მათემატიკა

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი

№7

2021

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

მათემატიკა

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი
მასწავლებლებისა და მოსწავლეებისთვის

დაარსდა 2013 წელს;
მიეძღვნა ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
95 წლის იუბილეს.

ჩვენი მიზანია მასწავლებლებსა და მოსწავლეებში მათემატიკური ცოდნის პოპულარიზაცია, მათემატიკის მასწავლებელთა პროფესიული ზრდის ხელშეწყობა, მოსწავლეთა ჩართვა მათემატიკის ლამაზ სამყაროში მოგზაურობისა და საინტერესო ამოცანების ამოხსნის პროცესში; მოგაწვდით ინფორმაციას ჩვენი წარმატებული კურსდამთავრებულების საქმიანობისა და მომავალი სტუდენტების პერსპექტივების შესახებ.

უნივერსიტეტის გამომცემლობა

ᲡᲐᲠᲩᲔᲕᲘ

სარჩევი

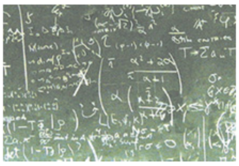
ჟურნალი „მათემატიკა“

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი „მათემატიკა“ დაარსდა 2013 წელს, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის 95 წლის იუბილესთან დაკავშირებით, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის საბჭოს გადაწყვეტილებით. ჟურნალის შექმნის იდეა ფაკულტეტის დეკანს — რამაზ ბოჭორიშვილს ეკუთვნის.

ჟურნალის მთავარი რედაქტორია თეიმურაზ ვეფხვაძე, მთავარი რედაქტორის მოადგილე — ომარ ფურთუხია.

ჟურნალში რამდენიმე განყოფილებაა, რომლებსაც სარედაქციო საბჭოს წევრები ხელმძღვანელობენ: „მათემატიკური სკოლები“ (ომარ ფურთუხია) — წარმოაჩენს იმ ქართველ მეცნიერებს, რომლებმაც დიდი წვლილი შეიტანეს ქართული მათემატიკური სკოლების ჩამოყალიბებასა და განვითარებაში; „ქართველი ავტორები“ (გია გიორგაძე) — პოპულარულ ენაზე გადმოიცემა მასალა მათემატიკური ცნებებისა და პრობლემების წარმოშობისა და განვითარების შესახებ; „თარგმანი“ (ილია თავხელიძე) — უცხოელი ავტორების სამეცნიერო-პოპულარული სტატიები; „მეთოდიკა“ (თეიმურაზ ვეფხვაძე, ქეთევან შავგულიძე) — მასალა, რომელიც ხელს შეუწყობს მასწავლებელთა პროფესიულ ზრდას; „მოსწავლეები“ (თენგიზ კოპალიანი, ბეჟან ღვაბერიძე) — მასალა, რომელიც განკუთვნილია მოსწავლეებში მათემატიკის პოპულარიზაციისთვის, მათემატიკური ოლიმპიადების მიმოხილვა, საინტერესო ამოცანები მოსწავლეებისთვის; „სტუდენტები“ (თინათინ დავითაშვილი) — წარმოაჩენს მათემატიკის დეპარტამენტის წარმატებულ სტუდენტებს; „კურსდამთავრებულები“ (როლანდ ომანაძე) — წარმოგვიდგენს მათემატიკის დეპარტამენტის წარმატებულ კურსდამთავრებულებს; „თსუ“ (რამაზ ბოჭორიშვილი, თინათინ დავითაშვილი) — დაეხმარება ახალგაზრდებს სამომავლო კარიერის დაგეგმვაში; იბეჭდება მასალა, რომელიც აღწერს სასწავლო პროგრამებს, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში ჩატარებულ საინტერესო ღონისძიებებს; რუბრიკით „ჩვენი ამაგდარი პედაგოგები“ წარმოგიდგენთ ჩვენს ღვაწლმოსილ პროფესორებს.

ჟურნალი იღებს სტატიებს ჩამოთვლილი განყოფილებების მიხედვით და დადებითი რეცენზიის მიღების შემთხვევაში იბეჭდება. სტატიის წარმოდგენისას ავტორებმა უნდა დაიცვან მათთვის განკუთვნილი ინსტრუქციის მოთხოვნები.



რონინ ნადირაძის მათემატიკური მოღვაწეობა

ვლადიმირ ვერშინინი

ა. გროთენდიკის მონტპელიეს ინსტიტუტი,
მათემატიკის დეპარტამენტი,
მონტპელიეს უნივერსიტეტი 2, პროფესორი

მალხაზ ბაკურაძე

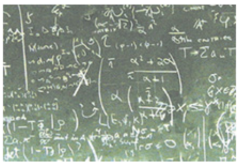
თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო
მეცნიერებათა ფაკულტეტი, ა. რაზმაძის
მათემატიკის ინსტიტუტი, პროფესორი.

რონინ ნადირაძის მათემატიკური შრომები ეხება ალგებრულ ტოპოლოგიას, ძირითადად, კობორდიზმების თეორიას. კობორდიზმის ცნება მათემატიკაში ძალიან ბუნებრივია. ციკლი, რომელიც განსაზღვრულია ჩაკეტილი n – განზომილებიანი მრავალნაირობით, მიიჩნევა ნულის ტოლად, თუ ის არის რაიმე $n+1$ – განზომილებიანი მრავალნაირობის საზღვარი. ანრი პუანკარემ ასეთ ინტუიციურ დონეზე განსაზღვრა პირველად ჰომოლოგია თავის შრომაში „Analysis situs“ 1895 წელს. კობორდიზმის თეორიის განვითარების შემდეგი ნაბიჯი გადადგა ლევ პონტრიაგინმა, როცა 1938 წელს გამოთვალა სფეროების პირველი ორი სტაბილური ჰომოტოპიის ჯგუფი კობორდიზმის ცნების გამოყენებით. სწორედ პონტრიაგინის შესანიშნავი იდეა იყო კობორდიზმების და ჰომოტოპიის ცნებების ერთმანეთთან დაკავშირება. მოგვიანებით ეს იდეა განავითარა რენე ტომმა, 1954 წელს. პონტრიაგინმა 1947 წელს დაამტკიცა, რომ, თუ ორი მრავალნაირობის არათანამკვეთი გაერთიანება საზღვარია, მაშინ მათი მახასიათებელი რიცხვები ემთხვევა ერთმანეთს. როხლინმა 1951-1953 წლებში შემოიღო და დაბალ განზომილებებში გამოითვალა არაორიენტირებული და ორიენტირებული კობორდიზმები. ტომმა დაადგინა ორიენ-

ტირებული და არაორიენტირებული კობორდიზმების კავშირი გარკვეული კომპლექსების ჰომოტოპიის ჯგუფებთან. ამ კომპლექსებს შემდგომ ტომის კომპლექსები ეწოდა. კობორდიზმების ყურადღება ასევე მიიპყრო მარკოვის თეორემამ 1958 წელს, მრავალნაირობების ჰომეომორფიზმის პრობლემის და ჰომოტოპიური ეკვივალენტობის ალგორითმული გადაუწყვეტობის შესახებ ოთხ და უფრო მაღალ განზომილებებში.

ამრიგად, კლასიფიკაციის ამოცანის თვალსაზრისით, უფრო პერპექტიულია კობორდიზმი, რადგან ის იძლევა უფრო სუსტ ეკვივალენტობას, ვიდრე ჰომეომორფიზმი და ჰომოტოპიური ეკვივალენტობა. ტომის ნაშრომების შემდეგ შესაძლებელი გახდა სხვადასხვა კობორდიზმის განსაზღვრა და შესწავლა სპეციალური სტრუქტურებით სტაბილურ ნორმალურ ფიბრაციაში. ერთ-ერთი ყველაზე საინტერესო თეორია არის სტაბილურად კომპლექსური მრავალნაირობების კობორდიზმების თეორია. სტაბილურად კომპლექსური კობორდიზმი ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად გამოითვალეს მილნორმა (1960) და ნოვიკოვმა (1962) და ეს რგოლი იზომორფულია მთელ რიცხვზე პოლინომური რგოლის თითო ახალი წარმომქმნელით ყოველ ლუწ განზომილებაში. კომპლექსური კობორდიზმის ერთ-ერთი შესანიშნავი თვისებაა კავშირი ფორმალური ჯგუფების თეორიასთან. ეს აღმოაჩინეს მიშჩენკომ და ნოვიკოვმა 1967 წელს და შემდეგ განავითარა ქვილენმა თავის 1969 წლის ნაშრომში, სადაც მან დაადგინა, რომ კომპლექსური კობორდიზმის ფორმალური ჯგუფი იზომორფულია ლაზარის უნივერსალური ფორმალური ჯგუფის. არსებობს ფრობენიუსის თეორემა, რომელიც ახასიათებს სასრულგანზომილებიან ასოციატიურ გაყოფიან ალგებრებს. უფრო ცხადად, ყოველი ასეთი ობიექტი არის სასრულგანზომილებიანი ვექტორული სივრცე ნამდვილ რიცხვთა ველზე, ამავე დროს არის ასოციატიური ალგებრა და არსებობს გაყოფა ნულისაგან განსხვავებულ ნებისმიერ ელემენტზე. ფრობენიუსის თეორემის თანახმად ყოველი ასეთი ობიექტი იზომორფულია ერთ-ერთი შემდეგის: ნამდვილი რიცხვები, კომპლექსური რიცხვები ან კვატერნიონები. ფრობენიუსის თეორემა იყო სტაბილურად კვატერნიონული მრავალნაირობების კობორდიზმების შესწავლის ერთ-ერთი მოტივაცია (სიმპლექტიკური კობორდიზმი). ამ კობორდიზმის შესწავლის იდეა ოფიციალურად ეკუთვნის მილნორს, 1960 წლის ნაშრომის მიხედვით. პირველი გამოთვლები გააკეთა ნოვიკოვმა 1962 წელს. აღმოჩნდა, რომ ამ რგოლის გამოანგარიშება საკმაოდ რთულია და მისი სტრუქტურა სრულად ჯერ კიდევ უცნობია, მიუხედავად მრავალი ავტორის მცდელობისა. 1967 წელს სტონგმა ააგო სტაბილურად კვატერნიონული მრავალნაირობების სერია, რომელიც იძლევა სიმპლექტიკური კობორდიზმის რგოლის ცხად mod p წარმომქმნელებს კენტი, მარტივი p რიცხვებისთვის. ბუნებრივი ჰომომორფიზმის შესწავლასთან დაკავშირებით, სიმპლექტიკური კობორდიზმიდან კომპლექსურ კობორდიზმზე, ბუხშტაბერმა და ნოვიკოვმა შემოიტანეს ორსახა ფორმალური ჯგუფები 1971 წელს. მოგვიანებით ეს კონცეფცია განზოგადდა ბუხშტაბერის მიერ ფორმალური ჯგუფების თეორიის სახით.

