცემულ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული უწყვეტია $[-5; 6]$ სეგმენტზე, $f'(x) = 0$, როცა $x = 1$; ამასთან, $f'(x) > 0$, როცა $-5 \le x < 1$, ხოლო როცა $1 < x \le 6$, მაშინ $f'(x) < 0$, ამიტომ $x = 1$ არის $f(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი. ფუნქცია ზრდადია $[-5; 1]$ სეგმენტზე და კლებადია $[1; 6]$ სეგმენტზე, ამიტომ $[-5; 6]$ სეგმენტის ბოლოებზე ვერ მიიღებს უდიდეს მნიშვნელობას, რადგან $x = 1$ მაქსიმუმის წერტილია.

ამრიგად, $x = 1$ წერტილზე მოცემული ფუნქცია იღებს უდიდეს მნიშვნელობას.



ნახაზი 1.

განვიხილოთ პარამეტრზე დამოკიდებული ზოგიერთი ამოცანა. მიგვაჩნია, რომ ასეთი ტიპის ამოცანების ამოხსნა მოითხოვს საკითხის ღრმა ცოდნას და ანვითარებს ანალიზის უნარს.

ამოცანა 5 (მასწავლებელთა სასერტიფიკაციო გამოცდის 2013 წლის ტესტიდან). a-ს რა მნიშვნელობისთვის იქნება

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-x-2, & x\le -1\\ ax+4, & x>-1\end{cases}$$

ფუნქცია უწყვეტი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე.

ამოხსნა. $f(x) = 2x^2 - x - 2$ ფუნქცია, როცა $x \le -1$, არის კვადრატული ფუნქცია და ამიტომ $(-\infty;-1)$ შუალედში ეს ფუნქცია უწყვეტია; ასევე, $f(x) = ax + 4$, როცა $x > -1$, არის წრფივი ფუნქცია და უწყვეტია $(-1;+\infty)$ შუალედში. შევარჩიოთ a პარამეტრი ისე, რომ $f(x)$ ფუნქცია იყოს უწყვეტი $x = -1$ წერტილში. ამისათვის კი აუცილებელია და საკმარისი, რომ მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები $x = -1$ წერტილში იყოს ტოლი და უდრიდეს ფუნქციის მნიშვნელობას $x = -1$ წერტილზე. გამოვთვალოთ მარცხენა ზღვარი $x = -1$ წერტილში, გვექნება:

$$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-}\left(2x^2-x-2\right)=2+1-2=1=f(-1).$$

ხოლო მარჯვენა ზღვარი $x = -1$ წერტილში იქნება

$$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+}(ax+4)=-a+4,$$

ე.ი. ფუნქცია უწყვეტი იქნება $x = -1$ წერტილში, როცა $-a + 4 = 1$, $a = 3$.

ამრიგად, როცა $a = 3$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე.

ამოცანა 6. ვიპოვოთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$$f(x)=\frac{a^2-1}{3}x^3+(a-1)x^2+2x+1$$

ფუნქცია ზრდადია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე.

ამოხსნა. $f(x)$ ფუნქცია ზრდადი რომ იყოს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $f'(x) \ge 0$ უტოლობა სრულდებოდეს ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვისთვის.

ვიპოვოთ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული:

$$f'(x)=\frac{a^2-1}{3}\cdot 3x^2+2(a-1)x+2$$

ვთქვათ, $a \ne \pm 1$. შევარჩიოთ a პარამეტრი ისე, რომ

$$(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2\ge 0$$

უტოლობას აკმაყოფილებდეს ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი. ამისთვის კი, საჭიროა შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$$\begin{cases}a^2-1>0\\ D\le 0\end{cases},$$

სადაც D აღნიშნავს კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტს,

$$\frac{D}{4}=(a-1)^2-2(a^2-1)=-a^2-2a+3=-(a-1)(a+3).$$

ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} a^2-1>0 \\ (a-1)(a+3)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|>1 \\ \left[\begin{array}{l} a\geq 1 \\ a\leq -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a>1 \\ a\leq -3 \end{array}\right. .$$

ახლა ვთქვათ, $a^2 - 1 = 0$, $a = \pm 1$. თუ $a = 1$, მაშინ $f(x) = 2x + 1$ და, ცხადია, ეს ფუნქცია ზრდადია R სიმრავლეზე, ხოლო, თუ $a = -1$, მაშინ $f(x) = -2x^2 + 2x + 1$ და ეს ფუნქცია არ არის ზრდადი ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე.

ამრიგად, როცა $a \in (-\infty;-3] \cup [1;+\infty]$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია R-ზე.

ამოცანა 7. ვთქვათ, x_1 და x_2 შესაბამისად წარმოადგენს

$$f(x) = 2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x + 1$$

ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებს. ვიპოვოთ a-ს მნიშვნელობები, რომლისთვისაც $x_1^2 = x_2$.

ამოხსნა. $f(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის წეტილების დასადგენად საჭიროა ვიპოვოთ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები, ანუ ფუნქციის უწყვეტობის ისეთი წერტილები, სადაც წარმოებული ნულია ან არ არსებობს. მოცემული ფუნქცია ყველგან წარმოებადია, ამიტომ კრიტიკული წერტილები იქნება $f'(x) = 0$ განტოლების ამონახსნები,

$$f'(x) = 6x^2 - 18ax + 12a^2 = 6(x^2 - 3ax + 2a^2).$$

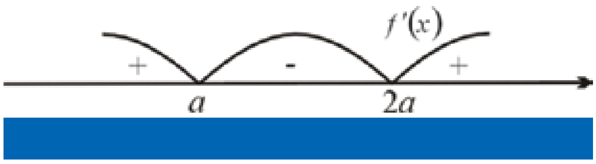
რადგან, პირობის თანახმად, $f(x)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილები, ამიტომ $f'(x) = 0$ განტოლებას უნდა ჰქონდეს ორი ამონახსნი, ანუ დისკრიმინანტი კვადრატული სამწევრისა უნდა იყოს დადებითი

$$\frac{D}{4} = 9a^2 - 8a^2 = a^2 > 0, \text{ როცა } a \neq 0.$$

ამოვხსნათ $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$ განტოლება, მივიღებთ $x_1 = a$ და $x_2 = 2a$ – კრიტიკული წერტილებია. გავიხსენოთ ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა, კერძოდ, თუ, x_0 კრიტიკული წერტილის მარცხენა მიდამოში $f'(x) < 0$, ხოლო მარჯვენა მიდამოში $f'(x) > 0$, მაშინ x_0 მინიმუმის წერტილია, ხოლო, თუ წარმოებული x_0-ის მარცხნივ დადებითია და მარჯვნივ უარყოფითი, მაშინ x_0 მაქსიმუმის წერტილია.

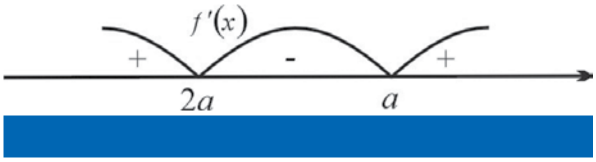
წარმოებულის ნიშანი დავადგინოთ კრიტიკული წერტილის მიდამოში ინტერვალთა მეთოდით.

ა) ვთქვათ, $a > 0$, მაშინ გვექნება



წარმოებულის ნიშნის ცვლილების გათვალისწინებით დავასკვნით, რომ $x_1 = a$ მაქსიმუმის წერტილია, ხოლო $x_1 = 2a$ კი – მინიმუმის წერტილი. შევარჩიოთ a პარამეტრი ისე, რომ $x_1^2 = x_2$, ანუ $a^2 = 2a$, $a(a-2) = 0$, რადგან $a > 0$, ამიტომ $a = 2$.

ბ) ვთქვათ, $a < 0$, მაშინ $f'(x)$ ფუნქციის ნიშნები განაწილდება შემდეგი სახით:



მაშასადამე, $x_1 = 2a$ მაქსიმუმის წერტილია, ხოლო $x = a$ მინიმუმის და $x_1^2 = x_2$ პირობიდან ვღებულობთ $4a^2 = a$, $a(4a - 1) = 0$. მიღებულ განტოლებას კი არ აქვს უარყოფითი ამონახსნი.

ამრიგად, როცა $a = 2$, მოცემული ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილია $x_1 = 2$ და მინიმუმის წერტილია $x_2 = 4$ და სრულდება $x_1^2 = x_2$ პირობა.

სასერტიფიკაციო გამოცდების ტესტებში გვხვდება განსაზღვრული ინტეგრალისა და ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლასთან დაკავშირებული საკითხებიც.

ამოცანა 8 (მასწავლებელთა სასერტიფიკაციო გამოცდის 2013 წლის ტესტიდან). გამოთვალეთ $\int_{-1}^{2}(x+2)^{\frac{1}{2}}\,dx$.

ამოხსნა. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ცვლადის გარდაქმნის ხერხი და შემდეგ, ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა.

როგორც ცნობილია, თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე და $x = \varphi(t)$ უწყვეტად წარმოებადი

ფუნქციაა $[\alpha;\ \beta]$ სეგმენტზე; ამასთან, $\varphi(t) \in [a;b]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,.$$

უკანასკნელ ტოლობას უწოდებენ ცვლადის გარდაქმნის ფორმულას განსაზღვრული ინტეგრალისთვის. ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა კი მოიცემა შემდეგი სახით:

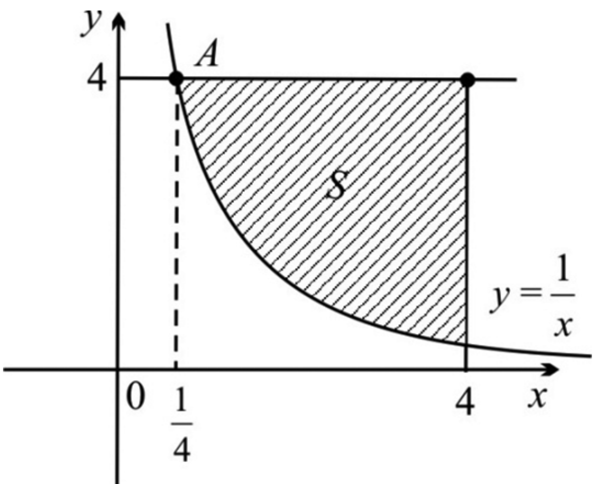
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

სადაც $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა $[a;b]$-ზე, ხოლო $F(x)$ წარმოადგენს $f(x)$-ის ერთ-ერთ პირველყოფილ ფუნქციას, რაც იმას ნიშნავს, რომ $F'(x) = f(x)$, $x \in [a;b]$.

შემოვიღოთ ახალი ცვლადი $t = x + 2$. როცა $x = -1$, მაშინ $t = 1$, ხოლო, თუ $x = 2$, მაშინ $t = 4$, $dx = dt$. ამიტომ გვექნება:

$$\int_{-1}^{2}(x+2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int_1^4 t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-1\right) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3}.$$

ამოცანა 9 (მასწავლებელთა სასერტიფიკაციო გამოცდის 2014 წლის ტესტიდან). გამოთვალეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე $x = 4$, $y = 4$ წრფეებითა და $y = \frac{1}{x}$ წირით შემოსაზღვრული დაშტრიხული ფიგურის ფართობი (იხ. ნახაზი 2).



ნახაზი 2.

ამოხსნა. როგორც ცნობილია, თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე და $f(x) \geq 0$, მაშინ $\int_a^b f(x)dx$ წარმოადგენს იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია $x = a$, $x = b$ წრფეებით, ox ღერძით და $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით. აქედან გამომდინარე, იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც ზემოდან შემოსაზღვრულია $y = f_1(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, ქვემოდან $y = f_2(x)$ ფუნქციის გრაფიკით და $x = a$, $x = b$ წრფეებით (იხ. ნახაზი 3), გამოითვლება

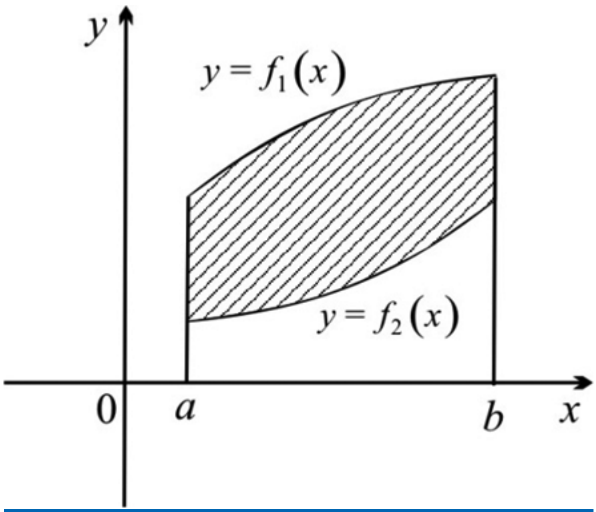
$$S = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x)\right)dx$$

ფორმულით, სადაც $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციები უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე და $f_2(x) \leq f_1(x)$. შევნიშნოთ, რომ $y = 4$ წრფისა და $y = \frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის გადაკვეთის A წერტილის აბსცისაა $x = \frac{1}{4}$. ამიტომ დაშტრიხული არე შემოსაზღვრულია $x = \frac{1}{4}$, $x = 4$ წრფეებით ზემოდან $y = 4$ წრფით და ქვემოდან $y = \frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკით. ამის გამო

$$S = \int_{\frac{1}{4}}^{4}\left(4 - \frac{1}{x}\right)dx = \int_{\frac{1}{4}}^{4} 4\,dx - \int_{\frac{1}{4}}^{4}\frac{1}{x}\,dx = 4\cdot\left(4 - \frac{1}{4}\right) - \ln x\Big|_{\frac{1}{4}}^{4}$$

$$= 15 - \ln 4 + \ln\frac{1}{4} = 15 - 2\ln 4$$

.



ნახაზი 3.

ამოცანა 10. ვიპოვოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე $y = x^2 + 2$, $y = x^2$ წირებითა და $y = 4$ წრფით შემოსაზღვრული დაშტრიხული არის ფართობი (იხ. ნახაზი 4).

ამოხსნა. რადგან დაშტრიხული არე სიმეტრიულია oy ღერძის მიმართ, ამიტომ საძიებელი ფართობი

$$S = 2S_1,$$

სადაც S_1 აღნიშნავს დაშტრიხული ფიგურის I საკოორდინატო მეოთხედში მოთავსებული ნაწილის ფართობს. აღნიშნული ფიგურა ზემოდან შემოსაზღვრულია ორი სხვადასხვა წირით: როცა $0 \le x \le \sqrt{2}$, მაშინ $y = x^2 + 2$ წირით, ხოლო, როცა $\sqrt{2} \le x \le 2$, მაშინ $y = 4$ წრფით, ქვემოდან კი $y = x^2$ წირით. ამიტომ S_1 ფართობი გამოითვლება ასე:

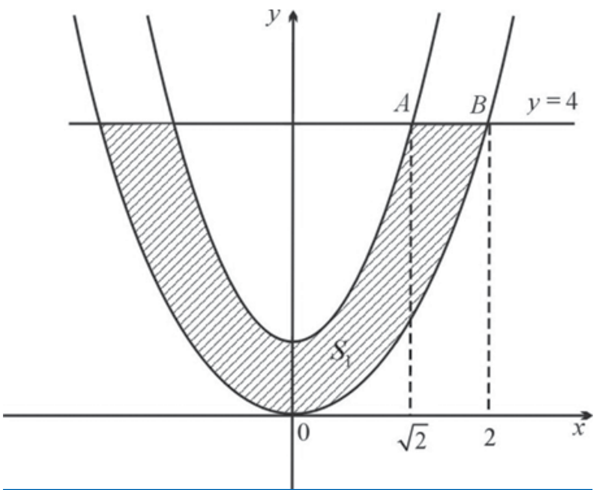
$$S_1 = \int_0^{\sqrt{2}} \left(x^2 + 2 - x^2\right) dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(4 - x^2\right) dx =$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} 4\, dx - \int_{\sqrt{2}}^{2} x^2\, dx =$$

$$= 2\sqrt{2} + 4\cdot\left(2 - \sqrt{2}\right) - \left.\frac{x^3}{3}\right|_{\sqrt{2}}^{2} =$$

$$= 8 - 2\sqrt{2} - \frac{8}{3} + \frac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{3} = \frac{16}{3} - \frac{4}{3}\cdot\sqrt{2}.$$

ამრიგად, $S = 2S_1 = 2\cdot\dfrac{16 - 4\sqrt{2}}{3}$



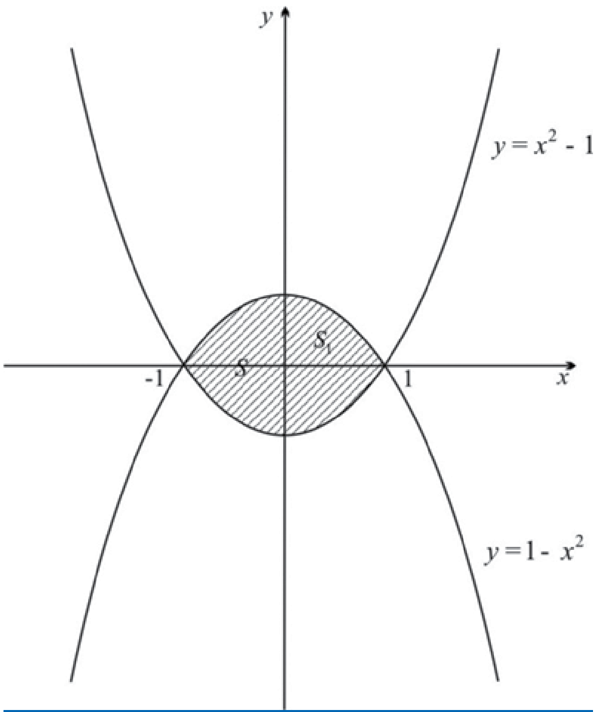
ნახაზი 4.

ამოცანა 11. იპოვეთ $|y| = 1 - x^2$ წირით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

ამოხსნა. $|y| = 1 - x^2$, ამიტომ $1 - x^2 \ge 0$, $|x| \le 1$. $|y| = 1 - x^2$ წირი წარმოადგენს $y = 1 - x^2$ და $y = x^2 - 1$ ფუნქციათა გრაფიკების გაერთიანებას, როცა $x \in [-1;1]$. $|y| = 1 - x^2$ წირით შემოსაზღვრული ფიგურა დაშტრიხულია ნახაზზე (იხ. ნახაზი 5). საძიებელი ფართობი გამოითვლება შემდეგი სახით:

$$S = 2S_1 = 2\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx = 2\cdot 2 - 2\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} =$$

$$4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$



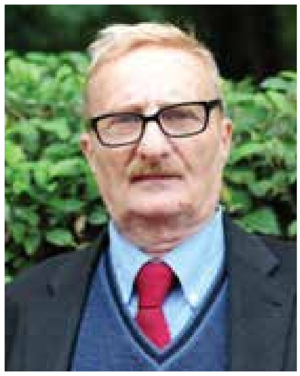
ნახაზი 5.

როგორც ვნახეთ, მათემატიკური ანალიზის თემატიკასთან დაკავშირებული ამოცანები საგამოცდო ტესტიდან არ არის რთული და, საერთოდ, სასერტიფიკაციო გამოცდების ჩაბარება არ უნდა წარმოადგენდეს სირთულეს, რადგან ტესტში მაღალი ქულით შეფასებული საკითხები აღებულია მათემატიკის სასკოლო პროგრამიდან. მართალია, დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის ელემენტები სკოლაში არ ისწავლება, მაგრამ ამ საკითხების ცოდნა მასწავლებლისათვის აუცილებელია სასერტიფიკაციო გამოცდების პროგრამის ფარგლებში, რადგან მასწავლებლის ცოდნის არეალი არ უნდა შემოიფარგლებოდეს მხოლოდ სასკოლო პროგრამით.

ვფიქრობთ, მათემატიკური ანალიზის ელემენტების ცოდნა პედაგოგს დაეხმარება კლასგარეშე მუშაობაში და სასწავლო პროცესის საინტერესოდ წარმართვაში.

ელ. ფოსტის მისამართი:
rusudan.meskhia@tsu.ge

გრაფიკების გამოყენებით პარამეტრის შემცველი ამოცანების ამოხსნის სწავლების შესახებ



თეიმურაზ ვეფხვაძე

ფიზიკა მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ლამარა ქურჩიშვილი

პედაგოგიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, სკოლა „ალბიონის“ პედაგოგი

ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე და მასწავლებელთა სასერტიფიკაციო გამოცდებზე ძალიან პოპულარულია ე.წ. პარამეტრის შემცველი განტოლებები და უტოლობები. თუმცა, ბევრმა არც კი იცის, რატომ იხმარება ეს ტერმინი. პარამეტრი უცხო სიტყვაა. უცხო სიტყვათა ლექსიკონში (იხ., მაგ., [1]) მისი სხვადასხვა მნიშვნელობაა წარმოდგენილი. მათ შორის – მათემატიკური: „სიდიდე, რომელიც შედის მათემატიკურ ფორმულაში და თავის მუდმივ მნიშვნელობას ინარჩუნებს მხოლოდ მოცემული ამოცანის პირობებში“. ცნობილი ქართველი ლოგიკოსი შალვა ფხაკაძე [2] კი პარამეტრის შემცველი განტოლებისთვის ასეთ განმარტებას იძლევა: „თუ განტოლება შეიცავს ცვლადებს, რომლის მიმართ, როგორც უცნობების მიმართ, არის დასმული ამოცანა და შეიცავს მათგან განსხვავებულ ცვლადებსაც, მაშინ ვიტყვით, რომ გვაქვს ზოგადი განტოლება, ხოლო ამ განსხვავებულ ცვლადებს პარამეტრები ეწოდება. მაგალითად, $ax^2 + bx + c = 0$ ზოგადი განტოლებაა, აქ იგულისხმება, რომ x არის უცნობი, a, b და c პარამეტრები“.

პარამეტრის შემცველი ამოცანები სასკოლო სახელმძღვანელოებში, როგორც წესი, არ იყო გამოყოფილი. მათზე არ იყო ყურადღება გამახვილებული არც ყოფილ საბჭოთა კავშირში და არც დღეს გვხვდება რუსეთში მოქმედ სახელმძღვანელოებში. ეს თემა არც ეროვნული სასწავლო გეგმის მათემატიკის სტანდარტშია გამოყოფილი. თუმცა, მათემატიკის გაძლიერებული სწავლების სტატუსის მქონე სკოლებისთვის განკუთვნილ სტანდარტში მითითებულია: VII კლასში – წრფივი ერთუცნობიანი განტოლება პარამეტრით, პარამეტრის შემცველი განტოლებათა სისტემები; VIII კლასში – პარამეტრის შემცველი კვადრატული განტოლება; IX კლასში – პარამეტრის შემცველი კვადრატული განტოლებები და უტოლობები; X და XI კლასში – პარამეტრის შემცველი განტოლებები და განტოლებათა სისტემები.

ასე გამოყოფილად ამ ტერმინის ხმარება ნიშნავს, რომ სტანდარტის ავტორებს საკმარისად არ მიაჩნიათ $ax = b$ და $ax^2 + bx + c = 0$ ზოგადი განტოლებების გამოკვლევა, რომელსაც გულისხმობს სხვა სკოლებისთვის განკუთვნილი სტანდარტი. აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ რუსულ სახელმძღვანელოებშიც (იხ., მაგ., [3] და [4]), რომლებიც მათემატიკის გაძლიერებული სწავლებისთვის არის განკუთვნილი, ეს საკითხები ცალკეა გამოყოფილი.

პარამეტრის შემცველი ამოცანის ამოხსნა ნიშნავს შემდეგს:

1) გამოვიკვლიოთ პარამეტრის რა მნიშვნელობებისთვის აქვს ამოცანას ამოხსნა და რამდენია ამონახსნი პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობისთვის;

2) ვიპოვოთ ამონახსნებისთვის ყველა გამოსახულება და მივუთითოთ ყოველი მათგანისთვის პარამეტრის ის მნიშვნელობები, რომლის დროსაც ეს გამოსახულებები განსაზღვრავს განტოლების ფესვს.

ჩვენს სახელმძღვანელოებში ზოგადი სახით მოცემული წრფივი და კვადრატული განტოლებები ამ სქემით განიხილებოდა ([5], [6]). პარამეტრის შემცველი ამოცანები, რომლებიც მისაღები გამოცდების ბილეთებში გვხვდება, არ მოითხოვს ცოდნას, რომელიც სცილდება სასკოლო მათემატიკის მოთხოვნებს. თუმცა, ამ ამოცანების ჩამოყალიბების უჩვეულობა ხშირად გამოსაცდელებს სიძნელეებს უქმნის. განსაკუთრებით მათ, რომლებსაც არა აქვთ მსგავსი ამოცანების ამოხსნის გამოცდილება. ამიტომ იძულებულია მასწავლებელი გამოიყენოს კრებულები, რომლებშიც ამ ტიპის ამოცანები მრავლად არის წარმოდგენილი. მითუმეტეს, სასერტიფიკაციო გამოცდებზე მათაც მიეცემათ ხოლმე მსგავსი დავალებები.

ბევრი მეცნიერი უარყოფით მოვლენად მიიჩნევს ამ ე.წ. „აბიტურიენტის" მათემატიკის ჩამოყალიბებას. მოვიყვანთ რამდენიმე ცნობილი რუსი მეცნიერის მოსაზრებას: აკადემიკოსი ვიქტორ კუზნეცოვი, სასკოლო სხელმძღვანელოების ექსპერტთა ჯგუფის თავმჯდომარე ([7]): „მაღალ კლასებში ზოგჯერ სასწავლო დროის უმეტესი ნაწილი ხშირად ეთმობა „დამახინჯებულ" ტრიგონომეტრიულ განტოლებებს, უტოლობებს, პარამეტრის შემცველ ამოცანებს". პროფესორი ვიქტორ რიჟიკი ([8]): „უნდა ამზადებდეს თუ არა მოსწავლეს სკოლა უმაღლესში გამოცდების ჩასაბარებლად? ამ კითხვის პასუხად გაჩნდა ე.წ. „ფსევდომათემატიკა", რომელმაც ხელი შეუწყო სკოლაში სპეციფიკური თემატიკის მომძლავრებას. მათ დანერგვას ხელს უწყობდა „მეთოდიკური" ლიტერატურის მომძლავრება. მაგალითები: ამოცანები მოდულებზე, პარამეტრებზე – საშინლად დიდი რაოდენობით".

ძირითადად ვეთანხმებით ამ მოსაზრებებს ერთი შენიშვნით: პარამეტრის შემცველი ამოცანების ზომიერი დოზით და სწორი შერჩევით გამოყენებამ შეიძლება ხელი შეუწყოს შემოქმედებითი კვლევის უნარის განვითარებას. სიძნელეები, რომლებიც უკავშირდება პარამეტრების შემცველი ამოცანების ამოხსნას დაკავშირებულია ამ ამოცანების ამოსახსნელად საჭირო ხერხების მრავალფეროვნებასთან. ამასთანავე, აუცილებელია ამოხსნისა და პასუხის ჩაწერის დროს პარამეტრის ყველა შესაძლო მნიშვნელობის გამოკვლევა და შესაბამისი პასუხის ზუსტად მითითება. ამოცანის ამოხსნის პროცესი ხშირად პარამეტრის მნიშვნელობების შესაბამისი „განშტოებების" განხილვას მოითხოვს.

მოსწავლეთა შემოქმედებითი კვლევის უნარის განვითარებაში მნიშვნელოვანია ერთი და იმავე ამოცანის ამოხსნისას სხვადასხვა ხერხის გამოყენება; მაგალითად, პარამეტრის შემცველი ამოცანების ამოხსნისას – ანალიზური და გრაფიკული ხერხების გამოყენება. ამიტომ ჩვენს სახელმძღვანელოებში (იხ., [6], [9]) მოცემულია პარამეტრის შემცველი ამოცანების ამოხსნის გრაფიკული ხერხები – ფუნქციების გრაფიკების გამოყენება. ეს მეთოდი თვალსაჩინოდ წარმოადგენს ამოხსნის პროცესს. მეთოდის ილუსტრაციას ჩვენ მოვახდენთ მაგალითების განხილვით, რომლების ამოხსნასაც, როგორც წესი, აბიტურიენტები ანალიზური ხერხით ცდილობენ ხოლმე.

გრაფიკების გამოყენებით პარამეტრის შემცველი ამოცანების ამოხსნა შეიძლება მარტივი მაგალითებით დავიწყოთ:

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება $|x| = a$.

ზოგიერთი ავტორის მსგავსად (იხ., მაგ., [10]) აქ შეიძლებოდა ასეთი ჩანაწერის გამოყენება:

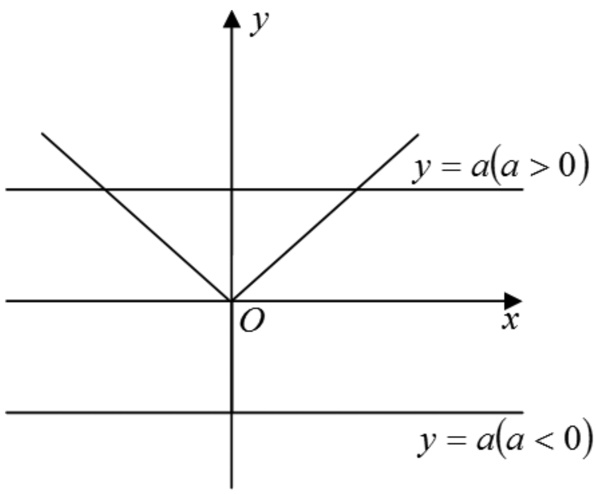
$$(?x)\ |x| = a,$$

რომ განვასხვავოთ უცნობისა და პარამეტრის აღმნიშვნელი ასოები.

ამოხსნა. ვიხილავთ $y = |x|$ და $y = a$ ფუნქციების გრფიკებს:

გრაფიკების განხილვების შემდეგ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ, როცა $a > 0$, განტოლებას

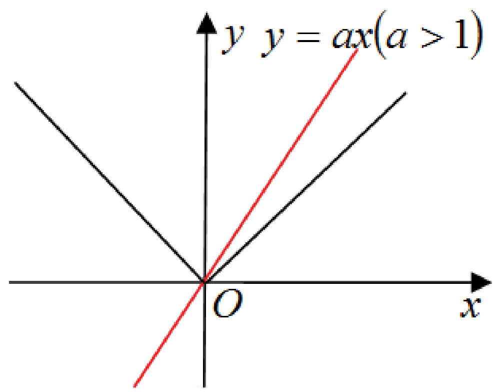
ორი ფესვი აქვს: $x = a$ და $x = -a$; როცა $a = 0$ – ერთი ფესვი, $x = 0$; როცა $a < 0$, განტოლებას ფესვი არა აქვს.



ნახაზი 1.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება

$$(?x)\ ax = |x|$$



ნახაზი 2.

ამოხსნა. ვიხილავთ ფუნქციებს: $\begin{cases} y = ax \\ y = |x| \end{cases}$

პასუხი: თუ $a = 1$, $x \in [0;+\infty)$

თუ $a = -1$, $x \in (-\infty;0]$

თუ $a \neq \pm 1$, განტოლებას აქვს ერთი ამონახსნი – $x = 0$.

მაგალითი 3. (ერთიანი ეროვნული გამოცდები, 2014 წელი). იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც

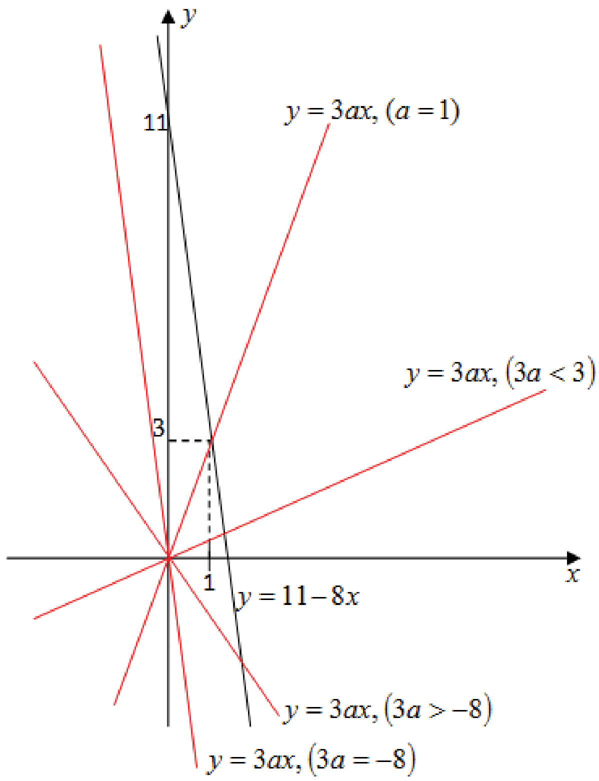
$$8x + 3ax - 11 = 0$$

განტოლების ამონახსნები 1-ზე მეტია.

ამოხსნა. შევარჩიოთ ფუნქციები და განვიხილოთ მათი გრაფიკების ურთიერთმდებარეობის შემთხვევები:

$$\begin{cases} y = 3ax \\ y = 11 - 8x \end{cases}$$

წითელი ფერით $y = 3ax$ ფუნქციების გრაფიკები წარმოდგენილი.



ნახაზი 3.

ცხადია, გადაკვეთის წერტილის აბსცისა მეტია 1-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$-8 < 3a < 3,$$

ანუ

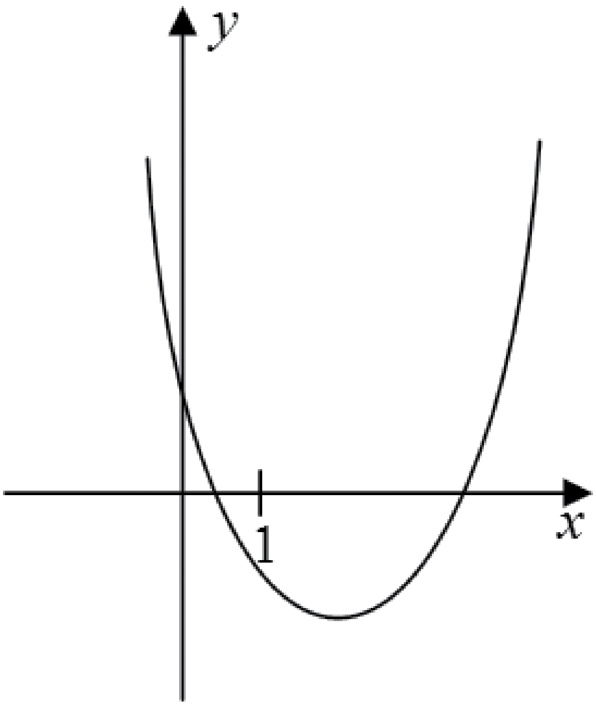
$$-\frac{8}{3} < a < 1.$$

ამ შემთხვევაში შეიძლება ანალიზური ხერხით ამოხსნა უფრო ადვილი ჩანდეს, რასაც ვერ ვიტყვით შემდეგ მაგალითში განხილულ შემთხვევაზე.

მაგალითი 4. (მისაღები გამოცდები მათემატიკაში, თსუ, 1979 წელი) იპოვეთ a-ს ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $a^2x^2 + (2a - 1)x - (a + 1) = 0$ განტოლების ერთი ფესვი მეტია 1-ზე, მეორე ფესვი ნაკლებია 1-ზე.

ამოხსნა. განვიხილოთ ფუნქცია:

$$f(x) = a^2x^2 + (2a - 1)x - (a + 1).$$



ნახაზი 4.

გრაფიკზე დაკვირვება დაგვარწმუნებს, რომ აღნიშნული განტოლების ერთი ფესვი მეტია 1-ზე, მეორე – ნაკლებია 1-ზე, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(1) < 0$, ანუ

$$a^2 + 2a - 1 - a - 1 < 0.$$
$$a^2 + a - 2 < 0,$$
$$a \in (-2;1).$$

ახლა განვიხილოთ ამოცანა, რომელიც რამდენიმე წლის წინ მიეცათ აბიტურიენტებს ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე.

მაგალითი 5. იპოვეთ a და b პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

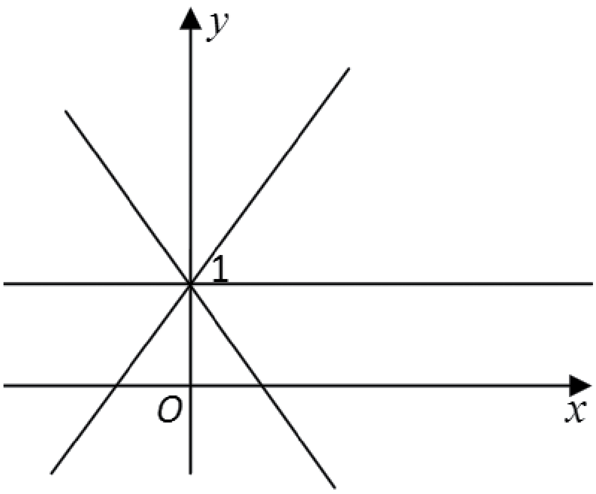
$$2ax - 3b = 5x - 1$$

განტოლებას არა აქვს ამონახსნი.

ამოხსნა. შევარჩიოთ ფუნქციები, რომელთა გრაფიკების გადაკვეთის წერტილების პოვნის ანალიზი მიგვიყვანს ამოცანის ამოხსნამდე.

$$\begin{cases} y = 2ax + 1 \\ y = 5x + 3b \end{cases}$$

$y = 2ax + 1$ განტოლებებით (0; 1) წერტილზე გამავალი წრფეთა კონაა წარმოდგენილი.



ნახაზი 5.

მაშასადამე, $y = 5x + 3b$ წრფე პარალელური უნდა იყოს a პარამეტრის ფიქსირებული მნიშვნელობით განსაზღვრული წრფის და არ უნდა გადიოდეს (0; 1) წერტილზე.

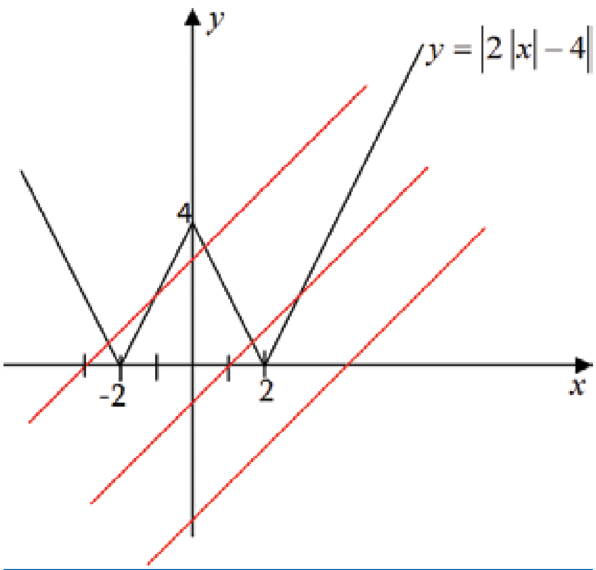
$$3b \neq 1 \text{ და } 2a = 5;$$

$$b \neq \frac{1}{3},\ a = \frac{5}{2}$$

ფუნქციების შერჩევის მეთოდიკის დამუშავებაში დაგვეხმარება შემდეგი ამოცანის განხილვა.

მაგალითი 6. გამოვიკვლიოთ განტოლების ამონახსენთა რაოდენობა პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობისთვის:

$$|2|x| - 4| = x + a.$$



ნახაზი 6.

ამოხსნა. შევარჩიოთ ფუნქციები და ამოცანა შევცვალოთ ამ ფუნქციების გრაფიკების გადაკვე-

თის წერტილების პოვნის საკითხით:

$$\begin{cases} y = \left|2|x| - 4\right| \\ y = x + a \end{cases}.$$

სურათზე წითელი ფერით $y = x + a$ ურთიერთპარალელური წრფეებია წარმოდგენილი. ეს წრფეები შეიძლება მხოლოდ კვეთდეს პირველი ფუნქციის გრაფიკს.

როგორც სურათიდან კარგად ჩანს, თუ $a < -2$, განტოლებას ამონახსენი არა აქვს,

თუ $a = -2$, აქვს ერთი ამონახსენი ($x = 2$)

თუ $-2 < a < 2$, აქვს ორი ამონახსენი,

თუ $a = 2$, აქვს სამი ამონახსენი,

თუ $2 < a < 4$, აქვს 4 ამონახსენი,

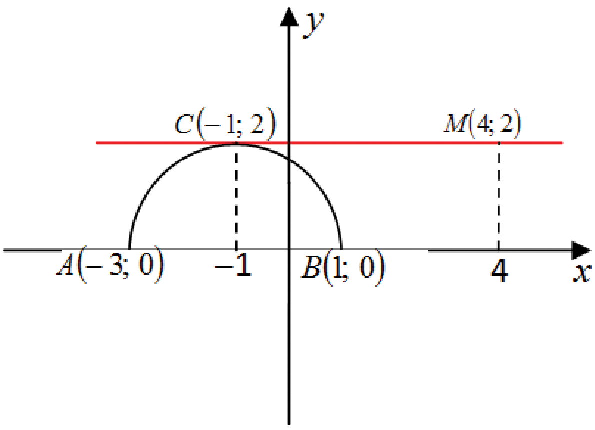
თუ $a > 4$, აქვს 2 ამონახსენი,

თუ $a > 4$, აქვს 3 ამონახსენი.

მაგალითი 7. იპოვეთ a პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$$(?\,x)\ ax + \sqrt{3-2x-x^2} = 4a+2$$

განტოლებას ერთადერთი ფესვი აქვს.



ნახაზი 7.

ამოხსნა. განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$\sqrt{3-2x-x^2} = -ax+4a+2.$$

მაშასადამე, ვიხილავთ ფუნქციების გრაფიკების გადაკვეთის წერტილებს:

$$\begin{cases} y = \sqrt{3-2x-x^2} \\ y = -ax+4a+2 \end{cases}$$

ცხადია, $-ax + 4a + 2 \ge 0$,

ამიტომ გვაქვს:

$$\begin{cases} y^2 = 3-2x-x^2 \\ y \ge 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

მაშასადამე, პირველი ფუნქციით წრეწირის ის ნაწილი უნდა განვიხილოთ, რომელიც I და II მეოთხედებშია.

$y = -ax + 4a + 2$ წრფეები გადის $M(4;2)$წერტილზე.

მაშასადამე, განტოლებას აქვს ერთადერთი ფესვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $y = -ax + 4a + 2$ წრფეს ერთადერთი საერთო წერტილი აქვს წრეწირთან. ეს ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა წრფე პარალელურია Ox ღერძის, ან როცა იგი MA და MB წრფეებს შორის გადის.

MC წრფის საკუთხო კოეფიციენტი ნულია, ეს შეესაბამება $a = 0$ შემთხვევას, როცა მივიღებთ $y = 2$ წრფეს.

ვიპოვოთ MA და MB-ს საკუთხო კოეფიციენტები:

$$MA: a_1 = \frac{2-0}{4+3} = \frac{2}{7}$$

$$MB: a_2 = \frac{2-0}{4-1} = \frac{2}{3}$$

მაშასადამე, $-a \in \left(\frac{2}{7}; \frac{2}{3}\right]$.

შენიშვნა: როგორც ბოლო ორი მაგალითის განხილვიდან ჩანს, უმჯობესია ფუნქციები ისე შევარჩიოთ, რომ ერთ-ერთი დამოკიდებული არ იყოს პარამეტრზე, ხოლო პარამეტრის შემცველი ფუნქციის ანალიზი ხშირად საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ რაიმე თვისება, რომელიც საერთოა პარამეტრის ყველა მნიშვნელობისთვის.