როინ ნადირაძემ მათემატიკური საქმიანობა დაიწყო ნოვიკოვისა და ბუხშტაბერის ხელმძღვანელობით. ამ თვალსაზრისით, როინი ეკუთვნის დიდ მათემატიკურ სკოლას და ტრადიციას: პონტრიაგინი-პოსტნიკოვი-ნოვიკოვი-ბუხშტაბერი. ეს შესაძლებელი გახდა მეტწილად აკადემიკოს გიორგი ჭოღოშვილის ინიციატივის წყალობით, მიემართა მოსკოვის ლომონოსოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ხელმძღვანელობისთვის თხოვნით, სასწავლებლად მიეღოთ ნიჭიერი ქართველი სტუდენტების ჯგუფი (ნადირაძე, ხაჟომია, ხიმშიაშვილი და სხვები). თავის მხრივ, ეს ტრადიცია და კონტაქტები დღესაც გრძელდება. თავის პირველ სტატიაში {1} რ. ნადირაძემ შეისწავლა სტონგის ტიპის მრავალნაირობები და თვითშეუღლებული მრავალნაირობების კობორდიზმი. სტონგის $M(m,n)$ მრავალნაირობები მაგალითებია ისეთი მრავალნაირობებისა, რომელთა სტაბილურ ნორმალურ ფიბრაციაში არსებობს კვარეტნიონული სტრუქტურა. სტონგის მრავალნაირობები განისაზღვრებიან, როგორც კომპლექსური პროექტიული სივრცეების ნამრავლების ქვემრავალნაირობები გარკვეული კვარენიონუ-



ლი ფიბრაციის ორადულად. ამ სიტუაციაში კენტი განზომილების კომპლექსური პროექტიული სივრცეები შეიძლება განიხილებოდეს, როგორც სტაბილურად კვატერნიონული მრავალნაირობები. შრომაში {1} რ. ნადირაძემ აღწერა $M(m,n)$-ის მოდელები, ასევე თავისუფალი ინვოლუცია $M(m,n)$-ზე. შემდეგ მან დაადგინა, რომ $M(m,n)/T$ სტაბილურ მხებ კომპლექსს აქვს კომპლექსური თვითშეუღლებადი სტრუქტურა; ეს სასარგებლო ფაქტია თვითშეუღლებადი კობორდიზმის შესასწავლად. რამდენიმე მომდევნო სტატიაში {2, 3, 4, 5, 6, 7} როინმა გააგრძელა ეს გამოკვლევა. რ. ნადირაძის ერთ-ერთი ყველაზე საინტერესო ნამუშევარი {11} არის სასრული ელემენტების შესახებ სიმპლექტიკურ კობორდიზმების რგოლში. მან ააგო გეომეტრიულად და შეისწავლა გრეხის ელემენტების ახალი მიმდევრობა. ამ ელემენტებს შორის არის 111 განზომილების. ადამსი-ნოვიკოვის სპექტრული თანმიმდევრობით მოგვიანებით დამტკიცდა, რომ ამ განზომილებაში არსებობს მეოთხე რიგის ელემენტი, თუმცა ჯერ უცნობია, ემთხვევა თუ არა ეს ელემენტი ნადირაძის ელემენტს. როინს ეკუთვნის ჰიპოთეზა, რომ სიმპლექტიკურ კობორდიზმებში გრეხის ელემენტებს აქვთ რიგი 2 ან 4. ეს საკითხი დღესაც ღიად რჩება.

ნაშრომში {5} რ. ნადირაძემ დაადგინა გეომეტრიული წარმომქმნელების და თანაფარდობების ერთობლიობა თვითშეუღლებადი კობორდიზმის თეორიაში. მიუხედავად იმისა, რომ ეს ერთობლიობა არ ქმნის სრულ სისტემას, ის მნიშვნელოვან ინფორმაციას იძლევა თვითშეუღლებადი კობორდიზმების რგოლზე.

სტატიებში [8,10} რ. ნადირაძემ განმარტა, რომ მახასიათებელი კლასების კლასიკური სამი თვისება არათავსებადია თვითშეუღლებადი კობორდიზმების თეორიაში. რა თქმა უნდა, გადაწყდა დადებითი განზომილების თვისების უარყოფა და უარყოფითი მახასიათებელი კლასების შემოღება, რათა შენარჩუნებულიყო უიტნის ფორმულა და ეილერის კლასი, როგორც უმაღლესი კლასი. ამიტომ, შტიფელ-უიტნის, ჩერნის ან პონტრიაგინის კლასებისგან განსხვავებით, ნადირაძის მიერ აგებული მახასიათებელი კლასების განზომილებები ხვდება შუალედში $-\infty, n$. ეს უარყოფითი კლასები იძლევა გაუშლად ელემენტებს თვითშეუღლებად კობორდიზმებში, ზოგიერთი კლასი კი გეომეტრიულად არის რეალიზებული {4, 5}.

როინ ნადირაძემ სადოქტორო დისერტაციაში {9, 11, 12, 15, 16} განსაზღვრა საინტერესო ფორმალური ჯგუფები და შეისწავლა [13, 14, 17, 18} მათი კავშირი კობორდიზმების თეორიებთან. ერთ-ერთ ასეთ ფორმალურ ჯგუფს შემდგომ ეწოდა ნადირაძის ფორმალური ჯგუფი, რადგან გაირკვა {19, 20}, რომ ეს კონსტრუქცია იძლევა ბუხშტაბერისა და კრიჩევერის ფორმალური ჯგუფების შესწავლის ალტერნატიულ საშუალებას.

ლიტერატურა:

1. R. Nadiradze, Involutions on Stong manifolds and cobordism of self-conjugate manifolds}, Bull. Acad. Sci. Georgia, 85(2) (1977), 301-303.
2. R. Nadiradze, New examples of symplectic and self-conjugate manifolds, Bull. Acad. Sci. Georgia, 95(2) (1979), 293-296.
3. R. Nadiradze, Involutions on Stong manifolds and cobordism of self-conjugate manifolds}, Proc. Tbilisi A. Razmadze Math. Inst., 64(1980), 72-81.
4. R. Nadiradze, Signature of CO-manifolds, Bull. Acad. Sci. Georgia, 97(2) (1980), 301-303.
5. R. Nadiradze, Involutions on Stong and their applications, Uspekhi Mat. Nauk, 6(1980), 206-209.
6. R. Nadiradze, Analogous of Stong manifolds and their applications, Bull. Acad. Sci. Georgia, 105(1) (1982), 45-48.
7. R. Nadiradze, Analogous of Stong manifolds and their applications, Proc. Tbilisi A. Razmadze Math. Inst., 74 (1983), 65-79.
8. M. Bakuradze, R. Nadiradze, Cohomological realization of two valued formal groups and their applications, Bull. Acad. Sci. Georgia, 128(1) (1987), 21-23.
9. K. Kordzaia, R. Nadiradze, Elliptic genera of level N and umbral calculus, Bull. Acad. Sci. Georgia, 135(1) (1989), 41-44.
10. M. Bakuradze, R. Nadiradze, Cohomological realization of two valued formal groups and their

applications, Proc. Tbilisi A. Razmadze Math. Inst., 94(1991), 12-28.
11. R. Nadiradze, Some remarks concerning Tors Omega*Sp, Bull. Acad. Sci. Georgia, 135(1) (1989), 33-35.
12. R. Nadiradze, Elliptic genera for various cobordism theories, Proc. Tbilisi A. Razmadze Math. Inst., 104(1992).
13. R. Nadiradze, On formal groups of type (A(y)x^2-A(x)y^2)/(B(y)x-B(x)y), Bull. Acad. Sci. Georgia, 146(3) (1992), 465-468.
14. R. Nadiradze, Some formulas for elliptic cohomology, Bull. Acad. Sci. Georgia, 147(1) (1992), 17-21.
15. R. Nadiradze, Characteristic classes in SC^* theory and their applications, Heidelberg, Preprint 58(1993), 1-21.
16. R. Nadiradze, On a class of formal groups}, Bull. Acad. Sci. Georgia, 148(1) (1993), 17-20.
17. R. Nadiradze, Characteristic classes in SC^* theory and their applications, Proc. Tbilisi A. Razmadze Math. Inst., 104 (1994), 55-75.
18. R. Nadiradze, On a class of formal groups}, Heidelberg, Preprint 61(1993), 1-36.
19. M. Bakuradze, Formal group laws by Buchstaber, Krichever and Nadiradze coincide, Russ. Math. Surv., 68 (571) (2013)
20. M. Bakuradze, On the Buchstaber formal group law and some related genera, Proc. Steklov Math. Inst., 286 (1)(2014), 7-21.

ეილერის მახასიათებელი და ფერთა პრობლემა

თეიმურაზ ალიაშვილი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
ასოცირებული პროფესორი,
ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტის ბიზნესის,
ტექნოლოგიისა და განათლების ფაკულტეტი

XVIII საუკუნის ერთ-ერთი უდიდესი მათემატიკოსი ლეონარდ ეილერი (1707-1783) დაიბადა შვეიცარიის ქალაქ ბაზელში. თორმეტი წლიდან ის ცხოვრობდა პეტერბურგში, შემდგომ ბერლინში, შემდეგ ისევ პეტერბურგში. ეილერმა უდიდესი როლი ითამაშა მათემატიკის განვითარებაში. იგი მათემატიკის ზოგიერთი დარგის პირველმკვლევარი იყო. ეილერმა 1752 წელს ხელახლა აღმოაჩინა ფაქტი, რომელიც ჯერ კიდევ დეკარტს ჰქონდა შემჩნეული 1640 წელს. კერძოდ, მან მიიღო ფორმულა, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს მარტივი მრავალწახნაგას წვეროების, წიბოების და წახნაგების რიცხვს. შემდგომ, 1758 წელს ჟურნალში „Записи Петербургской академии наук“ ეილერმა გამოაქვეყნა $B-P+\Gamma=2$ ფორმულის დამტკიცება ნებისმიერი ამოზნექილი მრავალწახნაგასთვის, სადაც B არის მრავალწახნაგას წვეროთა რიცხვი, P არის წიბოთა რიცხვი, ხოლო Γ – წახნაგთა რიცხვი.

ამ სტატიაში ჩვენ შევეხებით აღნიშნულ ფორმულას, განვიხილავთ მის მარტივ შემთხვევებს, განზოგადებებს და შევჩერდებით უამრავი გამოყენებიდან ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს შემთხვევაზე.

ეილერის მახასიათებლის მთავარი ღირსებაა ის, რომ როგორი ფიგურაც არ უნდა ავიღოთ (რაიმე გარკვეული კლასიდან) და როგორადაც არ უნდა დავყოთ შემადგენელ ნაწილებად (წახნაგები, წიბოები, წვეროები) გარკვეული წესით, ერთმანეთის „მიმხებ“ ფიგურებად, უკვე ნახსენები ნიშანმონაცვლე ჯამი $\mathrm{B}-\mathrm{P}+\Gamma$, რომელსაც ეწოდება ფიგურის **ეილერის მახასიათებელი**, ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას.

ლეონარდ ეილერი
Leonhard Euler (1707- 1783)

რა არის ეილერის მახასიათებელი?

ვთქვათ, F ფიგურა რაღაცნაირად დაყოფილია ნაწილებად, რომელთაც ვუწოდებთ წვეროებს, წიბოებს და წახნაგებს. მათი რაოდენობები შესაბამისად აღვნიშნოთ B, P და Γ-თი. დაყოფის ყველა ნაწილისთვის გამოვიყენოთ გამაერთიანებელი ტერმინი *„დაყოფის უჯრები“* ან, უბრალოდ, *„უჯრები“*. აღმოჩნდება, რომ F ფიგურის ნებისმიერი დაყოფის შემთხვევაში ნიშანცვლადი ჯამი $\mathrm{B}-\mathrm{P}+\Gamma$ ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას ან, სხვა სიტყვებით, ინვარიანტულია (უცვლელია) დაყოფის წესის მიმართ. ამ ჯამს, როგორც ვთქვით, ეწოდება ფიგურის ეილერის მახასიათებელი და აღინიშნება ბერძნული χ („ხი“) ასოთი. მაშასადამე,

$$\chi(F) = B - P + \Gamma$$

ჯამში შემავალი შესაკრებების რიგი შემთხვევითი არაა. მას განსაზღვრავს უჯრედების განზომილება, რაც ნიშნავს შემდეგს: B არის ნულგანზომილებიანი უჯრედების (წერტილების) რაოდენობა, P არის ერთგანზომილებიანი (მონაკვეთების) და Γ - ორგანზომილებიანი (ამოზნექილი მრავალკუთხედების) უჯრედების რაოდენობა. მაგალითად, მკითხველს ადვილად შეუძლია შეამოწმოს, რომ ეილერის მახასიათებელი წრფისთვის უდრის -1-ს, სიბრტყისთვის ტოლია 1-ის და წრეწირისთვის არის 0.

აქ მოყვანილი ეილერის მახასიათებლის განმარტება საჭიროებს დაზუსტებას. კერძოდ, უნდა მივუთითოთ რომელი კლასის ფიგურებს განვიხილავთ, რა იგულისხმება უჯრედის ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში და ბოლოს, როგორ განიმარტება დაყოფა და როგორ თანახებაშია ერთმანეთთან სხვადასხვა უჯრედი.

შევისწავლოთ რას გვაძლევს ეილერის მახასიათებლის ფორმულა ფიგურათა ერთი მნიშვნელოვანი კლასისთვის.