ეროვნული სასწავლო გეგმის შესაბამისად, ჩვენს მე-10 კლასის სახელმძღვანელოში ([11], გვ.81) გამოყოფილია პარაგრაფი სათაურით – მოდულის შემცველი ფუნქციები. მისი მიზანი პრობლემის გადაჭრისას მოდულის შემცველი ფუნქციის თვისებების გამოყენების უნარის განვითარებაა. ამ თემას შეიძლება დავუკავშიროთ პარამეტრის შემცველი ამოცანა, რომლის ამოხსნა მოდულის შემცველი ფუნქციის გრაფიკის აგების ჩვევებს მოითხოვს.

მაგალითი 8. ამოხსენით უტოლობა:

$$(?x)\ |x-a| + |x+a| < b$$

ამოხსნა. ვიხილავთ ფუნქციებს:

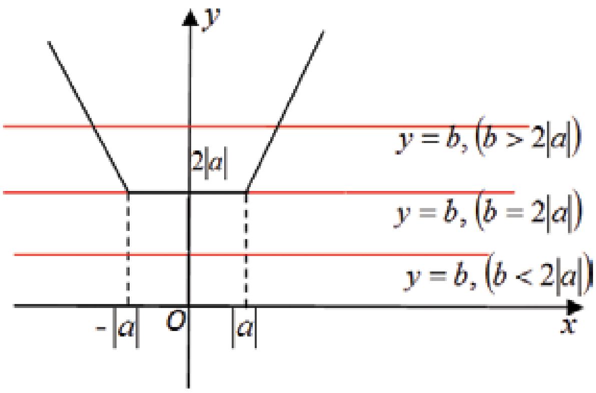
$y = |x-a| + |x+a|$ და $y = b$.

პირველის გრაფიკი უწყვეტი ტეხილია (ანალოგიური შემთხვევები განხილულია სახელმძღვა-

ნელოში), მეორის გრაფიკი კი წრფეა.

მაშასადამე, თუ $b \le 2|a|$, უტოლობას არა აქვს ამონახსენი,

თუ $b > 2|a|$, მაშინ ამონახსენია x-ს ყველა მნიშვნელობა შუალედიდან $\left(-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right)$.



ნახაზი 8.

ფუნქციების გრაფიკების გამოყენებით პარამეტრის შემცველი ამოცანების ამოხსნების ანალიზი, რომელიც გადმოცემულია სტატიაში, დაეხმარება მასწავლებლებს წარმატებით დაძლიონ ის დავალებები, რომლებიც მათ სასერტიფიკაციო გამოცდებზე მიეცემათ და მაღალი ქულებით ფასდება; მხედველობაში გვაქვს ზოგადი სახით მოცემული ალგებრული და ტრანსცენდენტული განტოლებების გამოკვლევები (მაგალითად, $a^x = b$; $\sin x = a$ და ა.შ.).

იმედია, მასწავლებლებს არ გაუჭირდებათ წარმოდგენილი მეთოდიკის გამოყენებით შემდეგ დავალებებში მოცემული ამოცანების ამოხსნა.

1. ამოხსენით უტოლობა:

$$(?x)\ |x-a| + |x| + |x+a| \le b$$

2. იპოვეთ a პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$$(?x)\ ax - \left|3x - |x+a|\right| = 9\,|x-1|$$

განტოლებას ერთი მაინც ფესვი აქვს.

ლიტერატურა:

1. უცხო სიტყვათა ლექსიკონი. შეადგინა მიხეილ ჭაბაშვილმა. „განათლება“, თბილისი, 1989.

2. შ. ფხაკაძე. განტოლებათა თეორიის ზოგიერთი საკითხი. თსუ გამომცემლობა, თბილისი, 1974.

3. Алгебра 8. Учебное пособие для учащихся 8 класса с углубленным изучением математики. Под редакцией Н.Я.Виленкина, Москва, «Просвещение», 2000.

4. Алгебра 9. Учебное пособие для учащихся 9 класса с углубленным изучением математики. Под редакцией Н.Я.Виленкина, Москва, «Просвещение», 2001.

5. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა VII, გამომცემლობა „ინტელექტი“, 2012.

6. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა IX, გამომცემლობა „ინტელექტი“, 2012.

7. Математика в школе, 2009, N5, 3-13.

8. Математика в школе, 2013, N10, 3-10

9. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა, IX, გამომცემლობა „ინტელექტი“, 2008

10. M. Freudenthal. Mathematik als Pädagogische Aufgabe, Band 1, Stutgart, 1977

11. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა X, გამომცემლობა „ინტელექტი“, 2012

მრავალწახნაგების კვეთა სიბრტყით

გრიგოლ სოხაძე

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი

ალექსანდრე ტყეშელაშვილი

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი

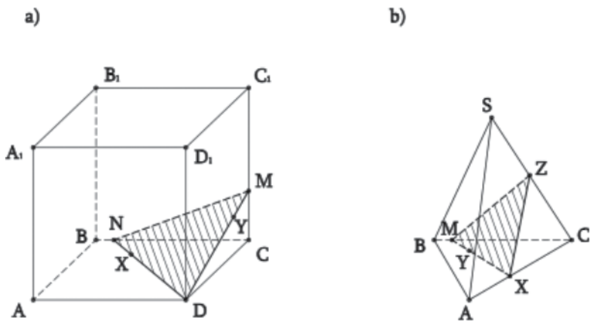
მრავალწახნაგების სიბრტყით კვეთის აგება მრავალხრივ საინტერესო თემაა მოსწავლეებისთვის. გარდა იმისა, რომ ხშირად მოიცემა გამოთვლითი ტიპის ამოცანები, სადაც მოითხოვება მრავალწახნაგების კვეთების შედეგად მიღებული ფიგურების სხვადასხვა მახასიათებლების ან თვისებების დადგენა, ამ ტიპის ამოცანები ანვითარებს სივრცულ წარმოდგენებს, იძლევა კარგ საფუძველს გაგებული და პრაქტიკულად გამოყენებული იქნას სტერეომეტრიის ძირითადი აქსიომები და დებულებები.
აქ ჩვენ ყურადღებას გავამახვილებთ მრავალწახნაგების კვეთების აგების მხოლოდ ისეთ ამოცანებზე, რომლებიც სამი წერტილით განსაზღვრული სიბრტყით მოიცემა.
ავაგოთ კვეთა ნიშნავს მივუთითოთ მკვეთი სიბრტყისა და მრავალწახნაგის წიბოების გადაკვეთის წერტილები, რომელთა მონაკვეთებით მიმდევრობით შეერთებით მიიღება კვეთის მრავალკუთხედი. იმისათვის, რომ ეს მოვახერხოთ, საჭიროა თითოეულ წახნაგზე (ან ამ წახნაგის შემცველ სიბრტყეზე) ვიპოვოთ ორი მაინც წერტილი, რომელიც საერთოა ამ წახნაგისა და მკვეთი სიბრტყისათვის. ფაქტიურად, ეს კვეთების აგების ზოგადი მეთოდია და მისი სისტემატიური გამოყენება წყვეტს დასმულ ამოცანას. გავეცნოთ ამ მეთოდის გამოყენებას სხვადასხვა შემთხვევაში.

მოვიყვანოთ ძირითადი სტერეომეტრიული თვისებები და შესაბამისი უმარტივესი კვეთების ილუსტრაციები, რომლებსაც ეყრდნობა უფრო რთული ბუნების კვეთების აგების ამოცანები.

I. თუ ორ სიბრტყეს ორი საერთო წერტილი აქვს, მაშინ ამ სიბრტყეების თანაკვეთა წარმოადგენს აღნიშნულ წერტილებზე გამავალ წრფეს.

ამ წინადადების საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ ორი საბაზისო კვეთის მაგალითი. $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ კუბში (ნახ. 1,*a*) მოცემულია სამი წერტილი: $X - ABCD$ წახნაგში, $Y - DD_1C_1C$ წახნაგში და D წვერო. დებულების თანახმად, ასაგები სიბრტყისა და DD_1C_1C წახნაგის კვეთა წარმოადგენს DY წრფეს, რომელიც კვეთს C_1C წიბოს M წერტილში. იგივე მიზეზით $ABCD$ სიბრტყისა და ასაგები კვეთის სიბრტყის კვეთაში მიიღება XD წრფე. ეს უკანასკნელი BC წრფეს კვეთს N წერტილში. საბოლოოდ, კვეთაში მიიღება DNM სამკუთხედი – ნახ. 1,*a*.

ნახ. 1,*b*-ზე მოცემულ SABC ტეტრაედრში ვიხილავთ ორ წერტილს წიბოებზე: X-AC-ზე და Z-SC-ზე. მესამე წერტილი Y აღებულია ABC წახნაგზე. ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის მსგავსად, კვეთაში მიიღება (ნახ. 1,*b*) სამკუთხედი MXZ.

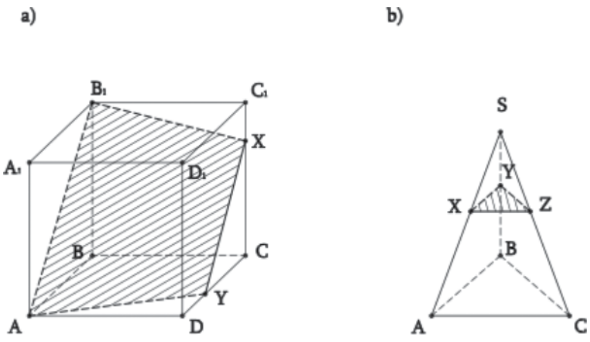


ნახ. 1

II. თუ ორი პარალელური სიბრტყე გადაკვეთილია მესამეთი, მაშინ კვეთაში მიღებული წრფეები ერთმანეთის პარალელურია.

აქაც მოვიყვანოთ ორი საბაზისო კვეთის მაგალითი. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბში აღებულია სამი წერტილი: A, B_1 და X. ეს უკანასკნელი CC_1 წიბოზე მდებარეობს. კვეთის სიბრტყე კვეთს AA_1B_1B და DD_1C_1C პარალელურ სიბრტყეებს. ამიტომ კვეთაში, დებულების თანახმად, მიიღება AB_1 წრფის პარალელური წრფე $XY - XY \parallel AB_1$, საბოლოოდ კვეთაში ვღებულობთ AB_1XY ტოლფერდა ტრაპეციას – ნახ. 2,*a*.

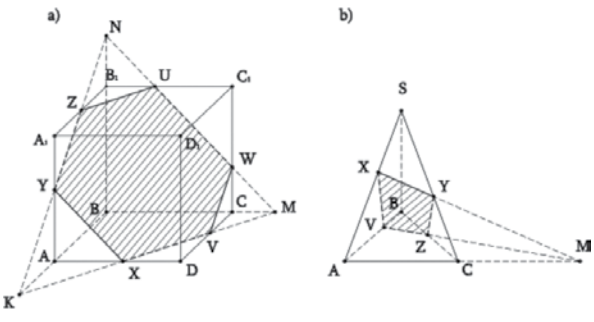
ნახ.2,*b*-ზე მოცემულ $SABC$ ტეტრაედრში, AS წიბოზე აღებულია X წერტილი. დებულების თანახმად, რადგან $XZ \parallel AC$, $XY \parallel AB$, და $YZ \parallel BC$ გვექნება – ამ წერტილზე გამავალი, ფუძის პარალელური კვეთისას მიიღება სამკუთხედი – XYZ.



ნახ. 2

III. ვთქვათ სამი α, β, და γ სიბრტყის თანაკვეთისას მიიღება A წერტილი. აღვნიშნოთ ამ სიბრტყეების თანაკვეთის წრფეები: $\alpha \cap \beta = a$, $\alpha \cap \gamma = b$, და $\beta \cap \gamma = c$. მაშინ $A = a \cap b \cap c$.

ამ დებულების საილუსტრაციო მაგალითები მოყვანილია ნახ.3-ზე. ნახ.3,*a*-ს შემთხვევაში $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბში აღებულია სამი წერტილი: $X \in AD$, $Y \in AA_1$ და $Z \in A_1B_1$. ჩამოყალიბებული დებულების შესაბამისად, საძებნი სიბრტყის თანაკვეთა $ABCD$ და AA_1B_1B წახნაგების შემცველ სიბრტყეებთან (ნახაზზე K წერტილი) იგივეა, რაც ვიპოვოთ YZ და AB წრფეების თანაკვეთა. ასევე საძებნი სიბრტყის, AA_1B_1B და BB_1C_1C წახნაგების შემცველი სიბრტყეების თანაკვეთის მოსაძებნად (ნახაზზე N წერტილი) საჭიროა ავაგოთ YZ და BB_1 წრფეების თანაკვეთა. იგივე მიზეზით საძებნი სიბრტყის, BB_1C_1C და $ABCD$ წახნაგების შემცველი სიბრტყეების თანაკვეთის წერტილის მოსაძებნად (ნახაზზე ესაა წერტილი M), საკმარისია KX და BC წრფეების თანაკვეთა ვიპოვოთ. ასე მივიღებთ კვეთაში $XYZUWV$ ექვსკუთხედს.

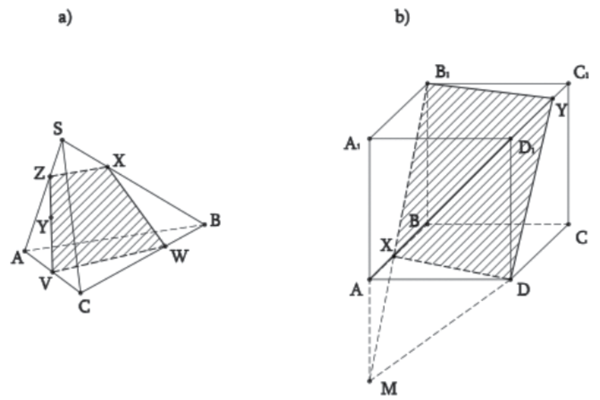


ნახ. 3

3,b ნახაზზე მოცემულ, $SABC$ ტეტრაედრში აღებულია სამი წერტილი $X \in AS$, $Y \in SC$ და $Z \in BC$. იმისათვის, რომ საძებნი სიბრტყისა და SAC და ABC წახნაგების შემცველი სიბრტყეების თანაკვეთა (ნახაზზე ესაა წერტილი M) ვიპოვოთ, საკმარისია ვიპოვოთ XY და AC წრფეების თანაკვეთა. შესაბამისად მივიღებთ კვეთის $XYZV$ ოთხკუთხედს.

IV. ვთქვათ a წრფე პარალელურია α სიბრტყისა. თუ β სიბრტყე გადის a წრფეზე და კვეთს α სიბრტყეს, მაშინ კვეთაში მიღებული b წრფე პარალელურია a წრფისა.

ამ დებულების ორი მაგალითი მოყვანილია 4-ე ნახაზზე. 4,a ნახაზზე მოცემულია ტეტრაედრი $SABC$. $X \in SB$, $Y \in SAC$. მაშინ თუ გვინდა ამ წერტილებზე AB წიბოს პარალელური კვეთის აგება, საჭიროა გავატაროთ AB-ს პარალელური წრფე SAB სიბრტყეში – XZ . შემდეგ ვაერთებთ Z-ს და Y-ს და ვღებულობთ V წერტილს. ამ უკანასკნელზე გავავლებთ $VW \| AB$. საბოლოოდ $ZVWX$ იქნება ისეთი კვეთა, რომელიც გადის X და Y წერტილებზე AB წიბოს პარალელურად.



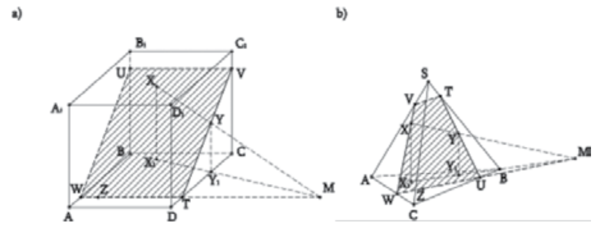
ნახ 4.

4,b ნახაზზე მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი. აღებულია წერტილები B_1 და D. გვინდა ისეთი სიბრტყის გავლება ამ წერტილებზე, რომელიც პარალელური იქნება AD_1 წრფისა (წახნაგის დიაგონალი). საძებნი სიბრტყის AA_1D_1D სიბრტყესთან კვეთისას მიღებული წრფე იქნება AD_1 წრფის პარალელური. ამიტომ D წერტილიდან AA_1D_1D სიბრტყეში გავატარებთ AD_1 წრფის პარალელურ წრფეს AA_1-ის გადაკვეთამდე (M წერტილი). MB_1 წრფე AB-სთან კვეთაში გვაძლევს საძებნი სიბრტყის კიდევ ერთ წერტილს X-ს. ამის შემდეგ ავიღებთ $DY \| XB_1$ და საძებნი კვეთა იქნება XB_1YD პარალელოგრამი.

V. მრავალწახნაგის ორ წერტილზე გამავალი წრფის მოცემულ სიბრტყესთან კვეთის წერტილზე გადის ამ წერტილების ამ სიბრტყეზე პროექციებზე გამავალი წრფეც.

ამ დებულების საილუსტრაციო მაგალითები მოყვანილია 5-ე ნახაზზე. 5,a ნახაზზე $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ კუბში აღებულია სამი წერტილი: $X \in A_1B_1C_1D_1$, $Y \in DD_1C_1C$, $Z \in ABCD$. ვთქვათ X_1 არის X წერტილის პროექცია $ABCD$ სიბრტყეზე, ხოლო Y_1 არის Y წერტილის პროექცია $ABCD$ სიბრტყეზე. დებულების თანახმად, XY და X_1Y_1 წრფეები ერთმანეთს კვეთენ $ABCD$ სიბრტყის რაღაც M წერტილში. ამ წერტილს ვაერთებთ Z-თან და ვაგრძელებთ AB წიბოსთან გადაკვეთამდე. შესაბამისი, $WUVT$ კვეთის აგება, მოცემულია ნახაზზე.

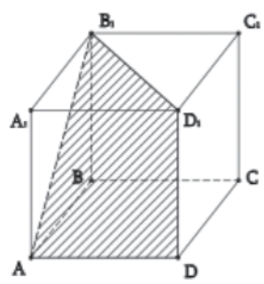
5,b ნახაზზე მოცემულია ტეტრაედრი $SABC$. $X \in SAC$, $Y \in SBC$, $Z \in ABC$. X_1 და Y_1 პროექციებია შესაბამისად, X და Y წერტილებისა ABC სიბრტყეზე. დებულების თანახმად, XY და X_1Y_1 წრფეები ABC სიბრტყის ერთსა და იმავე M წერტილში იკვეთებიან. ამ წერტილს შევაერთებთ Z-თან და ვაგრძელებთ. შესაბამისი წრფეების გავლებით მიიღება $WVTU$ კვეთა.



ნახ 5.

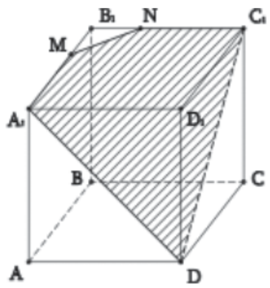
2. შეცდომები კვეთებში

მოყვანილი თვისებები გვაძლევს საშუალებას გავარკვიოთ მოცემული კვეთა სწორადაა შესრულებული თუ არა. აქ მოვიყვანთ მცდარი კვეთების ტიპიურ მაგალითებს.



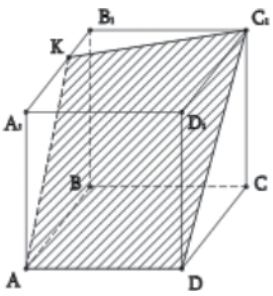
ნახ. 6

6-ე ნახაზზე დაშტრიხული კვეთა შეუძლებელია, რადგან A, D, D_1 წერტილებზე გადის AA_1D_1D სიბრტყე და მას არა აქვს საერთო წერტილი B_1B წრფესთან.



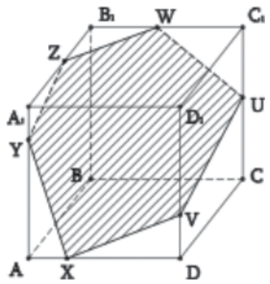
ნახ. 7

7-ე ნახაზზე A_1, C_1 და D წერტილებზე გამავალი სიბრტყე კვეთს $A_1B_1C_1D_1$ სიბრტყეს A_1C_1 წრფეზე და არა MN წრფეზე. ამიტომ აღნიშნული კვეთა არ არსებობს.



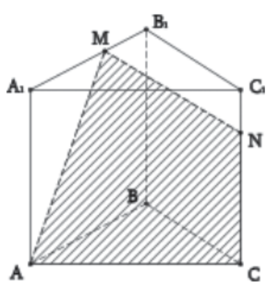
ნახ. 8

8-ე ნახაზზე A, D და C_1 წერტილებზე გამავალი სიბრტყე გაივლის, აგრეთვე, B_1 წერტილზე და არა მისგან განსხვავებულ K წერტილზე.



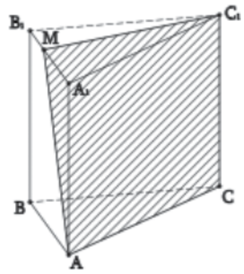
ნახ. 9

9-ე ნახაზზე წერტილები X, Y და V მიეკუთვნებიან AA_1D_1D სიბრტყეს. ამიტომ კვეთის სიბრტყეც AA_1D_1D-ს ემთხვევა და არ ექნება თანაკვეთა BB_1C_1C სიბრტყესთან.



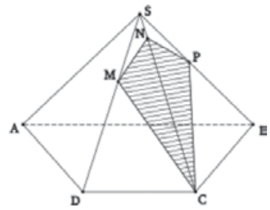
ნახ. 10

10-ე ნახაზზეც ისეთივე მდგომარეობაა, როგორიც წინა მაგალითში. წერტილები A, C და N მდებარეობენ ერთსა და იმავე AA_1C_1C სიბრტყეში და კვეთის სიბრტყეც მას ემთხვევა. შესაბამისად M წერტილი ამავე სიბრტყეში უნდა იყოს.



ნახ. 11

ასევე, 11-ე ნახაზზე A, C და C_1 წერტილები განსაზღვრავენ კვეთის სიბრტყეს, რომელიც AA_1C_1C წახნაგს უნდა ემთხვეოდეს. შესაბამისად M წერტილიც ამ სიბრტყეში უნდა იყოს.



ნახ. 12

12-ე ნახაზზე N, P და C წერტილებზე გამავალი სიბრტყე SCB წახნაგს ემთხვევა და მას არ შეიძლება ჰქონდეს M წერტილში კვეთა SD წიბოსთან.

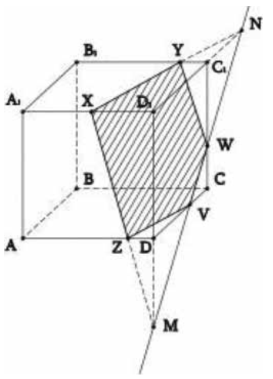
3. მრავალწახნაგების კვეთების აგების მეთოდები

მოყვანილი ძირითადი დებულებებისა და მათზე დაფუძნებული საბაზისო კვეთებისაგან გამომდინარ,ე შეგვიძლია კვეთების აგების ორი ძირითადი მეთოდი გამოვყოთ. ესენია: კვალის აგებისა და პარალელური (ან მართობული) დაგეგმილების მეთოდები. კვალის აგება გულისხმობს მკვეთი სიბრტყისა და მრავალწახნაგას წახნაგების შემცველ სიბრტყეებთან კვეთის წრფის აგებას. დაგეგმილების მეთოდს ვიყენებთ სწორედ კვალის აგებისათვის ან პარალელური წრფეების გასავლებად. შესაბამისად, ხშირად გამოვიყენებთ კომბინირებულ მეთოდს, რომელიც ორივე მოყვანილი მეთოდის ერთდროულ გამოყენებას გულისხმობს. კვალის აგებას შეესაბამება ზემოთ მოყვანილი I და III დებულებები, ხოლო მეორე, დაგეგმილების, მეთოდი შეესაბამება II, IV და V

წინადადებებს. მკითხველი აღმოაჩენს, რომ მოყვანილ მაგალითებში, გამოყენებული იყო ორივე მეთოდი.

განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი.

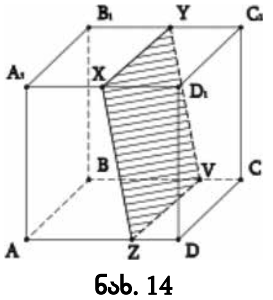
1. მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედი (ნახ. 13) და მის წიბოებზე A_1D_1-ზე, B_1C_1-ზე და AD-ზე აღებულია წერტილები X, Y და Z შესაბამისად. ავაგოთ ამ პარალელეპიპედის კვეთა XYZ სიბრტყით.



ნახ. 13

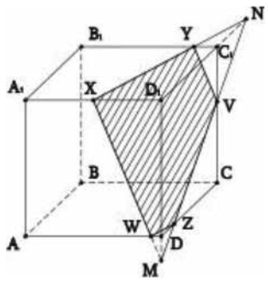
რადგან X და Y წერტილები ერთსა და იმავე $A_1B_1C_1D_1$ წახნაგზე მდებარეობენ, ამიტომ ამ წახნაგის შემცველ სიბრტყესთან თანაკვეთა მოგვცემს XY წრფეს. ამ წრფისა და D_1C_1 წრფის თანაკვეთა N-ით აღვნიშნოთ. იმავე მიზეზით AA_1DD_1 წახნაგის შემცველ სიბრტყესთან კვეთაში მივიღებთ XZ წრფეს. ამ წრფისა და DD_1 წრფის თანაკვეთა აღვნიშნოთ M-ით. შევნიშნავთ, რომ M და N წერტილები DD_1C_1C წახნაგის შემცველ სიბრტყეში მდებარეობენ. შესაბამისად, MN წრფეც ამავე სიბრტყეში მდებარეობს. MN წრფის DC და C_1C წრფეებთან გადაკვეთის წერტილები V და W ასოებით აღვნიშნოთ. შესაბამისად, $XYWVZ$ საძებნ კვეთას წარმოადგენს.

შევნიშნოთ, რომ ამ ამოცანის ამოხსნისას ჩვენ ვიგულისხმეთ, რომ XY წრფე არ არის პარალელური D_1C_1 წრფისა და ამიტომ ისინი კვეთაში გვაძლევდნენ წერტილს. თუ ეს ასე არ არის, მაშინ Z წერტილში გავავლებთ XY-ის პარალელურ ZV წრფეს და კვეთაში მივიღებთ $XYVZ$-ს (იხ. ნახ 14).



ნახ. 14

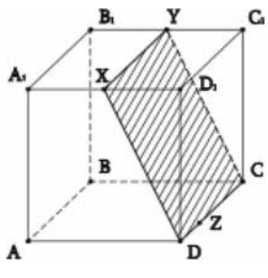
2. მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედი (ნახ. 15) და მის წიბოებზე A_1D_1-ზე, B_1C_1-ზე და DC-ზე აღებულია წერტილები X, Y და Z შესაბამისად. ავაგოთ ამ პარალელეპიპედის კვეთა XYZ სიბრტყით.



ნახ. 15

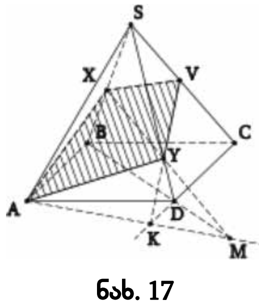
გავავლებთ XY წრფეს და ავიღებთ მის თანაკვეთას D_1C_1 წრფესთან (N წერტილი). ამ წერტილსა და Z წერტილის მიერ განსაზღვრული MN წრფე, DD_1C_1C წახნაგის შემცველ სიბრტყეში მდებარეობს. ვიპოვით NZ წრფისა და DD_1 წრფის თანაკვეთას – M-ს. ამასთან NZ წრფისა და C_1C-ის თანაკვეთა V ასოთი აღვნიშნოთ. ახლა ვნახავთ, რომ M და X წერტილები AA_1DD_1 წახნაგის შემცველ სიბრტყეში მდებარეობენ. აღვნიშნავთ MX წრფისა და AD_1 წრფის თანაკვეთას W ასოთი. $XYVZW$ საძებნი კვეთაა.

ამ ამოცანაშიც, ისე, როგორც ამოცანა 1-ის პირობებში თუ XY წრფე D_1C_1 წრფის პარალელურია, კვეთაში მივიღებთ $XYCD$ მართკუთხედს (იხ. ნახ. 16)



ნახ. 16

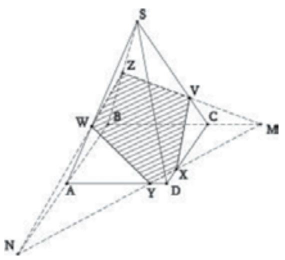
3. ვთქვათ $SABCD$ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდაა, $X \in BS$, $Y \in SD$. ავაგოთ პირამიდის კვეთა AXY სიბრტყით.



ნახ. 17

ჯერ გავავლოთ AX და AY წრფეები. განვიხილოთ XY და BD წრფეების გადაკვეთის M წერტილი. ეს წერტილი $ABCD$ ფუძის შემცველ სიბრტყეში მდებარეობს. ამიტომ CD და AM წრფეები ერთმანეთს კვეთენ. ვთქვათ ეს წერტილია K, რომელიც მდებარეობს როგორც $ABCD$ ფუძის, ისე SCD წახნაგის სიბრტყეში. თუ აღვნიშნავთ KY წრფისა და SC წრფეების თანაკვეთას V ასოთი, მივიღებთ $AXVY$ საძებნ კვეთას.

4. მოცემულია პირამიდა $SABCD$ (ნახ. 18), $X \in CD$, $Y \in AD$, $Z \in SB$. ავაგოთ პირამიდის კვეთა, რომელიც მოცემულ სამ წერტილზე გადის. აღვნიშნოთ M-ით და N-ით XY წრფის თანაკვეთა BC და AB წრფეებთან შესაბამისად. M წერტილი BSC სიბრტყეში მდებარეობს, N ხოლო წერტილი ASB სიბრტყეში. ამიტომ ამ წერტილების Z-თან შეერთებით მივიღებთ საჭირო კვალებს აღნიშნულ სიბრტყეებში. $XYWZU$ არის საძებნი კვეთა.

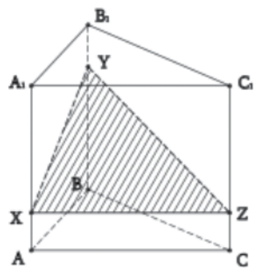


ნახ. 18

4. სამკუთხა პრიზმის კვეთები სიბრტყით

ა) კვეთაში მიიღება სამკუთხედი

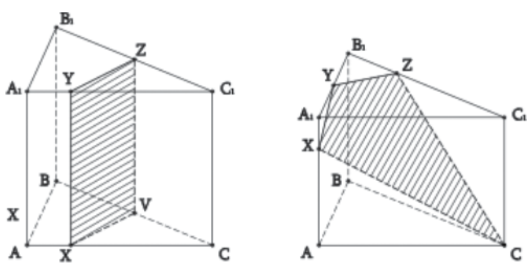
19-ე ნახაზზე მოცემულია კვეთის ვარიანტი, როცა მიიღება სამკუთხედი



ნახ. 19

ბ) კვეთაში მიიღება ოთხკუთხედი

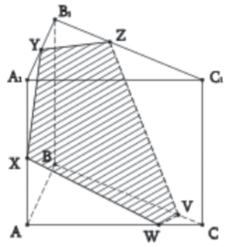
20-ე ნახაზზე მოცემულია კვეთის ის ვარიანტები, როცა მიიღება ოთხკუთხედი.



ნახ. 20

გ) კვეთაში მიიღება ხუთკუთხედი

21-ე ნახაზზე მოცემულია ვარიანტი, როცა სამკუთხა პრიზმის კვეთა გვაძლევს ხუთკუთხედს

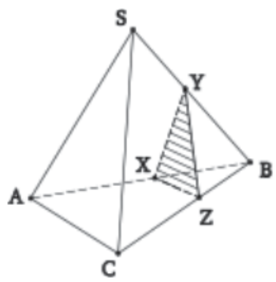


ნახ. 21

5. სამკუთხა პირამიდის კვეთები სიბრტყით

ა) კვეთაში მიიღება სამკუთხედი.

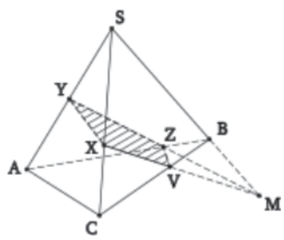
22-ე ნახაზზე მოცემულია კვეთის ვარიანტი, როცა მიიღება სამკუთხედი



ნახ. 22

ბ) კვეთაში მიიღება ოთხკუთხედი

23-ე ნახაზზე მოცემულია კვეთის ის ვარიანტი, როცა მიიღება ოთხკუთხედი

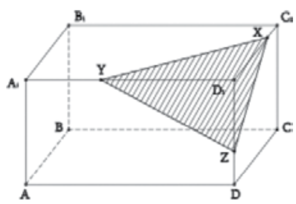


ნახ. 23

6. მართკუთხა პარალელეპიპედის კვეთები სიბრტყით

ა) კვეთაში მიიღება სამკუთხედი

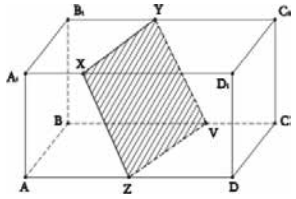
24-ე ნახაზზე ნაჩვენებია, რომ ერთი წვეროდან გამომავალ წიბოებზე აღებულ წერტილებზე გამავალი კვეთა სამკუთხედია



ნახ. 24

ბ) კვეთაში მიიღება ოთხკუთხედი

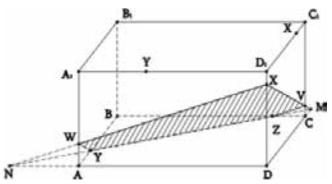
25-ე ნახაზზე გვაქვს შემთხვევა, როცა სამი მოცემული წერტილიდან, ერთ-ერთი ძევს დანარჩენი ორი წერტილის შემცველი წახნაგების საერთო წიბოზე



ნახ. 25

გ) კვეთაში მიიღება ხუთკუთხედი

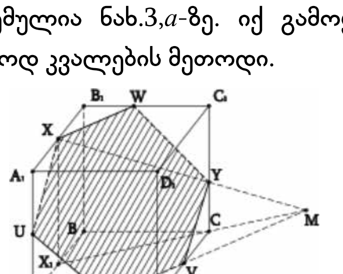
26-ე ნახაზის შემთხვევაში ორი წერტილი ძევს რომელიმე წახნაგის მეზობელ წიბოებზე ($Y \in AB$, $Z \in BC$), ხოლო მესამე წერტილი ძევს აღნიშნული სიბრტყის მართობულ რომელიმე წიბოზე ($X \in DD_1$). გამოიყენება კვალების მეთოდი.



ნახ. 26

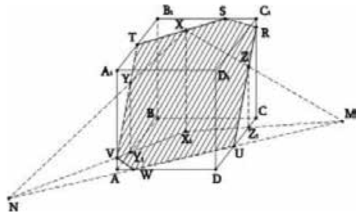
დ) კვეთაში მიიღება ექვსკუთხედი

27-ე ნახაზზე მოცემული სამი წერტილი აღებულია სხვადასხვა სიბრტყეში მდებარე წიბოებზე $X \in A_1B_1$, $Y \in CC_1$, $Z \in AD$. დავაგეგმილოთ X და Y წერტილები $ABCD$ სიბრტყეზე (გეგმილებია X_1 და C შესაბამისად). XY და X_1C წრფეების გადაკვეთის წერტილია M. MZ-ის კვეთა CD-სთან მოგვცემს საძებნი კვეთის ერთ-ერთ წერტილს (V-ს). X წერტილზე შეგვიძლია გავატაროთ ZV-ს პარალელური მონაკვეთი XW და YV-ს პარალელური XU მონაკვეთი. მივიღებთ კვეთის $XWYVZU$ ექვსკუთხედს (ნახ. 27). ამ კვეთასთან დაკავშირებით გაიხსენეთ ანალოგიური ამოცანის აგების ვარიანტი, რომელიც მოცემულია ნახ.3,a-ზე. იქ გამოყენებული იყო მხოლოდ კვალების მეთოდი.



ნახ. 27

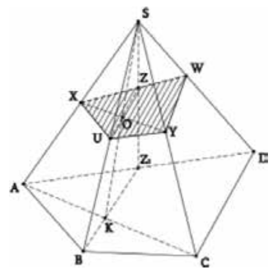
აქვე განვიხილოთ შემთხვევა, როცა წერტილები მოიცემა წახნაგების შიგნით: X ∈ $A_1B_1C_1D_1$, $Y \in AA_1B_1B$, და $Z \in DD_1C_1C$. დავაგეგმილოთ სამივე წერტილი ფუძის სიბრტყეში. $M = XZ \cap X_1Z_1$, $N = XY \cap X_1Y_1$. MN წრფის თანაკვეთა CD და AD წრფეებთან მოგვცემს საძებნი კვეთის წერტილებს U-ს და W-ს. X წერტილზე გავავლებთ WU-ს პარალელურ TS მონაკვეთს $A_1B_1C_1D_1$ სიბრტყეში. შევნიშნოთ კიდევ, რომ 28-ე ნახაზზე $SR \parallel VW$. კვეთაში მივიღეთ $VTSRUW$ ექვსკუთხედი.



ნახ. 28

7. უფრო რთული კონსტრუქციის მრავალკუთხედების კვეთების აგება

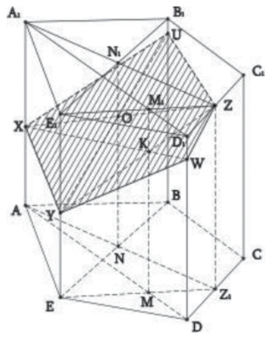
ვთქვათ მოცემულია $SABCD$ ოთხკუთხა პირამიდა (ნახ. 29). უნდა ავაგოთ ამ პირამიდის კვეთა XYZ სიბრტყით, სადაც $X \in AS$, $Y \in CS$, $Z \in ADS$. XZ და SD წრფეების თანაკვეთა W ასოთი აღვნიშნოთ. მივიღოთ S წერტილი ცენტრად და დავაგეგმილოთ $ABCD$ სიბრტყეზე X, Y და Z წერტილები. გეგმილებია A, C და Z_1 წერტილები შესაბამისად. ვთქვათ OK არის $XACY$ და ZZ_1B სიბრტყეების თანაკვეთის წრფე. მაშინ SB და ZO წრფეების თანაკვეთის U წერტილი საძებნი სიბრტყის კვალია SB წრფეზე. $XUYW$ კვეთის სიბრტყეა.



ნახ. 29

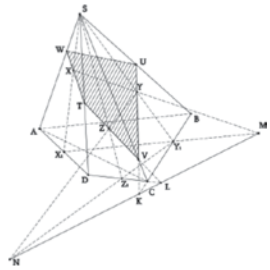
ვთქვათ მოცემულია $ABCDEA_1B_1C_1D_1D$ ხუთკუთხა პრიზმა (ნახ. 30). ავაგოთ კვეთა XYZ სიბრტყით, თუ $X \in AA_1$, $Y \in EE_1$, Z ∈ D_1C_1. Z_1 არის Z წერტილის პროექცია ქვედა ფუძეზე. MM_1 არის EE_1Z_1Z და AA_1D_1D სიბრტყეების გადაკვეთის წრფე. ვთქვათ K არის MM_1 და XZ წრფეების საერთო წერტილი. მაშინ XK და DD_1 წრფეების თანაკვეთა W – მიეკუთვნება საძებნ სიბრტყეს. NN_1 არის EE_1B_1B და AA_1ZZ_1 სიბრტყეების თანაკვეთა. ამ წრფისა და XZ წრფეების გადაკვეთა O ასოთი აღვნიშნოთ. ის ასაგებ კვეთის სიბრტყეს მიეკუთ-

ვნება. ამიტომ YO წრფისა და BB_1-ის თანაკვეთის წერტილი U საძებნი სიბრტყის წერტილია. ასე, რომ $XYWZU$ კვეთის სიბრტყეა.



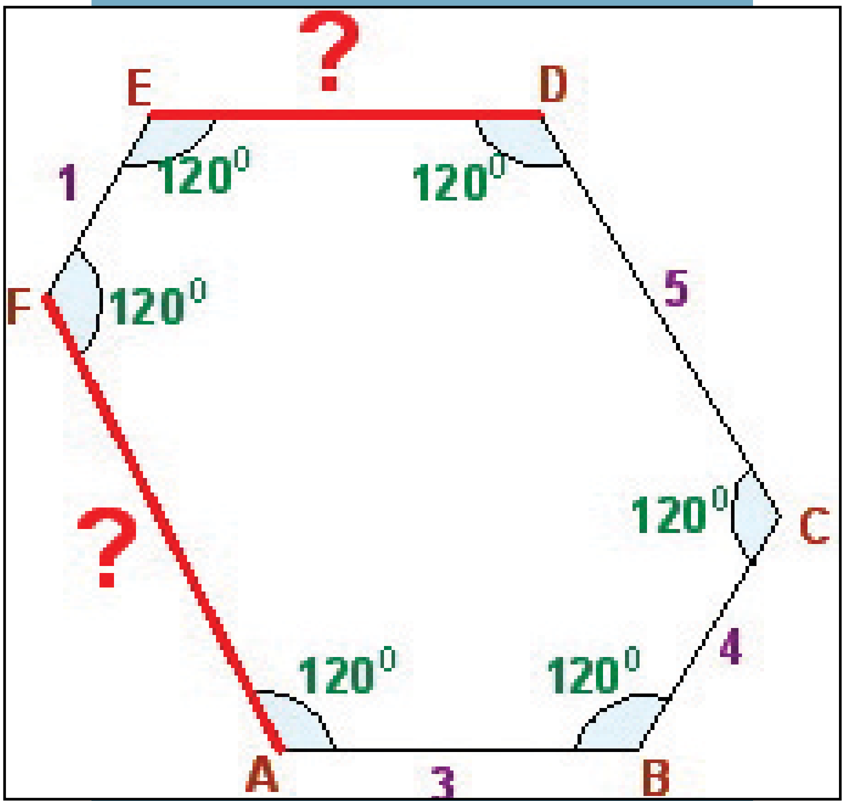
ნახ. 30

ვთქვათ $SABCD$ ოთხკუთხა პირამიდაა, $X \in ASD$, $Y \in CSB$, $Z \in DSC$. პროექცირების ცენტრად ავიღოთ S წერტილი და სამივე მოცემული წერტილი დავაგეგმილოთ ფუძის სიბრტყეზე. მივიღებთ X_1, Y_1 და Z_1 წერტილებს ფუძის შესაბამის წიბოებზე. XY და X_1Y_1 წრფეების გადაკვეთის წერტილი არის M (ნახ. 31). ასევე YZ და Y_1Z_1 წრფეების გადაკვეთის წერტილია N. ორივე მიღებული წერტილი $ABCD$ სიბრტყეში მდებარეობს. ამიტომ MN წრფე წარმოადგენს საძებნი სიბრტყისა და $ABCD$ სიბრტყის თანაკვეთას. BC და MN წრფეების გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ K ასოთი. ის SCB სიბრტყეში მდებარეობს. ამიტომ შეგვიძლია ის Y წერტილთან შევაერთოთ და მივიღოთ კვეთის სიბრტყის წერტილები V და U. ანალოგიურად, DC და MN წრფეების თანაკვეთა L – მდებარეობს DCS სიბრტყეში და ამიტომ შეგვიძლია ამ სიბრტყეში ZL წრფის გატარება, რომელიც ასაგები კვეთის კიდევ ერთ წერტილს მოგვცემს – T-ს. $WUVT$ სასურველი კვეთის სიბრტყეა.