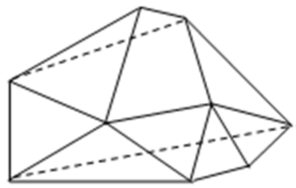
ეილერის ფორმულა მრავალწახნაგებისთვის

მრავალწახნაგების შესწავლას ჯერ კიდევ ანტიკურ გეომეტრიაში ეკავა ერთ-ერთი ცენტრალური ადგილი, მაგრამ მაინც მოხდა ისე, რომ დეკარტსა და ეილერს ხვდათ წილად აღმოეჩინათ მეტად მნიშვნელოვანი ფაქტი. ეს მნიშვნელოვანი აღმოჩენა შეეხება მრავალწახნაგას წვეროების, წიბოებისა და წახნაგების რაოდენობათა შორის დამოკიდებულებას. უფრო ზუსტად: თუ გამოვიყენებთ ზემოთ ხსენებულ აღნიშვნებს, რომლის თანახმადაც B მრავალწახნაგას წვეროთა რიცხვია, P – წიბოთა რაოდენობა, ხოლო Γ – წახნაგთა რაოდენობა, მაშინ მართებულია ტოლობა:

$$B - P + \Gamma = 2. \qquad (1)$$

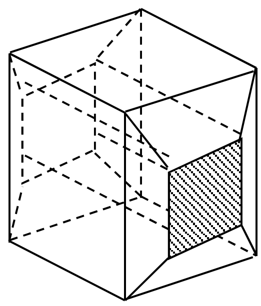
ამ ფორმულას ეწოდება **ეილერის ფორმულა.**

მრავალწახნაგას ქვეშ იგულისხმება სხეული, რომლის ზედაპირი შედგება მრავალკუთხედის ფორმის მქონე სასრული რაოდენობის წახნაგებისგან. *წესიერი მრავალწახნაგას* შემთხვევაში ყველა წახნაგი წესიერი მრავალკუთხედია და ერთმანეთის კონგრუენტულია. მრავალწახნაგას ვუწოდოთ *მარტივი*, თუ მასში არ არის „ხვრელები“, ანუ უწყვეტი დეფორმაციით შესაძლებელია მისი ზედაპირი გარდაიქმნას სფეროს ზედაპირად. ნახ.1 -ზე გამოსახულია მარტივი მრავალწახნაგა, რომელიც წესიერი არაა,



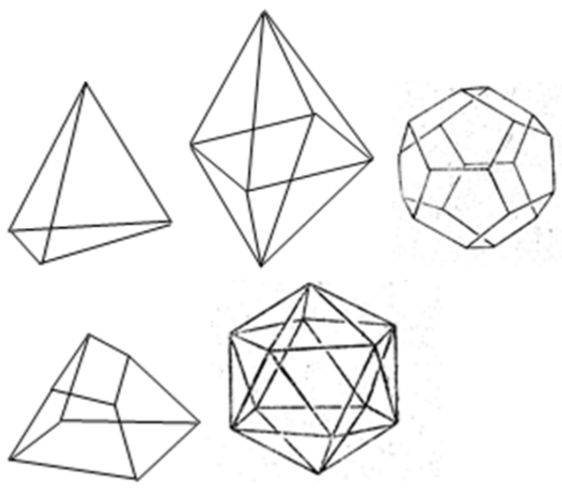
ნახ. 1.

ხოლო ნახ. 2-ზე გამოსახულია მრავალწახნაგა,



ნახ. 2.

რომელიც მარტივი არ არის.



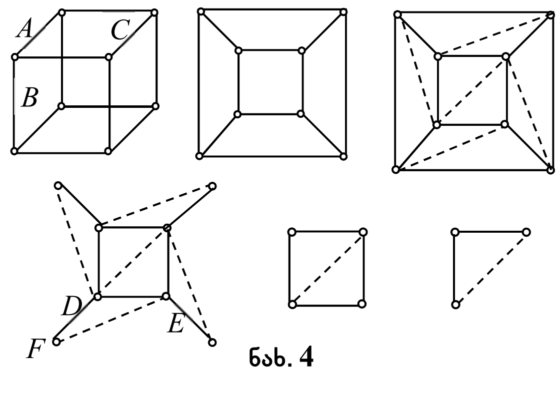
ნახ. 3.

მკითხველს ვთავაზობთ შეამოწმოს, რომ ეილერის ფორმულა მართებულია პირველ და მესამე ნახაზებზე გამოსახული ყოველი მრავალწახნაგასთვის, ხოლო მეორე ნახაზზე გამოსახულ მრავალწახნაგასთვის ეს ფორმულა არ არის სამართლიანი.

ვაჩვენოთ ეილერის ფორმულის სამართლიანობა.

წარმოვიდგინოთ, რომ მრავალწახნაგა შიგნით ცარიელია და რომ მისი ზედაპირი გაკეთებულია თხელი რეზინისგან. მაშინ ასეთი, შიგნით ცარიელი, მრავალწახნაგიდან თუ წინასწარ ერთ-ერთ გვერდს ამოვჭრით, შეიძლება დარჩენილი ზედაპირის იმგვარი დეფორმაცია, რომ ის სიბრტყეზე გაიშალოს. ცხადია, ამ დროს როგორც მრავალწახნაგას წახნაგები, ასევე წიბოებს შორის მდებარე კუთხეებიც მკვეთრ ცვლილებებს განიცდიან, მაგრამ წვეროებისა და წიბოებისგან სიბრტყეზე შედგენილი „ბადე" (გრაფი) იმდენივე წვეროსა და წიბოს შეიცავს, რამდენსაც თავდაპირველად აღებული მრავალწახნაგა. გავითვალისწინოთ, რომ ეს ხდება მაშინ, როცა წახნაგთა რიცხვი ერთითაა შემცირებული, რადგან ერთი წახნაგი ამოჭრილია. ვნახოთ, რომ ჩვენ მიერ სიბრტყეზე მიღებული ბადისთვის მართებულია ტოლობა $B-P+\Gamma=1$, მაშინ ამოჭრილი წახნაგის დამატებით მივიღებთ $B-P+\Gamma=2$ ტოლობას.

უპირველეს ყოვლისა, მოვახდინოთ ბრტყელი ბადის შემდეგი სახის „ტრიანგულაცია". თუ ბადეში არის სამზე მეტკუთხიანი მრავალკუთხედი, მაშინ მასში გავატარებთ რომელიმე დიაგონალს. ამის შემდეგ ორივე P და Γ რიცხვი ერთით გაიზრდება, მაგრამ ამის გამო $B-P+\Gamma$ გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა არ შეიცვლება. ამგვარადვე გავავლებთ ორი წვეროს შემაერთებელ სხვა დიაგონალებსაც (ნახ. 4) მანამ, სანამ ბადე მხოლოდ სამკუთხედებით შედგენილი არ აღმოჩნდება.



ნახ. 4

ამ ტრიანგულირებულ ბადეში $B-P+\Gamma$ სიდიდეს იგივე მნიშვნელობა აქვს, რაც ტრიანგულაციამდე, რადგანაც ახალი დიაგონალის გავლება, როგორც უკვე ვთქვით, ამ სიდიდეს არ ცვლის. ზოგიერთ სამკუთხედს აქვს ისეთი წიბოები (ანუ გვერდები), რომლებიც ტრიანგულირებული ბადის „საზღვარს" ეკუთვნიან. ზოგიერთ ამ სამკუთხედს (მაგ., ΔABC-ს ნახ.4) საზღვარზე მხოლოდ თითო წიბო აქვს, სხვებს შეიძლება ჰქონდეთ ორ-ორი (მაგ., ΔDEF-ს. ნახ.4). ავიღოთ ერთ-ერთი ასეთი „საზღვრითი" სამკუთხედი და ჩამოვაშოროთ ყველა კომპონენტი, რომელიც რომელიმე სხვა სამკუთხედს არ ეკუთვნის. ასე მაგალითად: ΔABC-ს ჩამოვაშორებთ AC წიბოს და თვით ამ წახნაგსაც. დავტოვებთ მხოლოდ A, B, C წვეროებს და AB და BC წიბოებს. ხოლო ΔDEF-ში მოვშლით წახნაგს, ორ DF და EF წიბოს და F წვეროს. ABC სამკუთხედის „მოსპობისას" P და Γ რიცხვები 1 -ით შემცირდებიან, ხოლო B არ იცვლება, ამიტომ არ იცვლება არც $B-P+\Gamma$ სიდიდე. DEF ტიპის სამკუთხედის ამოშლისას B შემცირდება ერთით, P – ორით და Γ – ერთით, ასე რომ $B-P+\Gamma$ მაინც უცვლელი რჩება. ამგვარი, სათანადოდ შერჩეულ ოპერაციათა მთელი სერიის შედეგად, მოვსპობთ რა ერთიმეორის მიყოლებით „საზღვრით" სამკუთხედებს (ამასთან ერთად თვით საზღვარიც იცვლება), ბოლოს მივალთ ერთადერთ სამკუთხედამდე, რომელსაც აქვს სამი წიბო, სამი წვერო და ერთი წახნაგი. მის მიერ წარმოქმნილი საკმაოდ მარტივი ბადისთვის $\mathrm{B}-\mathrm{P}+\Gamma=1$. ჩვენ კი ვნახეთ, რომ ეს სიდიდე არ იცვლებოდა სამკუთხედების „მოსპობისას", ე.ი. $B-P+\Gamma$ სიდიდე ერთის ტოლი უნდა ყოფილიყო როგორც თავდაპირველად აღებული ბრტყელი ბადისთვის, ასევე წახნაგამოჭრილი იმ მრავალწახნაგასთვის, რომლისგანაც მივიღეთ ეს ბრტყელი ბადე. აქედან გამომდინარეობს, რომ მოცემული მრავალწახნაგასთვის (წახნაგის ამოჭრამდე) ადგილი უნდა ჰქონდეს $B-P+\Gamma=2$ ტოლობას. ამით ეილერის ფორმულა მრავალწახნაგებისთვის დამტკიცებულია.

თუ მკითხველი გაცნობილია n – განზომილებიან სივრცეს, მაშინ შეიძლება შევნიშნოთ შემდეგი: *თუ n – განზომილებიან სივრცეში გვაქვს ამოზნექილი მრავალწახნაგა,*

რომელიც არ მდებარეობს არცერთ $n-1$ – განზომილებიან ჰიპერსივრცეში, მაშინ მისი საზღვარი ბუნებრივად იშლება 0-დან $n-1$-მდე განზომილებების უჯრედებად. თუ α_i აღნიშნავს i-განზომილებიანი უჯრედების რაოდენობას $(i=0,1,\ldots,n-1)$, მაშინ გვაქვს ეილერის ფორმულის შემდეგი ანალოგი:

$$a_0-a_1+a_2-\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}= =1+(-1)^{n-1}. \quad (2)$$

სულ რამდენი სახის წესიერი მრავალწახნაგა არსებობს?

ეილერის ფორმულის საშუალებით ადვილია ვაჩვენოთ, რომ არსებობს მხოლოდ ხუთი ტიპის წესიერი მრავალწახნაგა.