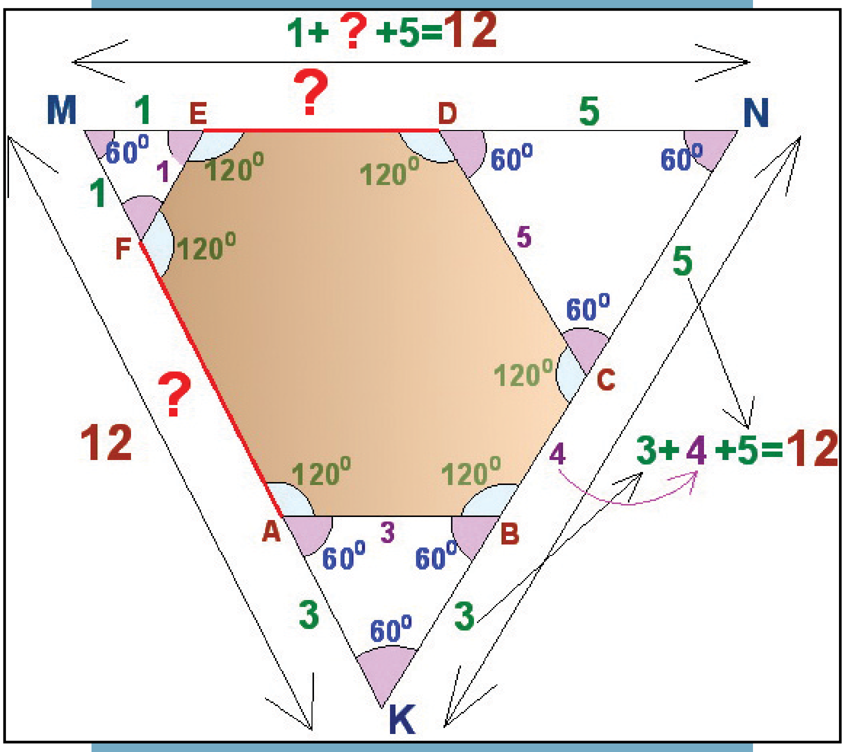


ნახ. 31

მათემატიკა



?
E
D
1
120⁰
120⁰
F
120⁰
5
?
120⁰
C
4
120⁰
120⁰
A
3
B



1+ ? +5=12
M
1
E
?
D
5
N
1
F
5
C
?
12
3+4 +5=12
4
A
3
B
3
3
K

წინა ნომრის ამოცანების ამოხსნები

ამოცანა 1

განვსაზღვროთ ნატურალურ რიცხვთა სამი მიმდევრობა (a_n), (b_n) და (c_n) რეკურენტულად შემდეგი წესით:
1. $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $c_1 = 4$;
2. a_n არის უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომელიც არ ეკუთვნის სიმრავლეს $\{a_1, ..., a_{n-1}, b_1, ..., b_{n-1}, c_1, ..., c_{n-1}\}$;
3. b_n არის უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომელიც არ ეკუთვნის სიმრავლეს $\{a_1, ..., a_{n-1}, a_n, b_1, ..., b_{n-1}, c_1, ..., c_{n-1}\}$;
4. $c_n = 2b_n + n - a_n$. აჩვენეთ, რომ ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის სამართლიანია უტოლობა

$0 < n(1+\sqrt{3}) - b_n < 2$.

ამოხსნა. ვაჩვენოთ, რომ $\alpha < n(1+\sqrt{3}) - b_n < \beta$ სადაც $\alpha = (9-5\sqrt{3})/3$ და $\beta = (12-4\sqrt{3})/3$. შევნიშნოთ, რომ (c_n) მიმდევრობა არ შეიცავს ორ მომდევნო მთელ რიცხვს. ინდუქციის გამოყენებით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $1 < b_n - a_n \le 2$ და $1 \le a_{n+1} - a_n \le 2$. თუ გამოვიყენებთ ტოლობას

$$c_{n+1} - c_n = 2(b_{n+1} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - b_n) - (b_n - a_n) + 1,$$

დავასკვნით, რომ

$$2 \le c_{n+1} - c_n \le 6.$$

ბოლო ტოლობიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ a_n და b_n მიმდევრობებში არ არსებობს ექვსი მომდევნო მთელი რიცხვი.

ავღნიშნოთ $\gamma_n = n(1+\sqrt{3}) - b_n$. ინდუქციის მეთოდით ვაჩვენოთ, რომ $\alpha < \gamma_n < \beta$. ეს უტოლობა ცხადია სამართლიანია $n = 1$. დაუშვათ, რომ როცა $n < k$, დასამტკიცებელი ორმაგი უტოლობა სამართლიანია. განვიხილოთ ყოველი $k > 2$ ნომრისათვის მიმდევრობა $a_{k-2} < b_{k-2} < a_{k-1} < b_{k-1} < a_k < b_k$. როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ, ვინაიდან $b_k - a_{k-2} \ge 6$ იარსებებს ერთი მაინც რიცხვი c_j, რომელიც აღმოჩნდება a_{k-2} და b_k რიცხვებს შორის. ვთქვათ c_n მათ შორის ის უდიდესი რიცხვია, რომელიც არ აღემატება $b_k - 1$-ს. გვექნება, რომ სიმრავლე

$$\{a_1, a_2, ..., a_k, b_1, b_2, ..., b_k, c_1, c_2, ..., c_n\}$$

პირველი მომდევნო რიცხვებია, რომლებიც მოთავსებულია 1 და b_k რიცხვებს შორის. კერძოდ გვექნება

$$b_k = 2k + n = c_n + r, \text{ სადაც } 1 \le r \le 5.$$

მეორე მხრივ, გვაქვს $c_n = 2b_n + n - a_n = b_n + n + (b_n - a_n)$, $b_n - a_n \le 2$ და

$$2k + n = b_k = b_n + n + s, \text{ სადაც } 2 \le s \le 7.$$

s რიცხვისათვის შეგვიძლია მივიღოთ უფრო ზუსტი შეფასება. ჩვენ გვექნება ტოლობა მხოლოდ თუ $r = 5$, მაგრამ ამ შემთხვევაში $c_{n+1} - c_n = 6$. თუ გამოვიყენებთ ფორმულას $c_{n+1} - c_n$ გამოსახულებისათვის დავასკვნით, რომ $b_n - a_n = 1$ და ამიტომ გვექნება $s \le 6$. შევაფასოთ ახლა γ_k. გვაქვს

$$\gamma_k = (1+\sqrt{3})k - b_k = (1+\sqrt{3})\left(\frac{b_n + s}{2}\right) - (b_n + n + s) = (s - \gamma_n)\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right).$$

თუ $s \le 6$ გვექნება (გამოვიყენოთ $\gamma_k \ge \alpha$ უტოლობა)

$$\gamma_k \le (6-\alpha)\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) < \beta.$$

თუ $s = 6$, მაშინ $b_{n+1} - a_{n+1} = a_{n+1} - b_n = 2$ და გვაქვს $b_{n+1} - b_n = 4$. ამიტომ $\gamma_{n+1} - \gamma_n = 1 + \sqrt{3} - (b_{n+1} - b_n) = \sqrt{3} - 3$. ვინაიდან $n + 1 < k$ თუ გამოვიყენებთ ინდუქციის დაშვებას $\gamma_{n+1} > \alpha$ მივიღებთ $\gamma_n = \gamma_{n+1} + 3 - \sqrt{3} > \alpha + 3 - \sqrt{3}$. საბოლოოდ გვექნება

$$\gamma_k \le (6 - \alpha - 3 + \sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \beta.$$

თუ $s = 5$, მაშინ აუცილებლად $b_{n+1} - b_n \in [3;4]$. ამიტომ $\gamma_{n+1} - \gamma_n \le \sqrt{3} - 2$ და $\gamma_n \le \alpha + 2 - \sqrt{3}$.

გვექნება შეფასება $\gamma_n < (5 - \alpha - 2 + \sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \beta$. ანალოგიური გზით ვაჩვენებთ, რომ $\gamma_k > \alpha$.

ამოცანა 2

იპოვეთ
$(...(((x-2)^2-2)^2-2)^2-...-2)^2$
გამოსახულების მრავალწევრის სახით წარმოდგენაში x^2-ის კოეფიციენტი თუ კვადრატში ახარისხება გვაქვს n-ჯერ.

ამოხსნა. ვთქვათ a_n არის x^2-ის კოეფიციენტი, ხოლო b_n არის x-ის კოეფიციენტი. გვაქვს რეკურენტული ფორმულა $a_n = 4a_{n-1} + b_{n-1}$ და $b_n = 4b_{n-1}$, სადაც $a_1 = 1$ და $b_1 = -4$. პირველ რიგში გვექნება $b_n = -4^n$. თუ ამ უკანასკნელ ფორმულას გავითვალისწინებთ მივიღებთ $a_n = 4a_{n-1} + 4$, საიდანაც გვექნება $a_n = 4^{n-1}(4^n - 1)/3$.

ამოცანა 3

იპოვეთ
$\sigma : \{1,2, ..., n\} \to \{1,2, ..., n\}$ ურთიერთცალსახა ასახვა (გადანაცვლება) ისეთი, რომ $S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} |\sigma(i) - i|$ იყოს მაქსიმალური.

ამოხსნა. ვაჩვენოთ, რომ თუ σ გადანაცვლებაზე $S(\sigma)$ ფუნქცია მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღწევს მაშინ $\sigma(1) > \sigma(2) > ... > \sigma(n)$.
პირველ რიგში ვაჩვენოთ შემდეგი შუალედური დებულების სამართლიანობა. თუ $a < c$, $b < d$, მაშინ სამართლიანია უტოლობა

$$|a-b| + |c-d| \leq |a-d| + |b-c|$$

და ტოლობას ადგილი აქვს როცა $a < c < b < d$ ან $b < d < a < c$.
ზოგადობის შეზღუდვის გარეშე, ჩვენ შეგვიძლია დაუშვათ, რომ $a < b, d$. თუ გამოვიყენებთ ძვრის ოპერატორს და დასამტკიცებელი უტოლობის ერთგვაროვნებას, შეგვიძლია ზოგადობის შეზღუდვის გარეშე ვიგულისხმოთ, რომ $a = 0$, $c = 1$.
თუ $b < 1$, $d < 1$ მაშინ დასამტკიცებელი უტოლობა დავა $2b < 2d$ უტოლობაზე.
თუ $b < 1$, $d > 1$ მაშინ დასამტკიცებელი უტოლობა ტოლფასია $2b < 2$ უტოლობის.
თუ $b > 1$, $d > 1$ მაშინ ვღებულობთ ტოლობას.
ვთქვათ σ გადანაცვლებაზე $S(\sigma)$ მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღწევს. დაუშვათ, რომ არსებობს $i < j$ ისეთი, რომ $\sigma(i) < \sigma(j)$. განვიხილოთ ახალი გადანაცვლება σ^*, რომელიც მიიღება თუ σ გადანაცვლებაში ადგილებს შეუცვლით i და j ნომრებს.
თუ გამოვიყენებთ ზემოთ მოყვანილ შენიშვნას დავასკვნით, რომ $S(\sigma^*) \geq S(\sigma)$. თუ აღნიშნულ პროცესს გავაგრძელებთ ყველა (i, j) წყვილებისათვის ზემოთ მოყვანილი თვისებით, საბოლოოდ მივიღებთ გადანაცვლებას

$$\gamma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

გარდა ამისა გვექნება

$$S(\sigma) \leq S(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} |n - 2i + 1|.$$

ამოცანა 4

მოცემულია $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$ ვექტორები, რომელთა სიგრძეები არ აღემატება ერთს. აჩვენეთ, რომ $\vec{c} = \vec{a_1} \mp \vec{a_2} \mp \cdots \mp \vec{a_n}$ ვექტორის წარმოდგენაში შესაძლებელია ნიშნები ისე დავსვათ, რომ $|\vec{c}| \leq \sqrt{2}$.

ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ თუ მოცემული გვაქვს სამი ვექტორი $\vec{a}, \vec{b}$ და $\vec{c}$, რომელთა სიგრძეები არ აღემატება ერთს, მაშინ ვექტორებიდან $\vec{a} \pm \vec{b}$, $\vec{b} \pm \vec{c}$ $\vec{a} \pm \vec{c}$ ერთი მაინც ვექტორის სიგრძე არ აღემატება ერთს. მართლაც ვექტორებიდან $\pm\vec{a}, \pm\vec{b}$ და $\pm\vec{c}$ რომელიმე ორს შორის კუთხე არ აღემატება $60°$ და

ამიტომ მათი სხვაობის სიგრძე არ აღემატება ერთს. ამ გზით $\overrightarrow{a_1} \mp \overrightarrow{a_2} \mp \cdots \mp \overrightarrow{a_{n-1}}$ ჯამში შეგვიძლია დავსვათ ნიშნები ისე, რომ მიღებული ვექტორის სიგრძე არ აღემატებოდეს ერთს. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ რაიმე ორი ვექტორია, რომელთა სიგრძეები არ აღემტება ერთს, მაშინ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ან $\vec{a}$ და $-\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე არ აღემატება 90° და ამიტომ $|\vec{a}+\vec{b}| \le \sqrt{2}$ ან $|\vec{a}-\vec{b}| \le \sqrt{2}$. მაშასადამე $\vec{c} = \overrightarrow{a_1} \mp \overrightarrow{a_2} \mp \cdots \mp \overrightarrow{a_n}$ ჯამში შესაძლებელია ნიშნები ისე გავანაწილოთ, რომ რომ $|\vec{c}| \le \sqrt{2}$.

$A_1, A_2..., A_n$ ($n \ge 4$) ამოზნექილი მრავალკუთხედის პერიმეტრია p, ხოლო ყველა დიაგონალის სიგრძეთა ჯამია d. აჩვენეთ, რომ $n-3 < 2\frac{d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2$.

ამოცანა 5

ამოხსნა. ავღნიშნოთ $\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} |A_iA_{i+k}|$. ვაჩვენოთ, რომ

$$p = \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_{[n/2]} \text{ და}$$
$$\alpha_{[n/2]+1} > \ldots. > \alpha_{n-2} > \alpha_{n-1} = p.$$

პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ $p < \alpha_2$. ვთქვათ $A_iA_{i+2} \cap A_{i+1}A_{i+3} = O_{i+1}$. ვინაიდან $\angle A_{i+1}A_{i+2}O_{i+1} \le \angle A_{i+1}A_{i+2}O_{i+2}$, ამიტომ $|A_{i+1}O_{i+1}| \le |A_{i+1}O_{i+2}|$. $A_iO_iA_{i+1}$ სამკუთხედში $|A_{i+1}O_{i+1}|+|O_{i+1}A_{i+2}|>|A_{i+1}A_{i+2}|$. თუ აღნიშნულ უტოლობებს შევკრიბავთ და მივიღებთ $p < \alpha_2$.

ვთქვათ $k < [n/2] - 1$ და $A_iA_{i+k} \cap A_{i+1}A_{i+k+1} = O$. კვლავ სამკუთხედის უტოლობის ძალით გვექნება $|A_{i+1}O_{i+k}| + |O_{i+1}A_{i+k+1}| = |A_iO| + |OA_{i+k}| + |A_{i+1}O| + |OA_{i+k+1}| > |A_{i+1}A_{i+k}| + |A_iA_{i+k+1}|$.

მიღებული უტოლობების შეკრებით მივიღებთ, რომ $2\alpha_k > \alpha_{k+1} + \alpha_{k-1}$, ამიტომ გვექნება

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k < \alpha_k - \alpha_{k-1} < \ldots. < \alpha_2 - \alpha_1.$$

თუ $n = 2m$, მაშინ $2\alpha_m > \alpha_{m+1} + \alpha_{m-1} = 2\alpha_{m+1}$ და ამიტომ $\alpha_m > \alpha_{m-1}$. მაშასადამე ყოველი k რიცხვისათვის გვაქვს $\alpha_{k+1} > \alpha_k$. მიღებული უტოლობების შეკრებით მივიღებთ, რომ $2d > (n-3)p$.

თუ განვიხილავთ სამკუთხედის უტოლობებს $|A_iA_j| < |A_iA_{i+1}| + \ldots + |A_{j-1}A_j|$ და შევკრიბავთ ყოველი i და j მნიშვნელობებისათვის მივიღებთ

$$2d < \left(\left(\left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right]\right) - 2\right)p.$$

ამოცანები

ამოცანა 1.

ვთქვათ ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის $S(n)$ აღნიშნავს ყველა იმ ნატურალურ რიცხვების სიმრავლეს, რომელთა წარმოდგენა შესაძლებელია სახით $1 + g + g^2 + ... + g^{n-1}$, სადაც $g \geq 2$ რაიმე ნატურალური რიცხვია. 1) აჩვენეთ, რომ $S(3) \cap S(4) = \varnothing$, 2) იპოვეთ $S(3) \cap S(5)$.

ამოცანა 2.

ვთქვათ ფუნქცია f: $R \to R$ აკმაყოფილებს პირობებს: ა) ყოველი $x \in R$ მნიშვნელობისათვის $f(x) \leq 1$; ბ) ყოველი $x \in R$ მნიშვნელობისათვის $f\left(x+\frac{13}{42}\right)+f(x)=f\left(x+\frac{1}{6}\right)+f\left(x+\frac{1}{7}\right)$. აჩვენეთ, რომ f არის პერიოდული ფუნქცია.

ამოცანა 3.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის S_1, S_2, ..., S_m ქვესიმრავლეების ერთობლიობას ვუწოდოთ სრული თუ ყოველი ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს ერთადერთი S_j სიმრავლე, რომელსაც ის ეკუთვნის. ვთქვათ $m > 1$ და α_1, α_2, ..., α_m რაიმე ფიქსირებული დადებითი რიცხვებია. ყოველი ფიქსირებული $j(1 \leq j \leq m)$ ნომრისათვის, ვთქვათ S_j სიმრავლე შედგება ყველა $[n\alpha_j]$ სახის რიცხვებისაგან, სადაც n ღებულობს მნიშვნელობებს ნატურალური რიცხვთა სიმრავლიდან ($[x]$-ით აღნიშნულია x-ის მთელი ნაწილი). აჩვენეთ, რომ სიმრავლეთა აგებული სისტემა სრულია მხოლოდ მაშინ, როცა $m = 2$, $\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}=1$ და α_1 ირაციონალური რიცხვია.

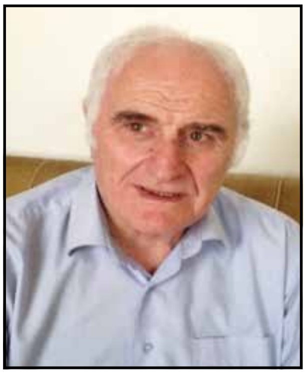
ამოცანა 4.

ვთქვათ C მოცემული წესიერი მრავალკუთხედია. ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის სიბრტყეზე ააგეთ $S(n)$ სიმრავლე, რომელსაც ექნება თვისება: $S(n)$ სიმრავლის ნებისმიერი n ელემენტიანი ქვესიმრავლე შეგვიძლია გადავფაროთ C ფიგურით, თუმცა $S(n)$ სიმრავლისათვის არ არსებობს C ფიგურით მისი გადაფარვა. (ვიტყვით, რომ არსებობს A სიმრავლის C ფიგურით გადაფარვა თუ შეგვიძლია ვიპოვოთ C ფიგურის სიბრტყეზე მოძრაობით მისი ახალი მდებარეობა რომლის ქვესიმრავლეც იქნება A სიმრავლე).

ამოცანა 5.

ვთქვათ $ABCD$ ამოზნექილი ოთხკუთხედია. ცნობილია, რომ წრეწირი რომლის დიამეტრია AB ეხება CD წრფეს. აჩვენეთ, რომ წრეწირი, რომლის დიამეტრია CD ეხება AB წრფეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა AD და BC პარალელურია.

მათემატიკის საერთაშორისო ოლიმპიადაზე წარდგენილი ერთი ამოცანის შესახებ



ლერი გოგოლაძე

ასოცირებული პროფესორი.
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

საერთაშორისო მათემატიკურ ოლიმპიადაში მონაწილე თითოეული გუნდი ოლიმპიადის ამოცანათა კომიტეტში აგზავნის ამოცანებს. ამოცანათა კომიტეტში ხდება მიღებულ ამოცანათა განხილვა და შეირჩევა 25-30 ამოცანა. ეს ამოცანები იბეჭდება ბუკლეტის სახით: „short list problems and solutions“. ეს მასალა ურიგდება მხოლოდ ჟიურის წევრებს, ოლიმპიადაში მონაწილე ქვეყნების ლიდერებს. ჟიური ამოცანებს ყოფს სამ – ადვილ, საშუალო და რთულ ჯგუფებად. შემდეგ კენჭისყრის შედეგად შეირჩევა ექვსი ამოცანა. ეს ამოცანები ურიგდებათ ორი დღის განმავლობაში ოლიმპიადის მონაწილეებს; თითოეულ დღეს ერთი ადვილი ერთი საშუალო და ერთი რთული ამოცანა.

2003 წელს ოლიმპიადა ჩატარდა იაპონიის დედაქალაქ ტოკიოში. საქართველოდან წარგზავნილი ამოცანა მოხვდა short-listed-ში და ჟიურის კენჭისყრის შედეგად რთულ ამოცანათა ჯგუფში. საბოლოოდ ის ვერ მოხვდა იმ ექვს ამოცანათა შორის, რომელიც ურიგდებათ ოლიმპიადის მონაწილეებს, თუმცა ბოლო კენჭისყრამდე ინარჩუნებდა ამ შანსს და სპეციალისტთა მოწონება დაიმსახურა. ახლა ჩამოვაყალიბებ ამ ამოცანას რომლის ავტორები არიან გიორგი ბარელაძე და ლერი გოგოლაძე.