დავუშვათ, რომ წესიერ მრავალწახნაგას აქვს Γ რაოდენობის წახნაგი, რომელთაგან თითოეული წესიერი $n-$კუთხა მრავალკუთხედია. ვთქვათ, თითოეულ წვეროსთან r წიბო იკრიბება. თუ წიბოებს ჯერ წახნაგების მიხედვით დავთვლით, ხოლო შემდეგ – წვეროების მიხედვით, მივიღებთ, რომ პირველ შემთხვევაში

$$n\Gamma = 2P, \quad (3)$$

(რადგან ყოველი წიბო ორ წახნაგს ეკუთვნის, ამიტომ ნამრავლი $n\Gamma$ ორჯერ ითვლება), ხოლო მეორე შეთხვევაში

$$rB = 2P$$

(რადგან ყოველი წიბო ეყრდნობა ორ წვეროს). მაშინ ეილერის (1) ტოლობა გვაძლევს:

$$\frac{2P}{n}+\frac{2P}{r}-P=2,$$

ანუ

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{r}=\frac{1}{2}+\frac{1}{P} \quad (4)$$

უკანასკნელი ტოლობის განხილვისას შევნიშნოთ, რომ $n\geq 3$ და $r\geq 3$, რადგან მრავალკუთხედს სამი გვერდი მაინც აქვს და ყოველ წვეროში სამი წახნაგი, ანუ სამი წიბო მაინც იკრიბება. მეორე მხრივ, ორივე n და r რიცხვი არ შეიძლება 3-ზე მეტი იყოს ერთდროულად. წინააღმდეგ შემთხვევაში (4) ტოლობის მარცხენა მხარე $\frac{1}{2}$-ს ვერ გადააჭარბებდა და ტოლობა შეუძლებელი იქნებოდა P რიცხვის ნებისმიერი დადებითი მნიშვნელობისთვის. ამრიგად, დაგვრჩა გამოვარკვიოთ, როგორი მნიშვნელობები შეიძლება ჰქონდეს r რიცხვს, როცა $n=3$ და პირიქით, როგორი მნიშვნელობები შეიძლება ჰქონდეს n–ს, როცა $r=3$. თუ ყველა შესაძლო შემთხვევას დავითვლით, მივიღებთ წესიერი მრავალწახნაგების ტიპთა რიცხვს. როცა $n=3$, მაშინ (4) ტოლობა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{6}=\frac{1}{P}.$$

აქ r შეიძლება იყოს 3, 4 ან 5 (6 და უფრო დიდი მნიშვნელობები გამორიცხულია, რადგანაც $\frac{1}{P}$ დადებითია). n და r რიცხვების ამ მნიშვნელობისათვის P იქნება შესაბამისად 6, 12 და 30. ასე მიიღებიან მრავალწახნაგები: ტეტრაედრი, ოქტაედრი და იკოსაედრი.

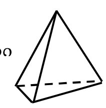
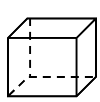
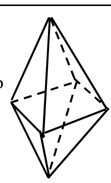
ანალოგიურად, როცა $r=3$, მაშინ (4) ტოლობა მიიღებს ასეთ სახეს:

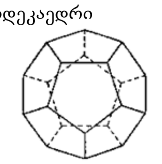
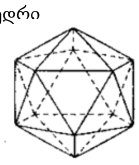
$$\frac{1}{n}-\frac{1}{6}=\frac{1}{P},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $n=3,4,5$ და შესაბამისად, $P=6,12,30$. ასე მიიღება მრავალწახნაგები: ტეტრაედრი, კუბი და დოდეკაედრი.

n, r და P რიხცვების მიღებული მნიშვნელობების $n\Gamma=2P$ და $rB=2P$ ტოლობებში ჩასმით დავადგენთ შესაბამისი მრავალწახნაგების B წვეროთა და Γ წახნაგთა რიცხვებს.

ყველა ამ შედეგთა შეჯამებით შეიძლება შევადგინოთ ასეთი ცხრილი:

	n	r	B	P	Γ
ტეტრაედრი 	3	3	4	6	4
კუბი 	4	3	8	12	6
ოქტაედრი 	3	4	6	12	8

დოდეკაედრი 	5	3	20	30	12
იკოსაედრი 	3	5	12	30	20

ამოზნექილ მრავალწახნაგას ეწოდება *კომბინატორულად წესიერი,* თუ მისი ყოველი წახნაგი შეიცავს წიბოთა (გვერდების) ერთსა და იმავე რაოდენობას და ყოველ წვეროს აქვს ერთი და იგივე ხარისხი (მათგან გამოდის ერთნაირი რაოდენობის წიბოები). ამ განმარტებაში არ იგულისხმება, რომ წახნაგები იყოს წესიერი ტოლი მრავალკუთხედები ან კუთხეები იყოს ტოლი. ამით განსხვავდება კომბინატორულად წესიერი მრავალწახნაგა მეტრიკულად წესიერი მრავალწახნაგასგან (რომლებზეც ზემოთ გვქონდა საუბარი ანუ რომლებიც ცნობილია საშუალო სკოლის კურსიდან). ცხადია, მეტრიკულად წესიერი მრავალკუთხედი ამავე დროს არის კომბინატორულად წესიერიც.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარე შეიძლება დავასკვნათ, რომ ამ შემთხვევაშიც იარსებებს ხუთი ტიპის კომბინატორულად წესიერი მრავალწახნაგა. ესენია: ტეტრაედრი, ჰექსაედრი (ანუ ექვსწახნაგა), ოქტაედრი (ანუ რვაწახნაგა), დოდეკაედრი (ანუ თორმეტწახნაგა) და იკოსაედრი (ანუ ოცწახნაგა). როგორც აღვნიშნეთ, აუცილებელი არაა, რომ წახნაგები წესიერ მრავალკუთხედებს წარმოადგენდნენ.

ეილერის თეორემა

ტოპოლოგიაში ძალიან ხშირად განიხილება ე. წ. *ჰომეომორფული* ასახვები.

$f: A \to B$ ასახვას ეწოდება *ჰომეომორფული* (ან *ჰომეომორფიზმი*), თუ ის არის ურთიერთცალსახა და უწყვეტია მის შებრუნებულთან ერთად.

შეიძლება ვთქვათ, რომ ჰომეომორფიზმი არის ისეთი ასახვა ერთი სიმრავლიდან მეორე სიმრავლეში, რომლის დროსაც არ ხდება სიმრავლეთა გახლეჩა ან შეწებება. მაგალითად, შეიძლება წამოვიდგინოთ, რომ ფიგურები „დამზადებულია" ძალიან მტკიცე და ძალიან ელასტიკური ნივთიერებისგან და იგულისხმება, რომ ნებისმიერი გაჭიმვა და შეკუმშვა მიმდინარეობს შეწებებისა და გახევის გარეშე. თუ ვიგულისხმებთ, რომ A და B ასეთი ფიგურებია, მაშინ ისინი ჰომეომორფულნი იქნებიან, ანუ მათ შორის შეიძლება დამყარდეს ჰომეომორფიზმი. მაგალითად, სამკუთხედის კონტური და საზოგადოდ ყველა მრავალკუთხედის კონტური ჰომეომორფულია წრეწირის. ასევე, სფერო, კუბის ზედაპირი და ცილინდრის ზედაპირი ურთიერთჰომეომორფული ფიგურებია, მაგრამ ისინი არ არიან ჰომეომორფულნი, მაგალითად, ტორის. შევნიშნოთ, რომ მრავალწახნაგას ნებისმიერი წახნაგი ჰომეომორფულია წრის, ხოლო განხილული მრავალწახნაგების (და, საზოგადოდ ნებიმიერი ამოზნექილი მრავალწახნაგების) სრული ზედაპირები ჰომეომორფულია სფეროსი. ეს ჰომეომორფიზმი შეიძლება განხორციელდეს შემდეგნაირად.

ვთქვათ, c არის ამოზნექილი მრავალწახნაგას ნებისმიერი შიგა წერტილი, ხოლო S – იყოს სფერო, რომლის ცენტრი c წერტილშია და თავის შიგნით მოიცავს მოცემულ მრავალწახნაგას, მაშინ c წერტილიდან მრავალწახნაგას ზედაპირის პროექცია სფეროს ზედაპირზე წარმოადგენს საძიებელ ჰომეომორფიზმს. ამის შემდეგ შესაძლებელია ზემოთ მიღებული შედეგი ასე ჩამოყალიბდეს:

თეორემა 1. *ნებისმიერი მრავალწახნაგასთვის, რომლის ზედაპირიც სფეროს ჰომეომორფულია, ხოლო ყოველი წახნაგი ჰომეომორფულია წრის, სამართლიანია ფორმულა*

$$B - P + \Gamma = 2.$$

ამ თეორემას შეიძლება მიეცეს სუფთა ტოპოლოგიური სახე. ამისათვის მრავალწახნაგას ყველა წვერო და წიბო განვიხილოთ როგორც ბმული გრაფი, რომელიც ყოფს მრავალწახნაგას ზედაპირს წახნაგებად (ანუ ნაწილებად, რომლებიც წრის ჰომეომორფულებია). მაშინ ვღებულობთ ეილერის თეორემაზე უფრო ზოგად თეორემას.

თეორემა 2. *თუ სფეროზე (ან მის ჰომეომორფულ ზედაპირზე) დახაზულია ბმული* G *გრაფი, რომელსაც აქვს* B *წვერო,* P

წიბო და სფეროს ყოფს Γ რაოდენობის არედ („წახნაგად“), მაშინ სამართლიანია ფორმულა $B-P+\Gamma=2$.

ზედაპირის ეილერის მახასიათებელი

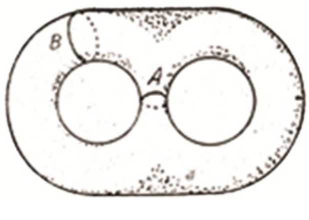
ორგანზომილებიანი ზედაპირების შესწავლის დროს იკვეთება მრავალი მარტივი, მაგრამ არსებითი გარემოება. დავიწყოთ სულ მარტივით: შევადაროთ ერთმანეთს სფეროსა და ტორის ზედაპირები. ადვილი შესამჩნევია შემდეგი მარტივი განსხვავება. სფეროზე, ისევე როგორც სიბრტყეზე, ნებისმიერი C ჩაკეტილი მარტივი წირი ზედაპირს ორ ნაწილად ყოფს, მაშინ როცა ტორზე ისეთი ჩაკეტილი C' წირებიც არსებობენ, რომლებიც ზედაპირს ორ ნაწილად არ ყოფენ. C მრუდის მიერ სფეროს ორ ნაწილად გაყოფა ნიშნავს იმას, რომ სფეროს ზედაპირის C მრუდის გასწვრივ გაჭრით ეს ზედაპირი ორ ერთმანეთის დამოუკიდებელ ნაწილად იყოფა. ან, სხვანაირად,

ნახ.5

სფეროს ზედაპირზე მოიძებნება ორი ისეთი წერტილი, რომ სფეროს ზედაპირზე მათი შემაერთებელი ყოველი წირი აუცილებლად გადაიკვეთება C წირთან. ამის საწინააღმდეგოდ, თუ ტორს C' წირის გასწვრივ გავჭრით, მაშინ გაჭრის შედეგად ზედაპირი ორ ნაწილად არ დაიშლება. ე.ი. მისი ყოველი ორი წერტილი შეიძლება შეერთდეს წირით, რომელსაც C' წირთან საერთო წერტილი არ ექნება.

ეს განსხვავება მოწმობს იმას, რომ სფერო და ტორი ტოპოლოგიური აზრით ზედაპირთა ერთსა და იმავე კლასს არ მიეკუთვნებიან, ანუ ტორი არ შეიძლება ტოპოლოგიურად გარდაიქმნას სფეროში.

ახლა განვიხილოთ ზედაპირი „ორი ხვრელით“ ანუ ორმაგი ტორი, რომელიც გამოსახულია მე-6 ნახაზზე. ამ ზედაპირზე გავატაროთ ორი ჩაკეტილი A და B წირი



ნახ.6

ისე, რომ ზედაპირი არ დაიყოს ნაწილებად. ტორი კი ასეთი ორი მრუდის გატარებით აუცილებლად დაიყოფა ნაწილებად. მეორე მხრივ, ყოველი სამი ჩაკეტილი მრუდი აუცილებლად გაყოფს ორხვრელიან ზედაპირს ნაწილებად.

ყოველივე ზემოთ თქმული გვაძლევს იმის საფუძველს, რომ შემოვიღოთ *ზედაპირის გვარის* ცნება. ზედაპირის გვარის ქვეშ გვესმის უდიდესი შესაძლო რიცხვი არაგადამკვეთი მარტივი ჩაკეტილი წირებისა, რომლებიც ზედაპირზე ისე შეიძლება გატარდეს, რომ არ დაიყოს ის ნაწილებად. ამგვარად, სფეროს გვარი უდრის ნულს, ტორის – ერთს, მე-6 ნახაზზე გამოსახული ფიგურის – ორს და, საზოგადოდ, k „ხვრელის“ მქონე ზედაპირის გვარია k. გვარი ზედაპირთა ტოპოლოგიური ინვარიანტია. ის არ იცვლება ზედაპირის დეფორმაციის დროს. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ თუ ორ ჩაკეტილ ზედაპირს ერთი და იგივე გვარი აქვს, მაშინ ერთი შეიძლება დეფორმირდეს მეორეში. ამრიგად, ჩაკეტილი ზედაპირის გვარი k სავსებით ახასიათებს იმ ტოპოლოგიურ კლასს, რომელსაც ის მიეკუთვნება (ამ შემთხვევაში იგულისხმება, რომ განვიხილავთ ჩვეულებრივ ორმხრივ ზედაპირებს). მაგალითად, ზემოთ განხილული ორხვრელიანი ზედაპირი და მე-7 ნახაზზე გამოსახული „ორსახელურიანი“ სფერო წარმოადგენენ მეორე გვარის ზედაპირებს. თითოეული ეს

ნახ. 7

ზედაპირი შეიძლება დეფორმირდეს მეორეში. ვინაიდან ზედაპირი k ხვრელით ან მისი ეკვივალენტური – სფერო k სახელურით – k გვარის ზედაპირებია, ამიტომ ყოველი ამ ზედაპირთაგანი შეგვიძლია ავიღოთ k გვარის

ყველა ჩაკეტილ ზედაპირთა „ტოპოლოგიურ წარმომადგენლად“.

დავუშვათ, რომ ჩაკეტილი k გვარის S ზედაპირი დაყოფილია რამდენიმე არედ (ასეთ დაყოფას მივიღებთ, თუ S-ზე აღვნიშნავთ რამდენიმე „წვეროს“ და შემდეგ მათ ერთმანეთთან წირთა რკალებით შევაერთებთ). ასეთ დროს სამართლიანია ფორმულა, რომელსაც მოვიყვანთ დაუმტკიცებლად:

$$B - P + \Gamma = 2 - 2k \qquad (5)$$

სადაც, $B-$ კვლავ წვეროთა რიცხვია, $P-$ რკალთა რიცხვი, ხოლო $\Gamma-$ არეთა რიცხვი. მარჯვენა მხარეს მდგომ რიცხვს $2-2k$ ეწოდება ზედაპირთა ეილერის მახასიათებელი და აღინიშნება ასე: $\chi(k)$. როგორც ვნახეთ, სფეროს შემთხვევაში გვაქვს $B-P+\Gamma=2$, რაც (5) ფორმულასაც ეთანხმება, რადგან სფეროს გვარი $k=0$.

დავუშვათ, რომ Q რაიმე ზედაპირია, რომელზედაც შეიძლება „დავხატოთ“ გრაფი, რომელიც მას დაყოფს წრის ჰომემორფულ სასრული რაოდენობის ნაწილებად. შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ $\chi(Q)=B-P+\Gamma$ რიცხვი დამოკიდებულია არა Q ზედაპირზე უშუალოდ, არამედ დაყოფის არჩევაზე. ეილერის თეორემა გვიჩვენებს, რომ სფეროს ჰომეომორფული Q ზედაპირის ეილერის მახასიათებელი არ არის დამოკიდებული მის დაყოფაზე და $\chi(Q)=2$ ყოველთვის. შევნიშნოთ, რომ მსგავსი რამ ძალაშია მაშინაც, როდესაც Q ზედაპირი ნებისმიერია, ანუ ეილერის მახასიათებელი წარმოადგენს ტოპოლოგიურ ინვარიანტს. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ Q_1 და Q_2 ჰომემორფული ზედაპირებია, მაშინ $\chi(Q_1)=\chi(Q_2)$.

ხუთი ფერის პრობლემის დამტკიცებისთვის

ეილერის ფორმულას ემყარება ერთი მეტად მნიშვნელოვანი პრობლემის დამტკიცება, რომელიც ცნობილია ხუთი ფერის პრობლემის სახელით. ის მოკლედ და ზოგადად ასე შეიძლება ჩამოყალიბდეს: *სფეროზე ან სიბრტყეზე აღებული ყოველი რუკა შეიძლება შეიფეროს არაუმეტეს ხუთი სხვადასხვა ფერის საშუალებით.*

აქვე შევნიშნოთ, რომ ხუთი ფერის პრობლემა მჭიდრო შეხებაშია უფრო ცნობილ და უფრო დიდ ოთხი ფერის პრობლემასთან, რომელიც ბოლო დრომდე ძალიან დიდი ხნის განმავლობაში წარმოადგენდა ერთ-ერთ გადაუწყვეტელ დიდ მათემატიკურ პრობლემას. ამაზე ოდნავ ქვემოთ.

პრობლემაში იგულისხმება, რომ რუკა დახატულია სიბრტყეზე ან სფეროზე. ეს ორი შემთხვევა ერთმანეთის ეკვივალენტურია. მართლაც, სფეროზე მოცემული ყოველი რუკა შეიძლება გადატანილ იქნეს სიბრტყეზე, თუ მის ერთ-ერთ A არეში გავაკეთებთ პატარა ხვრელს და შემდეგ სფეროს გადავფენთ სიბრტყეზე. მიღებული რუკა გამოსახავს „კუნძულს“, რომელიც შედგენილია ხელუხლებელი არეებისგან და „ზღვას“, რომელიც შედგენილია მხოლოდ ერთი A არისგან. მეორე მხრივ შესაძლებელია პირიქითაც, შეიძლება სიბრტყეზე აღებული ყოველი რუკა გადავიტანოთ სფეროზე. მტკიცდება, რომ სამართლიანია შემდეგი:

სიბრტყეზე ან სფეროზე აღებული ყოველი რუკა შეიძლება სწორად შეიღებოს არა უმეტეს ხუთი ფერის საშუალებით.

სწორად შეღებვა ნიშნავს, რომ არეები ერთმანეთით არ იფარებიან არც მთლიანად, არც ნაწილობრივ. ამასთან, „მოსაზღვრე“ არეებს უნდა ჰქონდეთ განსხვავებული ფერები. ჩვენ შემოვისაზღვრებით იმ რუკების განხილვით, რომელზედაც ყველა არე წარმოადგენს რკალებით შემოსაზღვრულ მარტივ ჩაკეტილ მრავალკუთხედს. ამასთან, ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ ყოველ წვეროში იკრიბება ზუსტად სამი რკალი. რუკას, რომელიც ამ პირობას აკმაყოფილებს ვუწოდოთ *რეგულარული.*

ყოველი წვერო, რომელშიც სამზე მეტი რკალი იკრიბება, შევცვალოთ პატარა წრეწირით, რომლის შიგა არე მივაკუთვნოთ ერთ-ერთ მიმდებარე არეს. მიიღება ახალი რუკა, რომელშიც „ჯერადი“ წერტილები შეცვლილი იქნება ჩვეულებრივი წერტილებით. ცხადია, ახალი რუკა შეიცავს იმდენივე არეს, რამდენსაც წინა, ამასთან, ის რეგულარულია. თუ მოხერხდა მიღებული რუკის სწორად შეფერვა, მაშინ, შვკუმშავთ რა წრეწირს წერტილში, მივიღებთ თავდაპირველი რუკის მოთხოვნილ შეღებვას. ამრიგად, საკმარისია

დავრწმუნდეთ, რომ სფეროზე მდებარე ყოველი რეგულარული რუკა შეიძლება სწორად შეიღებოს ხუთი ფერით.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ ყოველი რეგულარული რუკა შეიცავს ერთს მაინც ისეთ მრავალკუთხედს, რომლის გვერდების რიცხვიც ექვსზე ნაკლებია.

აღვნიშნოთ Γ სიმბოლოთი რეგულარული რუკის n-კუთხა არეების რიცხვი. მაშინ, თუ Γ არის ყველა არეთა რიცხვი, მიიღებთ ტოლობას:

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \cdots \qquad (6)$$

ყოველ რკალს აქვს ორი ბოლო, ყოველ წერტილში იკრიბება სამი რკალი, ამიტომ, თუ P აღნიშნავს რუკის რკალების რიცხვს, ხოლო B წვეროთა რიცხვს, გვექნება:

$$2P = 3B. \qquad (7)$$

შემდეგ, რადგანაც n რკალით შემოსაზღვრულ არეს n წვერო აქვს და ყოველი წვერო სამ არეს ეკუთვნის, ამიტომ

$$2P = 3B = 2\Gamma_2 + 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + \cdots \quad (8)$$

ეილერი ფორმულით გვაქვს, რომ

$B - P + \Gamma = 2$, ანუ $6B - 6P + 6\Gamma = 12$.

(7) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $6B = 4P$. მაშინ, $6\Gamma - 2P = 12$. ხოლო, (6) და (7) თანაფარდობები გვაძლევენ

$$6(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \cdots) - \\ -(2\Gamma_2 + 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + \cdots) = 12,$$

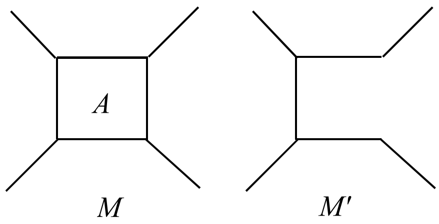
ანუ

$$(6-2)\Gamma_2 + (6-3)\Gamma_3 + (6-4)\Gamma_4 + (6-5)\Gamma_5 + \\ +(6-6)\Gamma_6 + (6-7)\Gamma_7 + \cdots = 12.$$

რადგანაც მარცხენა ჯამის ერთი წევრი მაინც დადებითი უნდა იყოს, ცხადია, შეუძლებელია, რომ $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ და Γ_5 ოთხი რიცხვიდან ყველა ერთდროულად იყოს ნულის ტოლი. ეს კი ზუსტად ის არის, რის ჩვენებაც გვინდოდა.

ახლა უკვე შეგვიძლია გადავიდეთ უშუალოდ თეორემის დამტკიცებაზე. ვთქვათ, M არის სფეროს ნებისმიერი რეგულარული რუკა, რომელიც შეიცავს n არეს. როგორც უკვე ვიცით, არსებობს ერთი მაინც არე, ექვსზე ნაკლები გვერდით. აქ საჭიროა განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

შემთხვევა 1. M შეიცავს A არეს ორი, სამი ან ოთხი გვერდით (იხ. ნახ. 8).

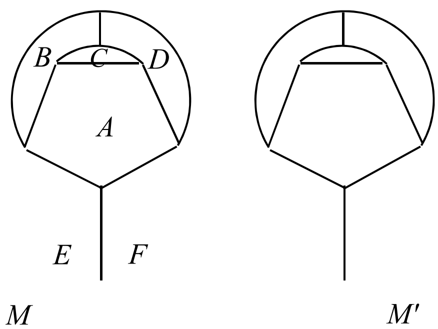


ნახ. 8

ამ შემთხვევაში ამოვშალოთ რკალი, რომელიც A არეს ერთ-ერთი მეზობელი არიდან გამოყოფს.

აქ აუცილებელია გავაკეთოთ ასეთი შენიშვნა. თუ A არეს აქვს ოთხი გვერდი, მაშინ შესაძლოა, რომ ერთ-ერთი მოსაზღვრე არე გახდეს A არის მოსაზღვრე აგრეთვე მოპირდაპირე გვერდიდანაც. ვინაიდან არე, რომელიც ესაზღვრება A ოთხკუთხედს მარჯვნიდან შეიძლება გრძელდებოდეს სფეროს მოპირდაპირე მხარეს ისე, რომ ესაზღვრებოდეს A-ს მარცხნიდანაც. ამ შემთხვევაში, ორი არე, რომლებიც A არეს დანარჩენ ორ გვერდზე ესაზღვრება, განსხვავებულნი არიან და ჩვენ შეგვიძლია ამოვშალოთ ერთ-ერთი ამ ორი გვერდიდან. ახლად მიღებული M' რუკაც რეგულარული იქნება, მაგრამ უკვე შეიცავს $n-1$ არეს. აქედან გამომდინარე, M' რუკა შეიძლება შეიფეროს ხუთი ფერით, მაშინ შეიძლება M რუკის შეფერვაც. მართლაც, A არეს ესაზღვრება სულ დიდი ოთხი არე და ამიტომაც მისთვის მეხუთე ფერი ყოველთვის მოიძებნება.

შემთხვევა 2. M შეიცავს ხუთგვერდიან A არეს.