ამოცანა. განვიხილოთ დადებით რიცხვთა ორი კლებადი მიმდევრობა

$$a_1 \ge a_2 \ge .... \text{ და } b_1 \ge b_2 \ge ....$$

განვსაზღვროთ ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის რიცხვები

$$A_n = a_1 + a_2 + ... + a_n,\ B_n = b_1 + b_2 + ... + b_n.$$

ვთქვათ

$$d_n = \min(a_n, b_n) \text{ და } D_n = d_1 + d_2 + ... + d_n.$$

1) არსებობს თუ არა ისეთი დადებითი რიცხვთა კლებადი (a_n) და (b_n) მიმდევრობები ისეთი, რომ (A_n) და (B_n) არ იყოს შემოსაზღვრული, ხოლო (D_n) შემოსაზღვრული?

2) შეიცვლება თუ არა 1) კითხვის პასუხი თუ დამატებით დაუშვებთ, რომ $b_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, ...$?

ამოხსნა. 1) მიმდევრობები მოცემული თვისებებით არსებობს. ავიღოთ დადებით არაზრდად რიცხვთა (d_n) მიმდევრობა ისეთი, რომ (D_n) იყოს შემოსაზღვრული. ყოველი ნატურალური m-ის-

ათვის შევარჩიოთ k_m ისე, რომ

$$(k_{m+1}-k_m)d_{k_m} \geq 1. \qquad (1)$$

ახლა განვსაზღვროთ (a_n) და (b_n) მიმდევრობები შემდეგნაირად:

თუ $k_{2n-1} \leq i < k_{2n}$, მაშინ

$$a_i = d_{k_{2n-1}},\ b_i = d_i, \qquad (2)$$

ხოლო თუ $k_{2n} \leq i < k_{2n+1}$ მაშინ

$$a_i = d_i,\ b_i = d_{k_{2n}}, \qquad (3)$$

ცხადია, რომ

$$a_1 < a_2 < \ldots.,\ b_1 < b_2 < \ldots.\ d_i = \min(a_i, b_i)\ \ i = 1, 2, \ldots,$$

გარდა ამისა (1) - (2) -დან გვექნება

$$a_{k_{2n-1}} + a_{k_{2n-1}} + \ldots + a_{k_2} = (k_{2n} - k_{2n-1})\, d_{k_{2n-1}} \geq 1,$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ (A_n) შემოუსაზღვრელია, ანალოგიურად მიიღება (B_n) მიმდევრობის შემოუსაზღვრელობა.

2) დიახ. განვიხილოთ ორი შემთხვევა

I შემთხვევა. $\frac{1}{i} = b_i = d_i$ მხოლოდ სასრული რაოდენობა i-ებისათვის. მაშინ იარსებებს ისეთი N, რომ $d_i = a_i$, როცა $i > N$. ამიტომ ყოველი $n > N$-სათვის გვექნება

$$D_n - D_N = d_N + d_{N+1} + \ldots + d_n = a_N + a_{N+1} + \ldots + a_n = A_n - A_N.$$

მაშასადამე (D_N) მიმდევრობა არ არის შემოუსაზღვრული.

II შემთხვევა. $\frac{1}{i} = b_i = d_i$ უსასრულოდ ბევრი i-ებისათვის. შევარჩიოთ (k_m) მიმდევრობა ისე, რომ $k_{m+1} > 2k_m$, $\frac{1}{k_m} = b_{k_m} = d_{k_m}$ მაშინ

$$d_{k_m} + d_{k_m+1} + \ldots. + d_{k_{m+1}} \geq (k_{m+1} - k_m)\frac{1}{k_m} \geq \frac{1}{2}.$$

ე.ი. (D_N) არაა შემოსაზღვრული.

ნორჩი ქართველი მათემატიკოსები საერთაშორისო ოლიმპიადებში

გიორგი ჭელიძე

გივი ნადიბაიძე

ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების ლიდერი, ასისტენტ პროფესორი, ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების თანალიდერი, ასისტენტ პროფესორი, ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

2014 წლის საერთაშორისო ოლიმპიადა სასკოლო მათემატიკაში ჩატარდა სამხრეთ აფრიკის რესპუბლიკის ქალაქ კეიპტაუნში ივლისის თვეში. ასპარეზობაში მონაწილე გუნდები 6-6 მოსწავლისაგან შედგებოდა. საქართველოს ნაკრებს წარმოადგენდნენ: გიორგი სვანაძე (თბილისის კომაროვის სკოლა-პანსიონის XII კლასელი); გიორგი გონაშვილი (თბილისის კომაროვის სკოლა-პანსიონის XII კლასელი); ზაურ მეშველიანი (თბილისის კომაროვის სკოლა-პანსიონის XI კლასელი); მიხეილ სოხაშვილი (თბილისის კომაროვის სკოლა-პანსიონის XI კლასელი); საბა ძმანაშვილი (დემირელის სახელობის კოლეჯის XI კლასელი) და გიორგი ხოსროშვილი (თბილისის კომაროვის სკოლა-პანსიონის XI კლასელი).

საქართველოს ოლიმპიური ნაკრების ფორმირება მოხდა ოთხი შესარჩევი ტურის შედეგების საფუძველზე. შესარჩევ წრეებს ადმინისტრირებას უწევდა შოთა რუსთაველის სახელობის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი. მკაცრად რეგლამენტირებულ 4-ტურიან წერითი გამოცდებში მონაწილეობის უფლება კი მოიპოვეს რესპუბლიკური სასკოლო მათემატიკური ოლიმპიადის დასკვნითი ტურის შედეგებზე დაყრდნობით გამოვლენილმა 16-მა საუკეთესო მოსწავლემ. მათ შორის იყო თორმეტი მეთერთმეტე–მეთორმეტე კლასელი და ოთხი მეათე კლასელი. შესარჩევი წრეების საფუძველზე დაკომპლექტდა 6-მოსწავლიანი ნაკრები.

ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების დაკომპლექტების შემდეგ ერთთვიანი საწვრთნელი შეკრება ჩატარდა კომაროვის სკოლაში ყოველდღიური 6-საათიანი მეცადინეობებით. ბოლო ეტაპზე კი ეროვნულმა სამეცნიერო ფონდმა უზრუნველყო ნაკრების წევრების ერთკვირიანი წვრთნები ბაკურიანში, სადაც მოსწავლეებს უტარდებოდათ სატრენინგო წრეები საერთაშორისო ოლიმპიადების პირობების გათვალისწინებით.

გუნდის ლიდერისა და თანალიდერის გარდა მოსწავლეთა მომზადებაში ასევე მონაწილეობდნენ გამოცდილი ყოფილი ოლიმპიელები: გიორგი არაბიძე, ლაშა ლაკერბაია და ლერი ბანცური.

საერთაშორისო ოლიმპიადას ხელმძღვანელობს ჟიური, რომლის წევრები არიან ქვეყნების წარმომადგენლები. ჟიურის შეკრება ჩატარდა სამხრეთ აფრიკის რესპუბლიკის ქალაქ კეიპტაუნში, სადაც ჟიურიმ სხდომებზე რამდენიმე ათეული

ამოცანიდან (short list) შეარჩია 6 ამოცანა, რომლებიც გადანაწილდა 3–3 ამოცანად და მიეცათ მოსწავლეებს ორ ტურად, ზედიზედ ორ დღეს. საგანგებოდ უნდა აღინიშნოს, რომ შერჩევის კანდიდატ ამოცანათა შორის (short list, G1) და შემდეგ უკვე ჟიურის სხდომაზე კენჭისყრის შედეგების მიხედვით ოლიმპიადის მეორე ტურის ბილეთში მოხვდა გიორგი არაბიძის მიერ შედგენილი გეომეტრიული ამოცანა. ასევე, შერჩევის კანდიდატ ამოცანათა შორის (short list, A3) მოხვდა ს. ჩობანიანის, გ. გიორგობიანის და გ. ჭელიძის მიერ შედგენილი ალგებრული ამოცანა

საქართველოს ნაკრები გუნდი ქალაქ კეიპტაუნში ჩავიდა 3 ივლისს. გამოცდები ჩატარდა 5 და 6 ივლისს. შემდეგ დღეებში კი ჟიურის წევრებმა კოორდინატორებთან ერთად მოახდინეს ნაწერების შეფასება და ქულების შეჯამება. შედეგად ჩვენმა ხუთმა მოსწავლემ ჯილდო დაიმსახურა: ზაურ მეშველიანმა დაიმსახურა ვერცხლის მედალი, გიორგი სვანაძემ და გიორგი გონაშვილმა დაიმსახურეს ბრინჯაოს მედლები, ხოლო მიხეილ სოხაშვილი და საბა ძმანაშვილი დაჯილდოვდნენ საპატიო სიგელებით. ვუსურვოთ ჩვენს ნორჩ ოლიმპიელებს შემდგომი წარმატებები.

ქვემოთ მოვიყვანთ იმ ამოცანებს, რომლებიც მიეცათ მოსწავლეებს წერებზე:

ამოცანა 1. ვთქვათ $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ დადებითი მთელი რიცხვების უსასრულო მიმდევრობაა. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს მხოლოდ ერთი მთელი რიცხვი $n \ge 1$ ისეთი, რომ

$$a_n < \frac{a_0+a_1+\cdots+a_n}{n} \le a_{n+1}. \quad (*)$$

ამოხსნა. ვთქვათ dn $= (a_0 + a_1 + \dots + a_n) - na_n$, $n = 1,2,\dots$ მაშინ, $d_1 = (a_0 + a_1) - a_1 = a_0 > 0$ და $d_{n+1} - d_n = n(a_n - a_{n+1}) < 0$. ამრიგად გვაქვს მთელ რიცხვთა კლებადი მიმდევრობა $d_1 > d_2 > \cdots$. ე.ი. არსებობს ერთადერთი ნომერი $n \ge 1$ ისეთი, რომ $d_n > 0 \ge d_{n+1}$. ახლა შევნიშნოთ, რომ $d_n > 0$ და $d_{n+1} \le 0$ უტოლობები ეკვივალენტურია შესაბამისად (*) -ის პირველი და მეორე უტოლობებისა. ამრიგად არსებობს ერთადერთი $n \ge 1$ ისეთი, რომ (*) უტოლობათა ჯაჭვი ჭეშმარიტია. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამოცანა 2. ვთქვათ $n \ge 2$ მთელი რიცხვია. განიხილება $n \times n$ ჭადრაკის დაფა, რომელიც n^2 ცალი ერთეულოვანი კვადრატისგან (უჯრისგან) შედგება. ასეთ დაფაზე n ცალი ეტლის განლაგებას ეწოდება მშვიდობიანი თუ ყოველი სტრიქონი და ყოველი სვეტი შეიცავს მხოლოდ ერთ ეტლს. იპოვეთ უდიდესი მთელი დადებითი k ისეთი, რომ n ცალი ეტლის ყოველი მშვიდობიანი განლაგებისთვის არსებობს $k \times k$ კვადრატი, რომლის k^2 ცალი უჯრიდან არც ერთ უჯრაზე ეტლი არ იმყოფება.

ამოხსნა. ვთქვათ l მთელი დადებითი რიცხვია. ვაჩვენოთ, რომ

თუ $n > l^2$-ზე, მაშინ ყოველი მშვიდობიანი კონფიგურაცია შეიცავს $l \times l$ კვადრატს, რომლის არც ერთ უჯრაზე ეტლი არ იმყოფება.

თუ $n \le l^2$-ზე მაშინ არსებობს მშვიდობიანი კონფიგურაცია, რომლის ყოველ $l \times l$ კვადრატზე ერთი ეტლი მაინც იმყოფება.

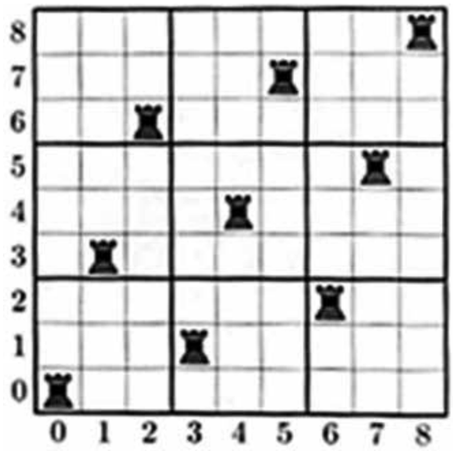
ცხადია ეს ორი წინადადება იძლევა ამოცანაზე პასუხს: k-ს უდიდესი მთელი მნიშვნელობაა $\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor$, ანუ უდიდეს მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატება $\sqrt{n-1}$.

(i). დავუშვათ, $n > l^2$. განვიხილოთ ნებისმიერი მშვიდობიანი კონფიგურაცია. განვიხილოთ პირველ სვეტში მდგომი ეტლის შემცველი სტრიქონი R. განვიხილოთ მართკუთხედი l x n, რომელიც შეიცავს სტრიქონს R-ს. ამ მართკუთხედში ამოცანის პირობის თანახმად იმყოფება ზუსტად l ცალი ეტლი. ახლა წავშალოთ მარცხნიდან მოყოლებული $n - l^2 \ge 1$ ცალი სვეტი, ანუ ამ წაშლის შემდეგ ერთი ეტლი მაინც წაიშლება, ვინაიდან პირველივე ანუ ყველაზე მარცხენა სვეტი ეტლს შეიცავდა. ამრიგად, მივიღებთ $l \times l^2$ მართკუთხედს, რომელშიც მაქსიმუმ $l - 1$ ცალი ეტლია. ახლა, თუ ამ მართკუთხედს დავყოფთ l ცალ $l \times l$ კვადრატად, გვექნება ერთი მაინც $l \times l$ კვადრატი, რომელიც თავისუფალია ეტლისგან. (i) დამტკიცებულია.

(ii) ვთქვათ $n \le l^2$. ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა $n = l^2$ და ამ შემთხვევისთვის ავაგოთ ისეთი მშვიდობიანი კონფიგურაცია, რომ ყოველ $l \times l$ კვადრატში იყოს ერთი მაინც ეტლი.

გადავნომროთ სტრიქონები ქვემოდან ზემოთ და სვეტები მარცხნიდან მარჯვნივ შესაბამისი რიცხვებით $0, 1, \dots, l^2 - 1$. ყოველ უჯრას შეესაბამება რიცხვთა წყვილი (r, c), რომლის პირველი კოორდინატი მიუთითებს სტრიქონის, ხოლო მეორე კოორდინატი სვეტის ნომერს. განვათავსოთ ეტლები შემდეგ უჯრებზე $(il + j, jl + i)$, $i, j = 0, 1, \dots,$

$l - 1$. ქვემოთ მოყვანილია მაგალითი, როცა $l = 3$.



ვინაიდან ყოველი რიცხვი $\{0, 1, \ldots, l^2 - 1\}$ სიმრავლიდან ერთადერთი გზით წარმოდგება $il + j$, $(0 \leq i, j \leq l - 1)$ სახით, ამიტომ ზემოთ მოყვანილი განლაგების დროს ყოველი სვეტი და სტრიქონი შეიცავს ერთ და მხოლოდ ერთ ეტლს. ახლა ვაჩვენოთ, რომ ყოველი $l \times l$ ზომის კვადრატი A შეიცავს ეტლს. ვთქვათ A-ს ყველაზე ქვემოთა სტრიქონი არის $pl \mid q$, $0 < p, q < l\ 1$ სახის რიცხვი (შევნიშნოთ, რომ $pl \mid q < l^2\ l$). მაშინ A კვადრატის სტრიქონების ნომრები იქნება შესაბამისად შემდეგი რიცხვები

$$pl \mid q, pl \mid q \mid 1, \ldots, pl \mid l\ 1, (p \mid 1)l, \ldots, (p \mid 1)l \mid q \quad 1. (*)$$

ჩვენი აგების თანახმად ეტლები იმყოფებიან სვეტებში, რომელთა ნომრებია შესაბამისად რიცხვები

$$ql \mid p, (q \mid 1)l \mid p, \ldots, (l \quad 1)l \mid p, (p \mid 1), l \mid p \mid 1, \ldots, \\ (q \quad 1)l \mid p \mid 1. (**)$$

დავალაგოთ ეს რიცხვები ზრდის მიხედვით, გვექნება

$$p \mid 1, p \mid 1 \mid l, \ldots, p \mid 1 \mid (q \quad 1)l, p \mid qi, p \mid (q \mid 1)l, \ldots, \\ p \mid (l \quad 1)l.$$

ცხადია, რომ ამ მიმდევრობის პირველი წევრი, ანუ $p \mid 1 < l \quad 1$, ხოლო ბოლო წევრი, ანუ $p \mid (l \quad 1)l > (l \quad 1)l$. ასევე ცხადია, რომ ამ მიმდევრობის ყოველ მომდევნო წევრებს შორის სხვაობა არ აღემატება l-ს. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ გავნიხილავთ ნებისმიერ l ცალ მომდევნო სვეტს, რომელიმე მათგანის სვეტის ნომერი დაემთხვევა (**) მიმდევრობის რომელიღაც წევრს. ამრიგად A-ს სტრიქონების ნომრები ემთხვევა (*) მიმდევრობას, ხოლო A-ს სვეტების ნომრებიდან ერთი მაინც სვეტის ნომერი ეკუთვნის (**) მიმდევრობას. ეს კი ნიშნავს, რომ A- შეიცავს ეტლს.

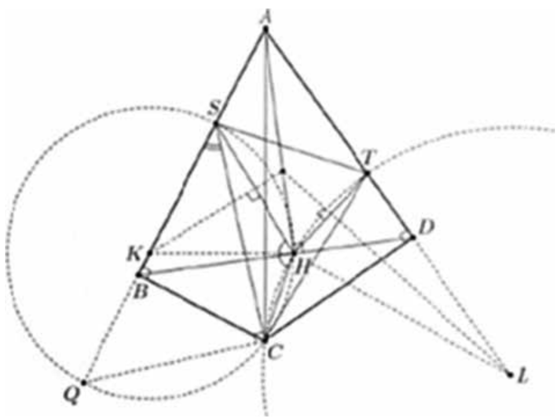
ახლა გადავიდეთ შემთხვევაზე, როცა $n < l^2$. შევავსოთ $n \times n$ დაფა $l^2 \times l^2$ დაფამდე. დავუმატოთ მარჯვნივ და ქვემოთ შესაბამისად $l^2 \quad n$ სვეტი და $l^2 \quad n$ სტრიქონი. ახლა გამოვიყენოთ აგება $n = l^2$-თვის, ანუ ამ შემთხვევისთვის ავაგოთ ისეთი მშვიდობიანი კონფიგურაცია, რომ ყოველ $l \times l$ კვადრატში იყოს ერთი მაინც ეტლი. ახლა ისევ მოვაშოროთ დამატებული $l^2 \quad n$ სვეტი და სტრიქონი, ანუ მივიღებთ თავდაპირველ $n \times n$ დაფას, რომლშიც ცხადია, რომ ყოველ $l \times l$ კვადრატში იქნება ერთი მაინც ეტლი. თუ ამ დამატებული სტრიქონებისა და სვეტების მოშორების შემდეგ მოხდა ისე, რომ $n \times n$ დაფის რომელიღაცა სვეტი ან სტრიქონი განთავისუფლდა ეტლისგან, მოვიქცეთ შემდეგნაირად. ჯერ შევნიშნოთ, რომ თუ ამ მოშორების შემდეგ $n \times n$ დაფაში დაგვრჩა m ცალი ცარიელი სვეტი, მაშინ ასევე აუცილებლად ცარიელი დაგვრჩება ზუსტად m ცალი სტრიქონიც. ამრიგად შეგვიძლია დავამყაროთ რაიმე ბიექცია ასეთ სტრიქონებსა და სვეტებს შორის და სტრიქონ-შესაბამის სვეტის თანაკვეთაზე დავსვათ ეტლი. მივიღებთ სასურველ მშვიდობიან კონფიგურაცის. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

პასუხი: $k = \lfloor \sqrt{n - 1} \rfloor$.

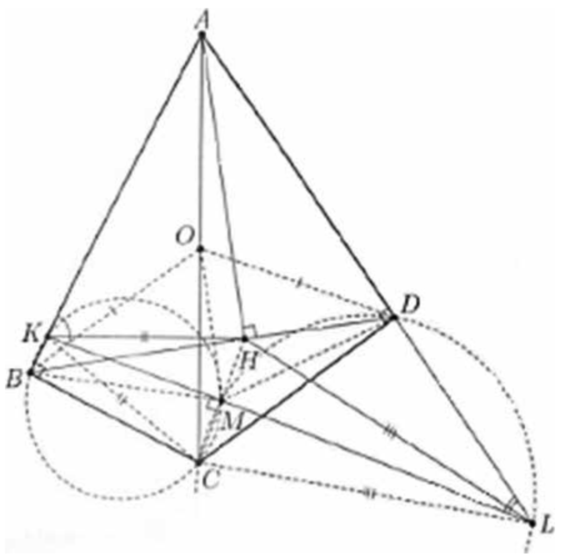
ამოცანა 3. ამოზნექილ $ABCD$ ოთხკუთხედში $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. H წერტილი არის A წერტილიდან BD-ზე დაშვებული მართობის ფუძე. S და T წერტილები შესაბამისად AB და AD გვერდების ისეთი წერტილებია, რომ H არის SCT სამკუთხედის შიგნით, ამასთან $\angle CHS - \angle CSB = 90°$, $\angle THC - \angle DTC = 90°$. დაამტკიცეთ, რომ BD წრფე არის TSH სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის მხები.

ამოხსნა. ვთქვათ C წერტილზე გამავალი SC წრფის მართობული წრფე AB წრფეს კვეთს Q წერტილში. მაშინ $\angle SQC = 90° - \angle BSC = 180° - \angle SHC$, რაც ნიშნავს რომ C, H, S და Q წერტილები ერთ წრეწირზე დევს. ვინაიდან SQ არის ამ წრეწირის დიამეტრი ამიტომ CHS-ზე შემოხაზული წრეწირის K ცენტრი დევს AB წრფეზე. ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ THC-ზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი L დევს AD წრფეზე. იმისათვის, რომ

დავამტკიცოთ SHT-ზე შემოხაზული წრეწირი არის BD-ს მხები ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ HS-ს და HT-ს შუამართობები გადაიკვეთება AH წრფეზე. ეს ორი შუამართობი არის შესაბამისად AKH და ALH კუთხეების ბისექტრისები. ამრიგად ამოცანის ამოსახსნელად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\frac{AK}{KH}=\frac{AL}{LH}$.



ვთქვათ KL და HC წრფეები თანაიკვეთებიან M წერტილში.



ვინაიდან $KH = KC$ და $LH = LC$, ამიტომ H და C წერტილები სიმეტრიული წერტილებია KL წრფის მიმართ. ამრიგად M არის HC-ს შუაწერტილი. აღვნიშნოთ O-თი $ABCD$ ოთხკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი. O არის AC-ს შუაწერტილი. ამრიგაგად გვაქვს $OM \parallel AH$ და ამიტომ $OM \perp BD$. ეს პირობა $OB = OD$ ტოლობასთან ერთად გვაძლევს, რომ OM არის BD-ს შუამართობი და ამიტომ $BM = DM$.

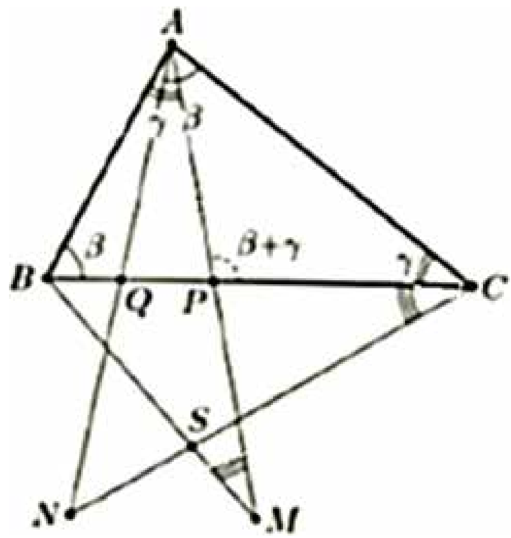
რადგანაც $CM \perp KL$, ამიტომ B, C, M და K წერტილები ციკლურია KC დიამეტრით. ანალოგიურად L, C, M და D წერტილები ციკლურია LC დიამეტრით. ამრიგად სინუსების თეორემის გამოყენებით ვღებულობთ

$$\frac{AK}{AL}=\frac{sin\angle ALK}{sin\angle AKL}=\frac{sin\angle ALK}{sin\angle BKM}=$$
$$\frac{DM}{CL}\cdot\frac{CK}{BM}=\frac{CK}{CL}=\frac{KH}{LH}$$

საიდანაც გამოდის, რომ $\frac{AK}{KH}=\frac{AL}{LH}$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამოცანა 4. P და Q წერტილები დევს ABC მახვილკუთხა სამკუთხედის BC გვერდზე ისე, რომ $\angle PAB = \angle BCA$ და $\angle CAQ = \angle ABC$. M და N წერტილები შესაბამისად AP და AQ წრფეების ისეთი წერტილებია, რომ P არის AM-ის შუაწერტილი, ხოლოQ არის AN-ის შუაწერტილი. დაამტკიცეთ, რომ BM და CN წრფეების გადაკვეთის წერტილი დევს ABC სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირზე.

ამოხსნა. ვთქვათ S არის BM და CN წრფეების გადაკვეთის წერტილი, ხოლო $\beta = \angle QAC = \angle CBA$ და $\gamma = \angle PAB = \angle ACB$.



ამ ტოლობებიდან ცხადია, რომ ABP და CAQ სამკუთხედები მსგავსია. ამრიგად გვაქვს

$$\frac{BP}{PM}=\frac{BP}{PA}=\frac{AQ}{QC}=\frac{NQ}{QC}.$$

ცხადია, რომ $\angle BPM = \beta + \gamma = \angle CQN$. აქედან გამომდინარეობს BPM და NQC სამკუთხედების მსგავსება, საიდანაც ვღებულობთ, რომ $\angle BMP = \angle NCQ$. ამრიგად BPM და BSC სამკუთხედებიც მსგავსია, საიდანაც ვღებულობთ $\angle CSB = \angle BPM = \beta + \gamma = 180° - \angle BAC$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამოცანა 5. ყოველი მთელი დადებითი n-თვისი, კეიპტაუნის ბანკი უშვებს მონეტებს, თითოეული მონეტის ღერებულებაა $1/n$. მოცემულია სასრული რაოდენობა ასეთი მონეტებისა (არა აუცილებლად განსხვავებული ღირებულებების), რომელთა ჯამური ღირებულება არ აღემატება 99 + 1/2. დაამტკიცეთ, რომ შესაძლებელია დავყოთ ეს სასრული რაოდენობა მონეტებისა 100 ჯგუფად ან უფრო ნაკლებ ჯგუფად ისე, რომ ყოველ ჯგუფში მონეტების ჯამური ღირებულება იყოს არაუმეტეს 1-ისა.

ამოხსნა. დავამტკიცოთ უფრო ზოგადი დებულება. ვთქვათ N მთელი დადებითი რიცხვაია. ვაჩვენოთ, რომ სასრული რაოდენობა კეიპტაუნის ბანკის მონეტებისა რომელთა ჯამური ღირებულებაა $N - 1/2$, შეგვიძლია დავყოთ N ჯგუფად ან უფრო ნაკლებ ჯგუფად ისე, რომ ყოველ ჯგუფში მონეტების ჯამური ღირებულება იქნება არაუმეტეს 1-ისა. თუ N-ის როლში ავიღებთ 100 მივიღებთ დასამტკიცებელს.

შევნიშნოთ, რომ თუ რაიმე მთელი დადებითი k-თვის, რამოდენიმე მონეტის საერთო ღირებულებაა $1/k$, მაშინ შეგვიძლია ეს მონეტები გავაერთიანოთ ერთ მონეტაში, ანუ თუ ასეთნაირი გაერთიანების შემდეგ მიღებული მონეტების დაყოფა შეიძლება სასურველ ჯგუფებად, ცხადია თავდაპირველი მონეტების სიმრავლესაც დავყოფთ სასურველ ჯგუფებად, ანუ ისეთ ჯგუფებად, რომლიბშიც მონეტების ჯამური ღირებულება არ იქნება 1-ზე მეტი. ასევე ცხადია, რომ ყოველი ასეთი გაერთიანების შემდეგ მონეტების საერთო რაოდენობა კლებულობს, ამრიგად მივალთ იმ მომენტამდე, როდესაც მონეტების გაერთიანება შეუძლებელია. ეს ნიშნავს, რომ ყოველი ლუწი k -თვის გვაქვს მხოლოდ ერთი მონეტა ღირებულებით $1/k$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში ორი ასეთი მონეტის გაერთიანება შესაძლებელი იქნებოდა), და ყოველი კენტი k -თვის არის არაუმეტეს $k-1$ ცალი მონეტა ღირებულებით $1/k$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში შესაძლებელი იქნებოდა k ცალი მონეტის გაერთიანება). ვთქვათ იმ მომენტისათვის, როდესაც მონეტების გაერთიანება უკვე შეუძლიბელია, გვაქვს d ცალი მონეტა ღირებულებით 1. შევქმნათ d ცალი ჯგუფი სადაც თითოეულ ჯგუფში იქნება თითო ცალი მონეტა ღირებულებით 1. ამრიგად, დარჩენილ მონეტებში აღარ გვექნება მონეტა ღირებულებით 1 და დარჩენილი მონეტების ჯამური ღირებულება იქნება $N - d$. ახლა ყოველი $k = 1, 2, ..., N - d$-თვის შევქმნათ ჯგუფი G_K, რომელშიც შევიყვანთ მხოლოდ იმ მონეტებს, რომელთა ღირებულებაა $1/(2k - 1)$ და $1/(2k)$. ცხადია ასეთი ჯგუფის ჯამური ღირებულება იქნება მაქსიმუმ $\frac{2k-2}{2k-1}+\frac{1}{2k}<1$ (რადგანაც გვაქვს მაქსიმუმ $2k - 2$ ცალი მონეტა ღირებულებით $1/(2k - 1)$ და მაქსიმუმ ერთი მონეტა ღირებულებით $1/(2k)$). ახლა დარჩენილი მონეტები, ანუ ის მონეტები, რომელთა ღირებულებები ნაკლებია $\frac{1}{2(N-d)}$-ზე გავანაწილოთ $G_1, ..., G_{N-d}$ ჯგუფებში ბიჯ და ბიჯ. ყოველ ბიჯზე ავიღოთ ნებისმიერი ასეთი მონეტა და გავაერთიანოთ ის იმ ჯგუფში, რომელშიც მონეტების ჯამური ღირებულება არ აღემატება $1-\frac{1}{2(N-d)}$. ასეთი ჯგუფი ყოველ ბიჯზე იარსებებს, ვინაიდან სულ გვაქვს $N - d$ ცალი ჯგუფი, და მონეტები რომელთა ჯამური ღირებულება არ აღემატება $N-d-\frac{1}{2}$, ე. ი. არსებობს ჯგუფი რომელშიც მონეტების ჯამური ღირებულება არ აღემატება $\frac{1}{N-d}\left(N-d-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2(N-d)}$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამოცანა 6. ვიტყვით, რომ სიბრტყეზე მოცემული წრფეთა სიმრავლე იმყოფება ზოგად მდგომარეობაში, თუ არც ერთი ორი წრფე ერთმანეთის პარალელური არაა და არც ერთი სამი წრფე ერთ წერტილზე არ გადის. ზოგად მდგომარეობაში მყოფი წრფეთა სიმრავლე სიბრტყეს ჰყოფს არეებად; ვუწოდოთ შემოსაზრვული არე ისეთ არეს, რომელსაც სასრული ფართობი აქვს. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი საკმაოდ დიდი n-თვის მართებულია შემდეგი წინადადება: ზოგად მდგომარეობაში მყოფ ნებისმიერ n ცალ წრფეთა სიმრავლეში შეგვიძლია შევღებოთ არანაკლებ $\sqrt{n}$ ცალი წრფე ლურჯ ფერად ისე, რომ ყოველი შემოსაზღვრული არის საზღვარი მთლიანად არ იქნება ლურჯი ფერის.

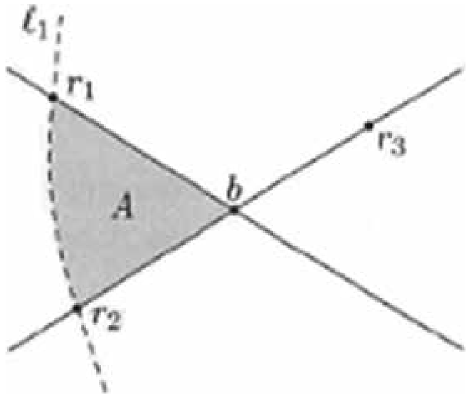
შენიშვნა: შედეგი რომელილშიც $\sqrt{n}$ შეფასების ნაცვლად მიღებულია $c\sqrt{n}$, შეფასდება

ქულებით, რომელიც დამოკიდებული იქნება c კონსტანტაზე.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ L-ით ამოცანის პირობაში მოცემული ზოგად მდგომარეობაში მყოფ წრფეთა სიმრავლე, ხოლოო F-ით შემოსაზღვრულ არეთა სიმრავლე. ვთქვათ B არის წრფეთა ის მაქსიმალური (ჩართვის მიმართ) ქვესიმრავლე $B \subseteq L$,

რომელთა ლურჯი ფერის შეღებვის შემდეგ არც ერთ არეს F-დან არ ექნება საზღვარი მთლიანად ლურჯი ფერის. $L\backslash B$ სიმრავლის ყველა წრფე შევღებოთ წითელ ფერად. წერტილს ვუწოდოთ წითელი თუ ის არის წითელი და ლურჯი ფერის წრფეების გადაკვეთის წერტილი, ხოლო ვუწოდოთ ლურჯი თუ ის არის ორი ლურჯი ფერის წრფის გადაკვეთის წერტილი. განვიხილოთ რაიმე l წითელი წრფე, და ის არე $A \in F$, რომლის ერთადერთი წითელი ფერის საზღვარი დევს l წრფეზე (B-ს მაქსიმალურობის გამო ცხადია, რომ ყოველი წითელი ფერის წრფისათვის არსებობს ასეთი არე F-დან). ვთქვათ r', r, b_1, ..., b_k არის A-ს წვეროები, გადანომრილი საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, ამასთან r', $r \in l$. ცხადია r' და r არიან წითელი, ხოლო b_1, ..., b_k არინ ლურჯი ფერის წერტილები. შევუსაბამოთ l წრფეს წერტილთა წყვილი r და b_1. შევნიშნოთ, რომ ყოველი ასეთი წითელი და ლურჯი ფერის წერტილთა წყვილი, მაქსიმუმ ერთ წრფეს უნდა შეესაბამებოდეს, რადგანაც არსებობს მაქსიმუმ ერთი არე F-დან რომლისთვისაც მოცემული წყვილი განლაგებული იქნება ერთი მეორის შემდეგ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით .

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ყოველი ლურჯი წერტილი მაქსიმუმ ორ წითელ წრფეს შეიძლება შეესაბამებოდეს. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ არსებობს ლურჯი წერტილი b რომელიც l_1, l_2 და l_3 წითელი წრფეების შესაბამისია. ვთქვათ r_1, r_2 და r_3 შესაბამისად ამ წრფეთა შესაბამისი წითელი წერტილებია. ცხადია ეს წერტილები წყვილ-წყვილად განსხვავებულია. ასევე ცხადია, რომ r_1, r_2 და r_3 წეტილები დევს b წერტილიდნ გამომავალ ოთხ ლურჯ სხივზე და ეს წერილები b-დან უახლოესი წერტილებია შესაბამისი სხივების გასწვრივ. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ r_2, b და r_3 დევს ერთ ლურჯ წრფეზე, ხოლო r_1-მეორეზე.



ახლა განვიხილოთ არე$A \in F$, რომლის ერთ-ერთი საზღვარია l_1 წრფე შესაბამისი r_1 და b წერტილებით. მაშინ r_1, b და ან r_2, ან r_3 (ვთქვათ r_2) წარმოადგენს A-ს მომდევნო სამ წვეროს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. ვინაიდან A-ს მხოლოდ ერთი წითელი ფერის საზღვარი აქვს, ამიტომ A აუცილებლად უნდა იყოს r_1br_2 სამკუთხედი. მივიღეთ, რომ r_2 წერტილზე გადის l_1 და l_2 წითელი წრფეები და ასევე r_2r_3 ლურჯი წრფე, ეს კი ამოცანის პირობის გამო შეუძლებელია. ამრიგად ვაჩვენეთ, რომ ყოველ ლურჯ წერტილი მაქსიმუმ ორ წითელ წრფეს შეიძლება შეესაბამებოდეს. ამის შემდეგ სასურველი შეფასება მარტივად მიიღება. მართლაც ვთქვათ $k = |B|$, მაშინ ლურჯი წერტილების რაოდენობაა C_k^2, ხოლო წითელი წრფეების რაოდენობაა $n - k$, ე.ი. გვაქვს

$$n - k \le 2C_k^2 = k(k-1) \Leftrightarrow n \le k^2.$$

დამტკიცება დასრულებულია.

ავტორების ელექტრონული მისამართები:
giorgi.chelidze@tsu.ge
givi.nadibaidze@tsu.ge

„გმადლობთ პროფესორო“ - 2015

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტე უკვე ტრადიციად იქცა კურსდამთავრებულთა გამოსაშვები საღამოს „გმადლობთ, პროფესოროს“ ჩატარება. თბილისის სტიქიური მოვლენების გამო საღამო მოგვიანებით, 24 ივლისს ჩატარდა. შეხვედრას თან სდევდა პროფესორ-მასწავლებლების რამინ გობეჯიშვილის, დავით გორდეზიანის, ერნა ლეკვეიშვილის, ანატოლი ახალკაცის, ტატიანა კისილიოვას, ომარ ღლონტის, ეთერ ალშიბაიას, მათემატიკისა და კომპიუტერული მეცნიერებების დეპარტამენტების სტუდენტების ნიკა გელაშვილისა და ვახტანგ შერაზადიშვილის გარდაცვლებით გამოწვეული უდიდესი სევდა.

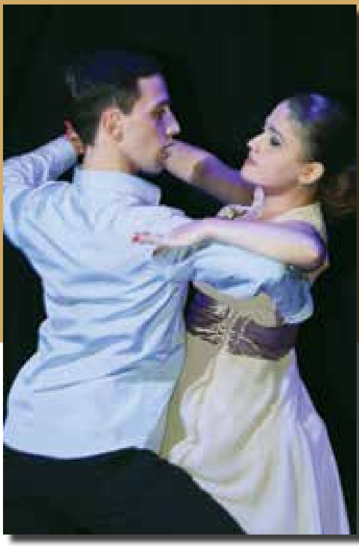
მათ ხსოვნას მიეძღვნა მათემატიკის დეპარტამენტის სტუდენტის ბაკურ კოჭლამაზაშვილის მიერ შესრულებული მუსიკალური ნომერი.

შეხვედრას უძღვებოდა მათემატიკის მიმართულების წარჩინებული სტუდენტი გვანცა შევარდენიძე.

თითოეული დეპარტამენტი გამორჩეულად წარადგინეს სტუდენტებმა: კომპიუტერული მეცნიერებების - გიგა ჩალაურმა, ბიოლოგიის - ანი ბილანიშვილმა, ელექტრული და ელექტრონული ინჟინერიის - გურამ ჩაგანავამ, ფიზიკის - გრიგოლ თანიაშვილმა, ქიმიის - ტელეგადაცემა „გააცინე და მოიგეს“ გამარჯვებულმა ტყუპებმა გიორგი და ნიკოლოზ გოგილიძეებმა, გეოგრაფიის - ნინო კვიტაშვილმა საკუთარი ჩანახატით, გეოლოგიის - პირველკურსელმა ანზორ გიორგაძემ, მათემატიკის - ბელა უერთაშვილმა.

კურდამთავრებულთა შორის იყო რექტორის პირველი სტიპენდიანტი, ეკოლოგიის საბაკალავრო პროგრამის სტუდენტი მარიამ გულბიანი. ეკოლოგმა თამთა კაპანაძემ წარმოადგინა პრეზენტაცია საკუთარი პროექტისა „გადავწეროთ „ვეფხისტყაოსანი“ ზუსტად“, რომელიც დიდი ენთუზიაზმით აიტაცეს სტუდენტებმა და რომლის დამთავრებაც წლის ბოლოს იგეგმება.

დიდი მოწონება დაიმსახურეს მუსიკალურმა ნომრებმა, რომლებსაც ასრულებდნენ ლუკა ტარიელაშვილი, ვახტანგ ლალუაშვილი, მანანა გეგეჭკორის 2014 წლის სტიპენდიანტი ნინო ოგანეზოვი, თამარ თვალაძე, ქეთი მეიფარიანი, ბაქარ ბარათაშვილი, გიორგი ედიბერიძე, ირაკლი ცინცაძე, თამთა მუმლაძე, დავით აბრამიშვილი, თორნიკე ჯაფიაშვილი. უნდა აღინიშნოს, რომ მათემატიკის დეპარტამენტის სტუდენტი თორნიკე ჯაფიაშვილი წელს კონსერვატორიის სტუდენტიც გახდა.



დაუვიწყარი იყო კომპიუტერული მეცნიერებების დეპარტამენტის ულამაზესი მოცეკვავე წყვილები მარიამ ქოჩლაძე და დავით ცხონდია (ვალსი), ნინო არჩვაძე და თორნიკე კაჭიური („ქართული“).

მათემატიკის დეპარტამენტის სტუდენტების სამეცნიერო მიღწევები არავის უკვირს, მაგრამ დამსწრეთათვის ნამდვილი სიურპრიზი იყო ივანე ჯავახიშვილის სახელობის ფორუმის წლევანდელი გამარჯვებულის ლაშა ბარამიძისა და წარჩინებული სტუდენტის ნინო ბეროშვილის მუსიკალური ნომერი.

სტუდენტებს თხოვნა შეუსრულეს და მაყურებელთა წინაშე მუსიკალურ-მხატვრული ნომრებით წარდგნენ პროფესორები რამაზ გახოკიძე და თეიმურაზ ნადარეიშვილი.

კურსდამთავრებულებს უნივერსიტეტის დამთავრება მიულოცეს და ახალი მიღწევები უსურვეს დეპარტამენტის ხელმძღვანელებმა და პროფესორებმა დიანა ძიძიგურმა, გიორგი ღვედაშვილმა, გურამ ქუთელიამ, ომარ ფურთუხიამ, კობა გელაშვილმა, გია სირბილაძემ, გიორგი ბურჯანაძემ.

საღამო შეაჯამა და სტუდენტებს ახალი პერსპექტივები დაუსახა ფაკულტეტის დეკანმა პროფესორმა რამაზ ბოჭორიშვილმა.

შეხვედრა ტრადიციულად ძალიან თბილად წარიმართა. მადლობა სტუდენტებს - ფაკულტეტის პროფესორ-მასწავლებელთა, თანამშრომელთა, სტუდენტთა და კურსდამთავრებულთა თავშეყრისა და ურთიერთპატივისცემის გამომხატველი ამ ღირსშესანიშნავი დღისთვის, ასევე ამ შესანიშნავი ღონისძიების სულისჩამდგმელსა და ორგანიზატორს, ფაკულტეტის დეკანის თანაშემწეს ქალბატონ ნინო ტყეშელაშვილს.