ნახ. 9

განვიხილოთ A-ს მოსაზღვრე ხუთი არე. აღვნიშნოთ ისინი B, C, D, E და F ასოებით. ამ ხუთ არეს შორის ყოველთვის შეიძლება

მოინახოს ისეთი ორი, რომლებიც ერთმანეთს არ ესაზღვრება. მართლაც, თუ მაგალითად, B და D ურთიერთმოსაზღვრეებია, აქედან გამომდინარეობს, რომ C არ ესაზღვრება არც E-ს და არც F არეს, რადგანაც წინააღმდეგ შემთხვევაში C არედან E და F არეში მიმავალ ყოველ გზას უნდა გაევლო A, B და D არეებიდან ერთ-ერთზე მაინც (მთელი ეს მსჯელობა სამართლიანია სფეროთვის, მაგრამ ტორისთვის ის არ გამოდგება). ამრიგად, შეიძლება დავუშვათ, რომ მაგალითად, C და F ერთმანეთს არ ესაზღვრება. ამოვშალოთ A არის ორი გვერდი, რომლებიც A არეს C და F არეებიდან გამოყოფენ. მივიღებთ აგრეთვე რეგულარულ M' რუკას $n-2$ არით. თუ შესაძლებელია ახალი M' რუკის სწორად შეფერვა ხუთი ფერით, მაშინ შესაძლებელია თავდაპირველი M რუკის შეფერვაც აგრეთვე ხუთი ფერით. მართლაც, ამოშლილი გვერდების აღდგენის შემდეგ A იქნება მოსაზღვრე ხუთი არისთვის, რომლებიც შეფერილნი არიან არაუმეტეს ოთხი ფერით (რადგანაც C და F ერთნაირად შეიძლება შევღებოთ), ამიტომ A არისთვის ყოველთვის რჩება მეხუთე ფერი.

ამრიგად, ყველა შემთხვევაში ყოველ რეგულარულ M რუკას, რომელიც n არეს შეიცავს, შეიძლება შევუსაბამოთ აგრეთვე რეგულარული M' რუკა $n-1$ და $n-2$ არეებით ისეთი, რომ თუ M' სწორად შეიღებება ხუთი ფერით, მაშინ შეიფერება M რუკაც. იგივე მსჯელობა შეიძლება გავიმეოროთ აგრეთვე M' რუკისთვისაც და ა.შ. შედეგად მივიღებთ რუკების მიმდევრობას, რომლის პირველ წევრსაც M რუკა წარმოადგენს: $M, M', M'', \ldots$. ამ მიმდევრობის ყოველი რუკა შეიძლება შეღებილ იქნეს ხუთი ფერით, თუ შესაძლოა ხუთი ფერით შეიღებოს მისი მომდევნოც. რადგან ამ მიმდევრობის რუკებში არეთა რიცხვი კლებულობს, ადრე თუ გვიან მასში მოიძებნება რუკა ხუთი არით (ან უფრო ნაკლებით). ასეთი რუკა ყოველთვის შეიძლება შეიღებოს არა უმეტეს ხუთი ფერით. თუ რუკების მიმდევრობაში ნაბიჯ-ნაბიჯ უკან დავბრუნდებით, დავასკვნით, რომ თვით M რუკაც შეიძლება შეიღებოს ხუთი ფერით. რ.დ.გ.

შევნიშნოთ, რომ ამ მტკიცებას აქვს კონსტრუქციული ხასიათი. ის იძლევა n არისგან შედგენილი M რუკის შეღებვის შეიძლება მომქანცველ, მაგრამ პრაქტიკულად განხორციელებად მეთოდს, სასრული რაოდენობის ოპერაციების შემდეგ.

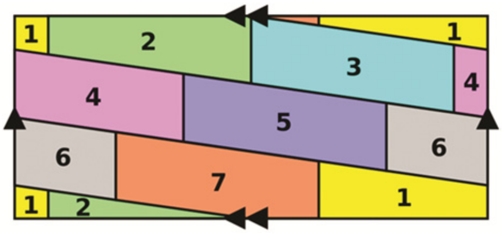
ოთხი ფერის პრობლემასთან დაკავშირებით საჭიროა შევნიშნოთ ის მნიშვნელოვანი გარემოება, რომ ზოგიერთი სხვა უფრო რთული ზედაპირებისთვის, ვიდრე სიბრტყე ან სფეროა, შესაბამისი თეორემები ნამდვილად და უფრო ადრე იყო დამტკიცებული. როგორ პარადოქსულადაც არ უნდა ჩანდეს, განხილულ შემთხვევაში უფრო რთული (გეომეტრიული აზრით) ზედაპირის ანალიზი უფრო მარტივად ტარდება, ვიდრე მარტივი ზედაპირებისა. მაგ., დადგენილია, რომ ტორის ზედაპირის შემთხვევაში, მასზე დახატული რუკა შესაძლებელია შეიღებოს შვიდი ფერით. მეორე მხრივ, მასზე არსებობს შვიდი არისგან შემდგარი ისეთი რუკები, რომელთა ყოველი არე დანარჩენ ექვსს ესაზღვრება. ეს ფაქტებიც ეილერის მახასიათებლის გამოყენებით მტკიცდება.

რუკების შეღებვა ზედაპირებზე

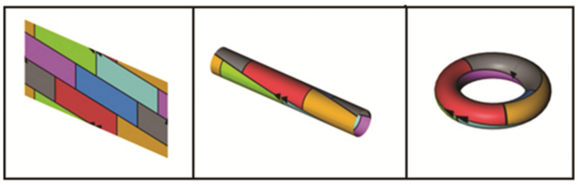
სიბრტყეზე ნებისმიერი რუკის ხუთი ფერით შეღებვის ამოცანა გადაიჭრა XIX საუკუნის ბოლოს ინგლისელი მათემატიკოს ჰივუდის მიერ. მასვე ეკუთვნის იმ ფაქტის მტკიცება, რომ ნებისმიერი რუკა ტორზე შესაძლებელია შეიღებოს შვიდი ფერით. ამასთან მან აჩვენა, რომ უფრო ნაკლები რაოდენობით ამის გაკეთება შეუძლებელია. ანუ არსებობს მაგალითი ისეთი რუკისა, რომელიც შედგება შვიდი არისგან, რომელთაგან ყოველი ორი ერთმანეთის მოსაზღვრეა.

პერსი ჯონ ჰივუდი
Percy John Heawood (1861-1955)

ამდენად, მის შესაღებად აუცილებელია შვიდი ფერი. ნახ.10-ზე მოცემული მართკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების შეწებებით მიიღება ტორი შვიდი არით, რომელთაც აქვთ ისეთი განლაგება, რომ ყველა ერთმანეთს ესაზღვრება.



ნახ. 10



ნახ. 11

თუ რაიმე Q ზედაპირზე ნებისმიერი რუკა შეიძლება შეიღებოს n ფერით და ამასთან ერთად არსებობს რუკა, რომლის შეღებვა ნაკლები რაოდენობის ფერებით შეუძლებელია, მაშინ n-ს ეწოდება Q ზედაპირის ქრომატული რიცხვი და აღინიშნება ასე, $col(Q)$. ზემოთ ნათქვამიდან გამომდინარე, სფეროსა და ტორისთვის შესაბამისად არის $col(P_0)=4$ და $col(P_1)=7$. საზოგადოდ, კლაინის ბოთლისგან განსხვავებული, ნებისმიერი ჩაკეტილი, Q ზედაპირის ქრომატული რიცხვი გამოისახება ჰივუდის ფორმულით

$$col(Q)=\left[\frac{7+\sqrt{49-24\chi(Q)}}{2}\right], \qquad (9)$$

სადაც კვადრატული ფრჩხილები აღნიშნავენ მთელ ნაწილს (კლაინის ბოთლისთვის $col(N_2)=6$).

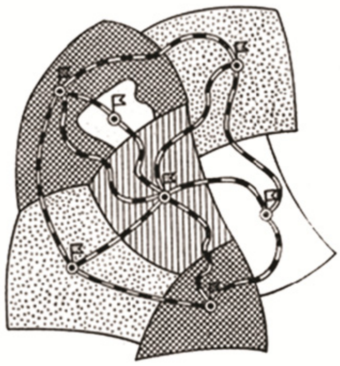
უფრო ზუსტად, ჰივუდს ეკუთვნის

$$col(Q)\le\left[\frac{7+\sqrt{49-24\chi(Q)}}{2}\right] \qquad (10)$$

უტოლობის დამტკიცება, ხოლო (9) ზუსტი ფორმულა მიღებული იყო მოგვიანებით, მათემატიკოსთა რამდენიმე თაობის ძალისხმევით. სირთულე მდგომარეობდა Q ზედაპირზე ისეთი რუკის არსებობის ჩვენებაში, რომლის შეღებვა შეუძლებელია (9) ფორმულით გამოსახულ რიცხვზე ნაკლები რაოდენობის ფერით.

ვაჩვენოთ (10) უტოლობა.

ვთქვათ, Q ზედაპირზე დახაზულია რუკა, რომლის შესაღებად საჭიროა c რაოდენობის ფერი, სადაც $c=col(Q)$. ავირჩიოთ თითოეული „ქვეყნის“ შიგნითწერტილი („დედაქალაქი“). ყოველ ორ მოსაზღვრე ქვეყნის ტერიტორიაზე გავიყვანოთ ერთი „რკინიგზა“, რომელიც შეაერთებს მათ დედაქალაქებს (ნახ.12), ამასთან ისე,



ნახ. 12

რომ სხვადასხვა „რკინიგზის“ ხაზები არ გადაიკვეთონ. ქვეყნების შეღებვის მაგიერ შეგვიძლია დედაქალაქის თავზე „აღვმართოთ“ შესაბამისი ფერის დროშა, ე.ი. თუ ორი დედაქალაქი შეერთებულია „რკინიგზით“, მაშინ ისინი მოსაზღვრეა და მათი დროშები სხვადასხვა ფერისაა. ასე რომ გვაქვს G^* გრაფი, რომლის წვეროებიც უნდა შეიღებოს იმგვარად, რომ ყოველი ორი მოსაზღვრე წვერო (რომლებიც შეერთებულია წიბოთი) იყოს სხვადასხვა ფერის. ცხადია, რომ G^* გრაფის ქრომატული რიცხვი, ანუ უმცირესი რაოდენობა ფერებისა, რომელიც საჭიროა შესაღებად, ტოლია c-სი.

ჩამოვაცალოთ G^* გრაფს მისი რომელიმე a წვერო ყველა მასთან დაკავშირებული წიბოებითურთ. თუ ასეთი გადასვლის დროს მიღებული G' გრაფის ქრომატული რიცხვი არ შემცირდა, მაშინ G^* გრაფის მაგიერ შეიძლება ავიღოთ უფრო მარტივი G' გრაფი. შესაძლებელია, რომ G' გრაფში კიდევ მოხდეს

ასეთი პროცესი და ა.შ. საბოლოოდ ჩვენ მივიღებთ G^{**} გრაფს, რომელიც აღარ მარტივდება და არის G^{*}-ს ქვეგრაფი, ე.ი. G^{**} გრაფის ქრომატული რიცხვია c და ნებისმიერი წვეროს და მისი მიმხები წიბოების გადაგდება იწვევს ქრომატული რიცხვის შემცირებას. G^{**} გრაფის წვეროებისა და წიბოების რაოდენობა შესაბამისად აღვნიშნოთ B და P ასოებით, ხოლო წახნაგების რაოდენობა, რომლებადაც ეს გრაფი ყოფს Q ზედაპირს, იყოს Γ. რადგანაც ზემოთ ჩატარებული ოპერაციებით $B-P+\Gamma$ რიცხვი შეიძლება მხოლოდ შემცირდეს, გვექნება, რომ

$$B-P+\Gamma \geq \chi(Q) \qquad (11)$$

G^{**} გრაფის თითოეულ წვეროსთან დაკავშირებულია არანაკლებ $c-1$ წიბო.

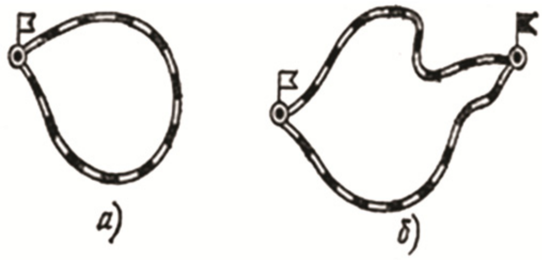
მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ $b \in G^{**}$ წვეროსთან დაკავშირებულია k რაოდენობის წიბო $[bq_1],\ldots,[bq_k]$, სადაც $k<c-1$. გადავაგდებთ რა G^{**} გრაფიდან b წვეროს თავისი წიბოებით, მივიღებთ G'' გრაფს, რომლის ქრომატული რიცხვი ნაკლები იქნება, ვიდრე c. შევღებოთ ეს გრაფი $c-1$ ფერად. რადგანაც $k<c-1$, ამიტომ აღმოჩნდება, რომ იმ $c-1$ ფერიდან, რომელიც საჭირო იყო G'' გრაფისთვის, არ გამოგვიყენებია $q_1,\ldots,q_k$ წვეროების შესაღებად სულ მცირე ერთი ფერი მაინც. შევღებოთ b წვერო ამ გამოუყენებელი ფერით. მივიღებთ, რომ G^{**} შეღებილია $c-1$ ფერად, რაც თავის მხრივ ეწინააღმდეგება G^{**} გრაფის აგების პრინციპს.

ამრიგად, G^{**} გრაფში თითოეულ წვეროსთან დაკავშირებულია არანაკლებ $c-1$ წიბო. აქედან გამომდინარეობს უტოლობა

$$(c-1)B \leq 2p. \qquad (12)$$

გარდა ამისა, G^{**} გრაფის მიერ განსაზღვრულ თითოეულ წახნაგს გააჩნია სამი წიბო მაინც. მართლაც, „ერთკუთხედებისა“ და „ორკუთხედების“ არსებობა დაუშვებელია, რადგან „ერთკუთხედის“ არსებობა ნიშნავს ისეთი „რკინიგზის“ არსებობას, რომელიც დედაქალაქიდან იმავე დედაქალაქში მიდის (იხ. ნახ. 13A).

ანალოგიურად იქნება „ორკუთხედების“ შემთხვევაშიც.



ნახ. 13

ახლა, თუ დავითვლით წიბოებს Γ არეების მიხედვით მივიღებთ, რომ მათი რიცხვია არანაკლებ 3Γ. რადგანაც ასეთ დროს ყოველი წიბო ჩათვლილია ორჯერ, ამიტომ $3\Gamma \leq 2P$ ანუ $\frac{2}{3}P-\Gamma \geq 0$. დავუმატოთ ეს უტოლობა (11) უტოლობას. მივიღებთ, რომ $B-\frac{1}{3}P \geq \chi(Q)$ ან სხვანაირად $2P \leq 6B-6\chi(Q)$. (12)-ის გათვალისწინებით გვექნება, რომ $(c-1)B \leq 6B-6\chi(Q)$, ანუ

$$c-1 \leq 6-\frac{6\chi(Q)}{B}. \qquad (13)$$

ახლა თუ ჩავთვლით, რომ თავიდან მოცემული Q ზედაპირი ჰომეომორფულია სფეროსი: $Q \approx P_0$, მაშინ $\chi(Q)=2$ ანუ დასამტკიცებელი (10) უტოლობა მიიღებს ასეთ სახეს $col(Q) \leq 4$. იგულისხმება, რომ ეს უტოლობა სამართლიანია; ის გამოსახავს ოთხი ფერის პრობლემას.

თუ Q არის ჩაკეტილი ზედაპირი, მაშინ $\chi(Q) \leq 0$ (როგორც გვახსოვს k გვარის ზედაპირებისთვის $\chi(P_k)=2-2k$). რადგანაც $B \geq c$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში G^{**} გრაფი შეიღებებოდა $c-1$ ფერით), ამიტომ $-\frac{6\chi(Q)}{B} \leq -\frac{6\chi(Q)}{c}$. მაშინ (13) ფორმულის თანახმად $c-1 \leq 6-\frac{6\chi(Q)}{c}$, ე.ი. c^2-7c+. $+6\chi(Q) \leq 0$ ეს ნიშნავს, რომ c ეკუთვნის მო-

ნაკვეთს, რომლის ბოლოებიცაა x^2-7x+ $+6\chi(Q)$ კვადრატული სამწევრის ფესვები (ეს ფესვები ნამდვილია, რადგან $\chi(Q)\le 0$). აქედან გამომდინარე, c არ აღემატება ამ ფესვებიდან უდიდესს, ე.ი. $c\le\frac{1}{2}\left(7+\sqrt{49-24\chi(Q)}\right)$.

ამით (10) უტოლობა დამტკიცებულია.

არსებობს ეილერის მახასიათებლის სხვა გამოყენებებიც, რომლებიც სცილდება ჩვენს თემას და ამიტომ აქ მათ არ შევეხებით.

ორიოდე სიტყვით ოთხი ფერის პრობლემის შესახებ

რამდენადაც ცნობილია, ჰიპოთეზა ოთხი ფერის შესახებ პირველად 1852 წლის 23 ოქტომბერს ჩამოაყალიბა სამხრეთაფრიკელმა მათემატიკოსმა და ბოტანიკოსმა ფრენსის გუთრიემ. როდესაც ცდილობდა გაეფერადებინა ინგლისის საგრაფოების რუკა, შეამჩნია, რომ საკმარისი იყო მხოლოდ ოთხი ფერის საღებავი. იმ დროს გუთრიელის ძმა, ფრედერიკი, იყო ავგუსტუს დე მორგანის (ფრენსის ყოფილი კონსულტანტის) სტუდენტი ლონდონის საუნივერსიტეტო კოლეჯში. ფრენსისმა სთხოვა ძმას, რომ დაკავშირებოდა დე მორგანს. დე მორგანმა ეს ფაქტი ასე ამცნო საზოგადოებას:

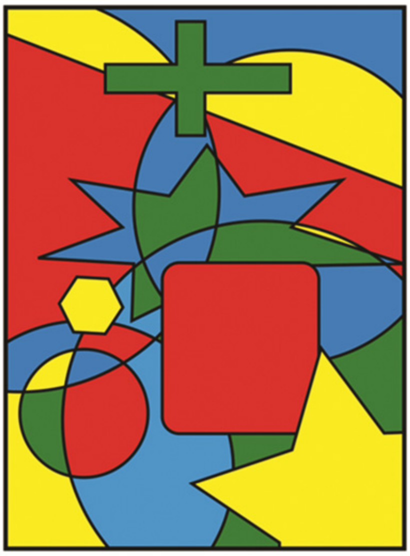
ფრენსის გუთრიე
Francis Guthrie

"A student of mine [Guthrie] asked me to day to give him a reason for a fact which I did not know was a fact –and do not yet. He says that if a figure be any how divided and the compartments differently colored so that figures with any portion of common boundary *line* are differently colored – four colors may be wanted but not more – the following is his case in which four colors *are* wanted. Query cannot a necessity for five or more be invented…" (Wilson 2014, p. 18). (ციტირებულია wikipedia-დან).

ავგუსტ დე მორგანი
Augustus De Morgan (1806–1871)

ამის შემდგომ პრობლემა მრავალი ეკვივალენტური ფორმით იქნა ჩამოყალიბებული. მათ შორის შედარებით მოკლე და მარტივი ფორმა ასე ჟღერს.

თეორემა 3. *სიბრტყის არეებად ნებისმიერი დაყოფისას, როცა ეს არეები ერთმანეთით არ იფარებიან არც მთლიანად და არც ნაწილობრივ, ყოველთვის შეიძლება ისინი შეფერადდნენ ოთხი ფერით იმგვარად, რომ „მოსაზღვრე“ არეებს ჰქონდეთ განსხვავებული ფერები.*



ოთხი ფერით შეღებილი რუკის მაგალითი

დიდი ხნის განმავლობაში ბევრი მათემატიკოსის მრავალგზის მცდელობების მიუხედავად ვერ იქნა მიღებული ვერც ზუსტი დამტკიცება და ვერც კონტრმაგალითის აგება. კონტრმაგალითის აგება ნიშნავს ერთი ისეთი რუკის აგებას, რომლის შესაღებად არ არის ოთხი ფერი საკმარისი და აუცილებელია მეხუთე ფერის გამოყენება. ალბათ საუკეთესო მეთოდი ამ პრობლების გასაგებად და რა სირთულეებს შეიძლება წააწყდეთ ოთხი ფერის პრობლემის მოგვარებისას, არის უბრალოდ ცნობისმოყვარე თამაში რუკების გაფერადებაზე. მაგ., შეეცადეთ ააგოთ კონტრმაგალითი.

ოთხი ფერის პრობლემის დამტკიცება კომპიუტერის გამოყენებით მოხდა 1976 წელს აპელის და ჰაკენის მიერ (ილინოისის უნივერსიტეტი). ამ მტკიცებულების პირველი ნაბიჯი იყო დემონსტრირება იმისა, რომ არსებობს 1936 ცალი რუკისგან შემდგარი კომპლექტი, რომელთაგან არცერთი არ შეიცავს უფრო მცირე ზომის რუკას, რომელიც უარყოფდა თეორემას. ავტორებმა გამოიყენეს სპეციალური პროგრამა, რომლის საშუალებითაც გადამოწმდა ყველა 1936 რუკა. ამ ფაქტის დამტკიცებამ დაიკავა ასობით გვერდი. ამის შემდეგ ავტორები მივიდნენ იმ დასკვნამდე, რომ არ არსებობს კონტრმაგალითი. წინააღმდეგ შემთხვევაში ის უნდა შეიცავდეს იმ 1936 რუკიდან ერთ-ერთს, რაც არ ხდება.

თავიდან ეს დამტკიცება გახდა პოლემიკის საგანი და ბევრმა მათემატიკოსმა არ მიიღო, რადგან მისი შემოწმება ხელით არის შეუძლებელი, ამიტომ ეჭვები დარჩა დიდხანს. ამის შემდგომ 1997 და 2005 წლებში გამოქვეყნდა შედარებით მარტივი დამტკიცებები, თუმცა ისევ კომპიუტერის დახმარებით, რომლებიც იყენებდნენ სპეციალურ პროგრამულ უზრუნველყოფას და ეყრდნობოდნენ ანალოგიურ იდეას.

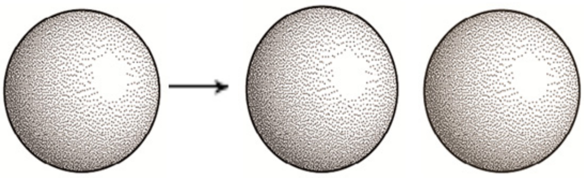
ელფოსტა:
teimuraz.aliashvili@iliauni.edu.ge

ბანახ-ტარსკის პარადოქსი

ანა დანელია

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის ასისტენტ-პროფესორი

სიმრავლეთა თეორიის განვითარებისას თავი იჩინა სხვადასხვა პარადოქსმა. ერთ-ერთი ასეთი პარადოქსის შესახებ გვინდა მოგითხროთ ამ სტატიაში, რომელიც ეკუთვნის 1920-იან წლებში მოღვაწე ორ შესანიშნავ მათემატიკოსს — ბანახსა (1892-1945) და ტარსკის (1901-1983). მათ აღმოაჩინეს, რომ სფერო შეიძლება ისე „დავჭრათ" რამდენიმე ნაწილად, რომ მათგან მივიღოთ ორი ზუსტად ისეთივე სფერო. ფორმალურად, რა თქმა უნდა, საუბარია რაღაც ასახვაზე ერთი სფეროდან იმავე რადიუსის მქონე ორი სფეროს გაერთიანებაზე.