შეჯიბრების, გაცნობის, მეგობრობის, პატივისცემის სამი დაუვიწყარი დღე

18-20 აპრილს თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტმა უმასპინძლა მე-9-ე საერთაშორისო ოლიმპიადას დაპროგრამებაში ილია ვეკუას თასზე. ილია ვეკუას თასი საკმაოდ მაღალრეიტინგიანი ოლიმპიადაა – ტრადიციულად სწორედ თასის მფლობელები ხდებიან მსოფლიო ჩემპიონატის პრიზიორები. წელს ჩემპიონატს ყველაზე ბევრი - 142 გუნდური და 186 ინდივიდუალური მონაწილე ჰყავდა. შეჯიბრებაში მონაწილეობდნენ ახალგაზრდა პროგრამისტები საქართველოდან, რუსეთიდან, უკრაინიდან და აზერბაიჯანიდან. ტურები, თბილისის გარდა, პარალელურად ტარდებოდა მოსკოვში, სანკტ-პეტერბურგში, ნოვოსიბირსკში, ვინიცასა და ხარკოვში. ვეკუას თასის გუნდური და ინდივიდუალური შეჯიბრების ამოცანების ბაზაზე ამავე პერიოდში ჩატარდა საკმაოდ წარმომადგენლობითი „მოსკოვის ფესტივალი სპორტულ პროგრამირებაში“, რომელიც ასევე მიეძღვნა ილია ვეკუას ხსოვნას.

ოლიმპიადა ვეკუას თასზე ტარდება 2007 წლიდან და საკმაოდ პრესტიჟულია პროგრამისტებს შორის. იგი შედის საერთაშორისო ოლიმპიადების რეესტრში, ხოლო ოლიმპიადაზე მიღწეული შედეგები იწერება მონაწილეთა საერთო რეიტინგში.

ოლიმპიადა გაიხსნა 18 აპრილს. გახსნის ცერემონიალს ესწრებოდნენ უნივერსიტეტის რექტორი ვლადიმერ პაპავა, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის დეკანი რამაზ ბოჭორიშვილი, ჟიურის თავმჯდომარე

შეჯიბრების მონაწილეთა ერთი ჯგუფი

ტიტულოვანი გუნდი მოსკოვიდან

ჩვენი ფაკულტეტის სტუდენტთა გუნდი

ჰამლეტ მელაძე, შეჯიბრების დირექტორი თეოდორე ზარქუა და სტუმრები.

უნივერსიტეტის X, XI კორპუსების პერსონალისა და კომპიუტერული ლაბორატორიის თანამშრომელთა ძალისხმევით, ასევე საინფორმაციო სამსახურის თანამშრომელთა მხარდაჭერით, ორგანიზატორებმა ეს მასშტაბური შეჯიბრება მაღალ დონეზე და შეუფერხებლად ჩაატარეს.

თსუ გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის ილია ვეკუას სახელობის სააქტო დარბაზში უწყვეტად მიმდინარეობდა ოლიმპიადის მსვლელობისთვის თვალყურის დევნება ონლაინ რეჟიმში.

ტრადიციულად, მონაწილეთათვის საკმაოდ რთული და საინტერესო ამოცანები იყო შერჩეული. ი.ვეკუას თასზე პრიზები ასე განაწილდა: გუნდურ შეჯიბრებაში გაიმარჯვა მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გუნდმა «Moscow SU Tapirs», ხოლო ინდივიდუალურ შეჯიბრებაში პირველი ადგილი დაიკავა მ.ტიხომიროვმა მოსკოვის ფიზიკა-ტექნიკის ინსტიტუტიდან.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მიერ საუკეთესო ქართული გუნდისთვის დაწესებული პრიზი, რომელიც წელს დავით გორდეზიანის სა-

მომავალი სტუდენტები

ინტერესი იმდენად დიდი იყო, რომ ორგანიზატორ სტუდენტთა ნაწილმა მონაწილეთა რიგებში გადაინაცვლა

შეჯიბრების საინტერესო მომენტები

აზერბაიჯანის დელეგაციის წევრები

პრიზების გადაცემა და საზეიმო დახურვა უნივერსიტეტის სააქტო დარბაზში გაიმართა

პირველი მილოცვა გამარჯვებულებს – მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გუნდს ევსტროპოვის, პიადიორკინის და ომელიანენკოს შემადგენლობით, რომელთაც აგრეთვე დაიმსახურეს საუკეთესო სტუმარი გუნდისთვის დაწესებული ნ.მუსხელიშვილის პრიზი

ინდივიდუალურ შეჯიბრში გამარჯვებული მ.ტიხომიროვი (რუსეთი, მოსკოვის ფიზიკა-ტექნიკური ინსტიტუტი) გუნდის წევრებთან ერთად

ოლიმპიადის მონაწილეთათვის მოეწყო ექსკურსიები და კულტურული ღონისძიებები. მონაწილეებმა მოინახულეს და გვირგვინით შეამკეს ილია ვეკუას საფლავი მთაწმინდის პანთეონში

ხელს ატარებდა, მოიგო თავისუფალი უნივერსიტეტის გუნდმა (გულიაშვილის, მანძულაშვილის და სვანიძის შემადგენლობით). ამავე გუნდმა დაიმსახურა ე.ვ.პანკრატიევის სახელობის სამხრეთ კავკასიის საუკეთესო გუნდის პრიზი.

ჟიული შარტავას სახელობის საუკეთესო ქართველი მონაწილის პრიზი გადაეცა გიორგი საღინაძეს (თავისუფალი უნივერსიტეტი), ვლადისლავ მაკეევი (რუსეთი, СУНЦ МГУ), როგორც საუკეთესო მოსწავლე, აკად. ივერი ფრანგიშვილის სახელობის პრიზის მფლობელი გახდა.

სტუმართა ერთი ჯგუფი ჟიურის წევრებთან ერთად

ოლიმპიადის დახურვის ცერემონიალში მონაწილეობდა აკად.ი.ვეკუას შვილიშვილი, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორი ილია თავხელიძე. მან მადლიერება გამოხატა, რომ მეცხრე ოლიმპიადა სწორედ ბატონი ილიას მშობლიური უნივერსიტეტის კედლებში გაიმართა. ამასთან იმედი გამოთქვა, რომ მეათე, საიუბილეო ოლიმპიადაც ასევე თსუ-ში, უფრო მასშტაბურად ჩატარდება. საამაყოა ის ფაქტიც, რომ პარალელურად შეჯიბრების მოედნები მოწყობილი იყო რუსეთის იმ ქალაქებშიც, რომლებიც აკად. ილია ვეკუას მოღვაწეობასთან მჭიდროდაა დაკავშირებული.

მადლობა გვინდა გადავუხადოთ ჩვენს სტუდენტებს, რომლებიც რუსეთისა და აზერბაიჯანის დელეგაციებს მასპინძლობდნენ. ესენი არიან სერგეი ბაგდასაროვი, რეზო გაბუნია, ბექა გოდერძიშვილი, ასლან გურბანოვი, გიორგი დოლმაზაშვილი, გიორგი თუთბერიძე, ნიკოლოზ ილინი, თამარ კვატაშიძე, თურალ კურბანოვი, ალექსანდრე ლომია, გიუნეი მურადოვა, ირაკლი პაპავა, ვახტანგ სიდამონიძე, დავით სიჩევი, რომა სუმბაძე და საბა ხიზანიშვილი.

ოლიმპიადის შესახებ იხ. ბმული:
http://vekua.snarknews.info/index.cgi?data=newstape&year=2015&class=vekua2015

მასალები მოამზადეს
თინათინ დავითაშვილმა
და ნინო ტყეშელაშვილმა

დაპროგრამებაში უმაღლეს სასწავლებელთა შორის მსოფლიო ჩემპიონატის მეოთხედფინალი საქართველოს რეგიონისთვის

კვირას, 8 ნოემბერს, ბათუმსა და თბილისში პარალელურად ჩატარდა უმაღლეს დაპროგრამებაში მსოფლიო ჩემპიონატის მეოთხედფინალი სასწავლებელთა შორის საქართველოს გუნდებისთვის.

ბათუმში შეჯიბრში ჩაერთო ბათუმის რუსთაველის სახელობის სახელმწიფო უნივესიტეტის 3 გუნდი, ხოლო თბილისში იასპარეზა კიდევ 8 უმაღლესი სასწავლებლის 37-მა გუნდმა, რომელთაც უმასპინძლა თავისუფალმა უნივერსიტეტმა. თავისუფალ უნივერსიტეტში წარმოდგენილი იყო მასპინძელი უნივერსიტეტის 14 გუნდი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის 8, შავი ზღვის საერთაშორისო უნივერსიტეტისა და კავკასიის უნივერსიტეტის 4-4, საქართველოს უნივერსიტეტის, სტუ-ს და საქართველოს საპატრიარქოს წმიდა ანდრია პირველწოდებულის ქართული უნივერსიტეტის 2-2 და ქუთაისის აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის 1 გუნდი.

გარდა ამისა, ასპარეზობაში კონკურსგარეშე მონაწილეობა მიიღო მოასწავლეებისგან დაკომპლექტებულმა 4-მა გუნდმა.

საბოლოოდ, საქართველოდან მსოფლიო ჩემპიონატის ნახევარფინალში მონაწილეობის მისაღებად შეირჩა 20 გუნდი. აქედან 5 წარმოადგენს თავისუფალ უნივერსიტეტს, ასევე 5 - თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტს, საიდანაც 1 გუნდი ძირითადად ტრადიციულად ცალკე დარეგისტრირებული ფარნგულ-ქართული კომპიუტერული მეცნიერების სტუდენტებითაა დაკომპლექტებული, 3 გუნდით იქნება ნახევარფინალში წარმოდგენილი შავი ზღვის საერთაშორისო უნივერსიტეტი, 2 გუნდით - საქართველოს საპატრიარქოს წმიდა ანდრია პირველწოდებულის სახელობის ქართული უნივერსიტეტი, თითო გუნდით სტუ, ქუთაისის აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, შოთა რუსთაველის სახელობის ბათუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, კავკასიის უნივერსიტეტი და საქართველოს უნივერსიტეტი.

თსუ-დან ყველაზე მაღალი შედეგი აჩვენა გუნდმა Tbilisi SU 5 შემადგენლობით - ცოტნე ჩახვაძე, ბექა მოდრეკილაძე და ბიჭიკო ჭელიძე. მათ 6 ამოცანა ჩააბარეს.

აუცილებელია აღინიშნოს მოსწავლეთა გუნდების წარმატებული გამოსვლა. შეჯიბრებაზე პირველი ადგილი დაიკავა გუნდმა Sch_Tbilisi Demireli_Komarovi_Mziuri: სხირტლაძე გიორგი, ჩხაიძე ნუგზარი და კლდიაშვილი გიორგი, რომელიც დაკომპლექტებულია ინფორმატიკაში საქართველოს მოსწავლეთა ნაკრების წევრებით. ამ გუნდმა 10 ამოცანა ჩააბარა. მაღალი შედეგები აჩვენეს აგრეთვე მოსწავლეთა სხვა გუნდებმაც.

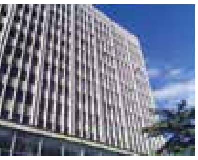
მასალა მოამზადა თინათინ დავითაშვილმა

ვასიკო მწითური, თენგიზ ბრეგვაძე, მანველ კლოიანი

ცოტნე ჩახვაძემ ბექა მოდრეკილაძე, ბიჭიკო ჭელიძე

ნინო ბუქური, გუჯა ბაბუნაშვილი, გიორგი გაჩეჩილაძე

მათემატიკა



ვარლამ მელაძე
(1912 – 1997)

როდესაც საუბარია ვ.კომაროვის სახელობის ფიზიკა-მათემატიკურ სკოლა-ინტერნატზე, უპირველეს ყოვლისა, იგონებენ მის დამაარსებელსა და პირველ დირექტორს ვარლამ მელაძეს.

ვარლამ ნიკოლოზის ძე მელაძე დაიბადა 1912 წლის 12 სექტემბერს ხონის რაიონის სოფ. მათხოჯში. მისი მშობლები იყვნენ ნიკოლოზ მელაძე და ეფროსინე კოსტავა.

ვარლამ მელაძე ბავშვობაში ოცნებობდა გამხდარიყო რკინიგზელი (იმ პერიოდში რკინიგზაზე სამსახური ძალიან პრესტიჟული იყო) და სურვილი ჰქონდა სწავლა გაეგრძელებინა პოლიტექნიკურ ინსტიტუტში. მაგრამ თბილისში, ცნობილი ქართველი პედაგოგისა და საზოგადო მოღვაწის ვარლამ ძიძიგურის ოჯახში სტუმრობისას იგი შეხვდა მაშინ ახალგაზრდა მათემატიკოს ილია ვეკუას. ამ შეხვედრამ მნიშვნელოვანი როლი ითამაშა ვ.მელაძის ცხოვრებაში - მან გადაწყვიტა სწავლა გაეგრძელებინა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე, რომელიც დაამთავრა პირველი ხარისხის დიპლომით 1937 წელს.

უნივერსიტეტში სწავლის პერიოდში ვ.მელაძე იწყებს პედაგოგიურ საქმიანობას. იგი ინიშნება თბილისის 37-ე საშუალო სკოლაში მათემატიკის მასწავლებლად. უნივერსიტეტის დამთავრების შემდეგ იგი პედაგოგიურ საქმიანობას აგრძელებს თბილისის მე-15-ე საშუალო სკოლაში.

1941 წელს იგი გაიწვიეს ფრონტზე, სადაც დაიჭრა და 1943 წელს დაბრუნდა თბილისში. ვარლამ მელაძე დაუბრუნდა თავის პროფესიას. იგი დაინიშნა ჯერ ქ.თბილისის მე-11-ე, ხოლო შემდეგ 32-ე ვაჟთა (ამჟამად 62-ე სკოლა) საშუალო სკოლის დირექტორად. შემდეგ იგი მუშაობდა რაიონის განათლების განყოფილების გამგედ და ახლადგახსნილი მესამე სკოლა-ინტერნატის დირექტორად.

მეცნიერებისა და ტექნიკისა არნახულმა განვითარებამ ქვეყნის წინაშე მკვეთრად დააყენა ფიზიკის, ქიმიის და სხვა საბუნებისმეტყველო საგნების სწავლების შემდგომი გაუმჯობესებისა და სრულყოფის ამოცანა. ამ მიზნით ქ.თბილისში შეიქმნა ფიზიკა-მათემატიკური სკოლა-ინტერნატი, რომელსაც შემდგომში მიენიჭა ვ.კომაროვის სახელი. ამ სკოლის შექმნა დაევალა ვარლამ მელაძეს, რომელიც დაინიშნა დირექტორად. მან თავის გარშემო შემოიკრიბა ჩვენი ქვეყნის გამოჩენილი პედაგოგები (არა მარტო ფიზიკასა და მათემატიკაში), შემუშავებულ იქნა სწავლების ახალი ტექნოლოგიები და ახალი სასწავლო გეგმები.

სკოლამ მიაღწია უდიდეს წარმატებებს. მის კედლებში გაიზარდნენ გამოჩენილი მეცნიერები, რომლებითაც ნებისმიერი ქვეყანა იამაყებდა. სკოლის საქმიანობაში აქტიურად მონაწილეობდნენ ცნობილი მეცნიერები ნ.მუსხელიშვილი, ი.ვეკუა, მ.მირიანაშვილი, ა.ხარაძე და სხვები.

გარდა პედაგოგიური საქმიანობისა, ვ.მელაძის მიერ კოლეგებთან ერთად სპეციალურად სკოლა-ინტერნატისათვის შექმნილია რამოდენიმე სახელმძღვანელო „საოლიმპიადო ამოცანების კრებული მათემატიკაში“, „საკონკურსოამოცანების კრებული მათემატიკაში“, „ლოგიკურ ამოცანათა კრებული“ და სხვა.

კომაროვის სკოლა-ინტერნატი დღესაც წარმატებით განაგრძობს საქმიანობას. იგი ერთგულია იმ გზისა, რომელსაც საფუძველი ვ.მელაძემ და მისმა კოლეგებმა ჩაუყარეს.

სერგო ვაშაყმაძე
(1901-1995)

ცნობილი მათემატიკოსი, საშუალო და უმაღლესი სკოლების მასწავლებელი, ყოფილ საბჭოთა კავშირში მოსწავლეთა შორის მათემატიკაში პირველი ოლიმპიადის ერთ-ერთი ორგანიზატორი, საქართველოს დამსახურებული პედაგოგი სერგო ვაშაყმაძე დაიბადა 1901 წლის 26 მარტს ვანის რაიონის სოფელ სალხინოში(ჭვარისწერში).

დაწყებითი განთლება ბ-ნა სერგომ მიიღო სოფელ სალხონოში 1910 წლიდან.

დაწყებითი სკოლის დამთავრების შემდეგ ბ-ნი სერგო 1916-18წწ. სწავლობდა ვანის გიმნაზიაში.

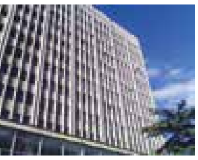
1919-21წწ. ბ-ნი სერგო სწავლობდა თბილისის ვაჟთა მე-6 (ყოფილ სათადაზნაურო) გიმნაზიაში, ხოლო 1921-22 წწ მუშაობდა ვანის გიმნაზიაში მათემატიკის მასწავლებლად.

1922-24 წწ. დიდი ქართველი ფსიქოლოგის დიმიტრი უზნაძის წინადადებით, ბ-ნი სერგო სწავლობდა მ.ორახელაშვილის სახელობის ცენტრალურ პედაგოგიურ ინსტიტუტში, სადაც მასწავლებლები იყვნენ თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის რიგი ცნობილი პროფესორებიც (შეთავსებით). ბ-ნა სერგომ ინსტიტუტი დაამთავრა მათემატიკის მასწავლებლის კვალიფიკაციით და ამ მიმართულებით მისი მომზადების მაღალი დონე მნიშვნელოვნად განაპირობა ცნობილ პედაგოგთან ბ-ნ ათანასე ხარაბაძესთან სისტემატურმა ურთიერთობამ.

1924 წელს პედაგოგიური ინსტიტუტეს დამთავრების შემდე, განათლების კომისარიატმა ბ-ნი სერგო მიავლინა აფხაზეთში, სოხუმის ახლად გახსნილ ქართულ საშუალო სკოლაში. შენობა აგებულ იყო სოხუმის წერა-კითხვის გამავრცელებელი საზაგადოების მიერ იაკობ გოგებაშვილისა და ლუარსაბ ბოცვაძის ინიციატივით 1910 წ., სადაც გაიხსნა სოხუმის პირველი ქართული 4-წლიანი დაწყებითი სკოლა. შემდეგ იგი გადაკეთდა 7-წლიან, ხოლო 1924 წელს - 9-წლიან საშუალო სკოლად.

ბ-ნი სერგოს მოღვაწეობის მომდევნო პერიოდი უკავშირდება თბილისს, სადაც იგი გადმოვიდა საცხოვრებლად, ჩაირიცხა უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე. პარალელურად მან დაიწყო მუშაობა მათემატიკის მასწავლებლად მე-9 შრომის სკოლაში. უნივერსიტეტში სწავლისას თავი გამოიჩინა, როგოც ნიჭიერმა, მუყაითმა და ბეჯითმა სტუდენტმა. მან უყოყმანოდ მიიღო ასპირანტურაში სწავლის უფლება. ამ პერიოდში გამორჩეულია მისი ურთიერთობა ერთ-ერთ უდიდეს ქართველ მეცნიერთან გიორგი ნიკოლაძესთან.

ცალკე აღნიშვნის ღირსია ბ-ნი სერგოს თავდაუზოგავი და წარმატებული მუშაობა მათემატიკის სწავლების მიმართულებით, 1933 წ. 3 ნოემბერს ბ-მა სერგომ რამდენიმე პროფესიონალ-ენთუზიასტთან ერთად თბილისში ჩაატერეს I საკავშირო ოლიმპიადა მათემატიკაში მოსწავლეთა შორის. აი რას წერს 1979 წელს სტატიაში “ოლიმპიადური მოძრაობის სათავეებთან” (რუსულ ენაზე) ჟურნალ “კვანტის” რედაქცია: „ჩვენ განცვიფრებითა და გაკვირვებით შევიტყვეთ, რომ თურმე საბჭოთა კავშირის სკოლების არსებობის ისტორიაში პირველი მათემატიკური ოლიმპიადების ერთ-ერთი ორგანიზატორი და ჩამტარებელი ყოფილა სერგო ვაშაყმაძე 1933 წ. თბილისის 26-ე საცდელ-საჩვენებელ სკოლაში. დღემდე გვეგონა, რომ თითქოს I მათემატიკური ოლიმპიადა ჩაატარა 1934წ.



ლენინგრადის ორმა სკოლამ და 1935 წელს მოსკოვის რამდენიმე სკოლამ, რაც სინამდვილეს არ შეეფერება˜. იგივე ფაქტი დადასტურებულია `ქართულ საბჭოთა ენციკლოპედიაში˜ (ტ. 7, გვ. 521, იხ. აგრეთვე საგაზეთო სტატიები, დაცული არქივებში).

ბ-ნი სერგოს მოღვაწეობის მნიშვნელოვან ეტაპად უთუოდ უნდა ჩაითვალოს მისი 1942-45 წწ. ვანის რაიონში გატარებული პერიოდი, როგორც განათლების განყოფილების ინსპექტორი და მათემატიკის მასწავლებელი. გარდა მაღალი დონის მასწავლებლობისა, ბ-ნი სერგოს ყოფნა ვანის რაიონში გამოირჩეოდა განსაკუთრებული თბილი და უმწიკვლო ურთიერთობით, გაჭირვებული და დაობლებული ოჯახებისათვის ხელის გამართვით ოფიციალური და კერძო წყაროებით.

ბ-ნი სერგოს მოღვაწეობის შემდგომი ხანგძლივი პერიოდი უკავშირდება კვლავ თბილისს, სადაც იგი გახლდათ განათლების განყოფილების ინსპექტორი, სასწავლო ნაწილის გამგე, მათემატიკის მასწავლებელი ვაჟთა მე-6, მე-7, ქალთა მე-7, 53-ე, 58-ე - დღისა და საღამოს სწავლების მე-5 საშუალო სკოლებში, მეთოდური კომისიებისა და მისაღებ გამოცდათა თავმჯდომარე და წევრი, საკავშირო ჟურნალის “მათემატიკა სკოლაში” აქტიური რესპონდენტი.

ბუნებრივია, რომ ბ-ნი სერგო გახლდათ პერსონალური პენსიონერი, დაჯილდოებული მრავალჯერ და მრავალგზის.

ISSN 2298-0938