განვმარტოთ, როგორი ასახვები გვაქვს მხედველობაში. დავარქვათ $f{:}X\to Y$ ასახვას დასაშვები, თუ არსებობს X სიმრავლის დაშლა თანაუკვეთ სიმრავლეებად A_1, A_2,… A_n ისეთი, რომ f ასახვის შეზღუდვა თითოეულ A_i -ზე არის იზომეტრია (ანუ მოტრიალება და გადატანა) და ყოველი $i\neq j$ -თვის $f(A_i)$ და $f(A_j)$ სიმრავლეები არ თანაიკვეთებიან. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ X და Y სიმრავლეები ეკვივალენტურია. ამ ფაქტს აღვნიშნავთ ასე: $X\sim Y$. ბანახ-ტარსკის პარადოქსი მდგომარეობს იმაში, რომ არსებობს დასაშვები ასახვა ერთი სფეროსი იმავე რადიუსის მქონე ორ სფეროში. შედეგი იმდენად მოულოდნელი ჩანდა, რომ რაღაც პერიოდი თვლიდნენ, თითქოს ეს პარადოქსი წარმოადგენს უარყოფას ამორჩევის აქსიომისა, რომელიც ამ დამტკიცებაშია გამოყენებული. შემდეგ გააცნობიერეს, რომ დამტკიცებაში აგრეთვე გამოიყენება ვიტალის მაგალითი არაზომადი სიმრავლისა. მოკლედ მიმოვიხილოთ ამ დამტკიცების სქემა.

განსაზღვრება 1. სივრცის A და B სიმრავლეებს ვუწოდოთ კონგრუენტული, თუ A და B შეიძლება ერთმანეთს დავამთხვიოთ მოტრიალებისა და გადატანის კომბინაციით. ამ შემთხვევაში დავწერთ: $A\cong B$.

აღნიშვნა $A\overset{n}{\cong}B$ ნიშნავს, რომ A შეგვიძლია დავშალოთ თანაუკვეთ n სიმრავლედ A_1, A_2,… A_n და ასევე B-ც შეიძლება დაიშალოს თანაუკვეთ n სიმრავლედ $B_1,\ldots,B_n$ ისე, რომ $A_i\cong B_i$, $i=1,2,\ldots,n$. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ A და B არის ტოლად დაშლადი.

დავწერთ, $A\overset{n}{\prec}B$, თუ $A\overset{n}{\cong}B'$, სადაც B' არის B -ს რაიმე ქვესიმრავლე.

ლემა. თუ A და C თანაუკვეთი სიმრავლეებია, ასევე B და D-ც თანაუკვეთებია, ამასთან $A\overset{m}{\cong}B$ და $C\overset{n}{\cong}D$, მაშინ $A\bigcup C\overset{m+n}{\cong}B\bigcup D$.

ამ ლემის დამტკიცება არაა რთული, ამიტომ მას აქ არ მოვიყვანთ.

წინადადება 1.

ვთქვათ, D საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე ერთეულოვანი დისკია ცენტრით კოორდინატთა სათავეში. მაშინ

$D\overset{n+2}{\cong}D\cap$ (n -ცალ $(0,1]$ სეგმენტთან).

დამტკიცება. ვთქვათ, A არის სიმრავლე იმ ერთეულოვანი ნახევრად ჩაკეტილი სეგმენტებისა (ღია ბოლოთი კოორდინატთა სათავეში), რომლებიც OX ღერძთან ადგენენ, შესაბამისად, α, 2α,..., $k\alpha$,... კუთხეებს, სადაც α ირაციონალური რიცხვია (კუთხის დადებით მიმართულებად არჩეულია საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულება. ცხადია, რომ ეს სეგმენტები თანაუკვეთია). B-თი აღვნიშნოთ მისი დამატება D-მდე, ანუ $B=D\setminus A$. მაშინ გვექნება: $A \overset{n+1}{\cong} A\cap$ (n-ცალ $(0,1]$ სეგმენტთან). მართლაც, თუ მოვატრიალებთ A სიმრავლეს, ანუ მის შემადგენელ ყოველ სეგმენტს საათის ისრის მიმართულებით $n\alpha$ კუთხით, მივიღებთ ისევ A სიმრავლეს და დამატებით n-ცალ ერთეულოვან სეგმენტს. ასევე რთული არაა იმის დამტკიცება, რომ, კუთხის ირაციონალურობის გამო, მოტრიალების შედეგად მიღებული სეგმენტები, რომლებიც OX ღერძთან ადგენენ, შესაბამისად, 0, $-\alpha$, -2α,..., $-(n-1)\alpha$ კუთხეებს, არ თანაიკვეთებიან A სიმრავლესთან. გვაქვს $A \overset{n+1}{\cong} A\cap$ (n-ცალ $(0,1]$ სეგმენტთან) და $B \overset{1}{\cong} B$.

ლემის გამო ვღებულობთ:

$A\cap B \overset{n+2}{\cong} A\cap$($n$-ცალ $(0,1]$ სეგმენტთან) $\cap B$, ანუ $D \overset{n+2}{\cong} D\cap$($n$-ცალ $(0,1]$ სეგმენტთან).

წინადადება 2.

ვთქვათ, $S\subset R^3$ ერთეულოვანი სფეროა ცენტრით სათავეში, ხოლო D მისი რაიმე თვლადი ქვესიმრავლეა, ანუ D მასზე მდებარე წერტილთა თვლადი რაოდენობაა, მაშინ $S \overset{2}{\cong} S\setminus D$.

დამტკიცება. ავირჩიოთ ისეთი ღერძი, რომელიც D სიმრავლეზე არ გავა, ანუ სფეროზე ავირჩიოთ ისეთი წერტილი, რომელიც D სიმრავლეს არ ეკუთვნის და გავავლოთ ღერძი ამ წერტილსა და კოორდინატთა სათავეზე. ვთქვათ, α ისეთი კუთხეა, რომ D, αD, $\alpha^2 D$,..., $\alpha^n D$,...სიმრავლეები თანაუკვეთია. აქ $\alpha^n D$ სიმბოლოთი აღინიშნება სიმრავლე, რომელიც მიღებულია არჩეული ღერძის მიმართ D სიმრავლის $n\alpha$ კუთხით მოტრიალებით (ყოველთვის მოტრიალება ხდება ერთი რომელიმე წინასწარ არჩეული მიმართულებით. ასეთი α კუთხის არსებობა ცხადია). ვთქვათ, $A=D\cap\alpha D\cap\alpha^2 D\cap...\cap\alpha^n D\cap...$ და $B=S\setminus A$, მაშინ გვაქვს: $A \overset{1}{\cong} \alpha D\cap\alpha^2 D\cap...\cap\alpha^n D\cap... =\alpha A$ და $B \overset{1}{\cong} B$.

კვლავ ლემის გამოყენებით ვღებულობთ წინადადება 2-ის დამტკიცებას.

ახლა გადავიდეთ ბანახ-ტარსკის თეორემის დამტკიცებაზე.

თეორემა. ვთქვათ, $\overline{S}$ და $\overline{S'}$ თანაუკვეთი ერთეულოვანი ბურთებია, მაშინ $\overline{S} \overset{9}{\cong} \overline{S}\cup\overline{S'}$, ე.ი. ერთეულოვანი ბურთი შეიძლება დავყოთ ცხრა ნაჭრად და შემდეგ ამ ცხრა ნაჭრიდან ავაწყოთ ორი ერთეულოვანი ბურთი.

დამტკიცება. ვთქვათ, S ერთეულოვანი სფეროა, ცენტრით $OXYZ$ კოორდინატთა სათავეში. ვთქვათ, a არის მოტრიალება OZ ღერძის გარშემო 180-გრადუსიანი კუთხით, ხოლო b — 120-გრადუსიანი კუთხით OX ღერძის გარშემო. ცხადია, რომ $a^2=e$, $b^3=e$. აქ e სიმბოლოთი აღნიშნულია იგივური ასახვა, ხოლო a^n და b^n ყოველი ნატურალური n-თვის აღნიშნავს a მოტრიალების (შესაბამისად, b მოტრიალების) ჩატარებას n-ჯერ. განვიხილოთ მოტრიალებათა სიმრავლე (ანუ ჯგუფი) G, რომელიც წარმოქმნილია a და b მოტრიალებებისგან, ანუ G-ს ელემენტებია ყველანაირი შემდეგი ტიპის ელემენტები: $ab^{\varepsilon_1}ab^{\varepsilon_2}...$ და $b^{\varepsilon_1}ab^{\varepsilon_2}a...$, სადაც $\varepsilon_1,\varepsilon_2=1,2$. ვთქვათ, γ არის G-ს e-სგან განსხვავებული ელემენტი. ცხადია, γ არის მოტრიალება რაღაც ღერძის გარშემო. ამ ღერძების თანაკვეთა S-თან აღვნიშნოთ D-თი. ცხადია, D სიმრავლე თვლადია და ყოველი $\gamma\in G$-თვის $\gamma D=D$. ცხადია აგრეთვე, რომ ყოველი x ელემენტისთვის $S\setminus D$ სიმრავლიდან და ყოველი e-სგან განსხვავებული γ ელემენტისთვის G-დან $\gamma x\neq x$.

მოცემული $x\in S\setminus D$ ელემენტისთვის აღვნიშნოთ $S_x=\{\gamma x:\ \gamma\in G\}$ (x ელემენტის ორბიტა). (ცხადია, რომ ყოველი x, $y\in S\setminus D$-თვის ან $S_x=S_y$, ან $S_x\cup S_y=\varnothing$). ამრიგად, G-მ გააჩინა ეკვივალენტობის მიმართება $S\setminus D$-ზე. ამოვარჩიოთ თითო ელემენტი თითოეული ეკვივალენტო-

ბის კლასიდან, ამის საშუალებას გვაძლევს ამორჩევის აქსიომა. მიღებული სიმრავლე აღვნიშნოთ T-თი. მაშინ ცხადია, რომ $S\backslash D$-ს ყოველ ელემენტს აქვს შემდეგი სახე γt , რომელიღაც $\gamma\in G$ და $t\in T$-თვის, ამასთან, $S\backslash D$ -ს ყოველი ელემენტი ცალსახად განსაზღვრავს γ და t -ს.

განვიხილოთ ახლა სიმრავლეები:

$$A=\{\gamma t : t\in T,\ \gamma=e \text{ ან } \gamma=ab^{\varepsilon_1}ab^{\varepsilon_2}\ldots\},$$

$$B=\{\gamma t : t\in T,\ \gamma=b^1ab^{\varepsilon_2}\ldots\},$$

$$C=\{\gamma t : t\in T,\ \gamma=b^2ab^{\varepsilon_2}\ldots\}.$$

ცხადია, რომ $A\cap B\cap C=S\backslash D$, $bA=B$, $bB=C$ და $bC=A$.

მაგრამ $aB\cap aC\subset A$ (ჩართვა მკაცრია, ვინაიდან $T\subset A$ და $(aB\cap aC)\cup T=\varnothing$). ამრიგად, $B\cup C\overset{1}{\prec}A$, $A\overset{1}{\cong}B$, $B\overset{1}{\cong}C$ და $C\overset{1}{\cong}A$.

ვღებულობთ:

$$A\cup(B\cup C)\overset{2}{\prec}B\cup C,\ A\cup(B\cup C)\overset{1}{\prec}A.$$

ანალოგიურად მივიღებთ $A\cup B\cup C\overset{2}{\prec}B$.

ე. ი. გვაქვს $S\backslash D\overset{2}{\prec}A$ და $S\backslash D\overset{2}{\prec}B$. ამრიგად, $S=(S\backslash D)\cup D\overset{2}{\cong}S\backslash D\overset{2}{\prec}A$, სადაც პირველი კონგურენტულობა მართებულია წინადადება 2-ის ძალით. შესაბამისად ვღებულობთ: $S\overset{4}{\prec}A$.

ვთქვათ, ახლა S' არის ერთეულოვანი სფერო განსხვავებული S-გან. ანალოგიურად მივიღებთ $S'\overset{4}{\prec}B$, $S\cap S'\overset{8}{\prec}A\cap B$. ვთქვათ, $\overline{S}$ და $\overline{S}$ არის ერთეულოვანი ბურთები, რომლის ზედაპირებია S და S' , ხოლო $\overline{A}$ და $\overline{B}$ იყოს სიმრავლეები, რომლებიც მიღებულია, შესაბამისად, A და B სიმრავლეების წერტილების შეერთებით S სფეროს O ცენტრთან, ოღონდ ცენტრი არ შედის ამ სიმრავლეებში. გვაქვს: $\overline{S}\backslash\{O\}\bigcup\overline{S'}\backslash\{O'\}\overset{8}{\prec}\overline{A}\bigcup\overline{B}$, სადაც O' არის S' სფეროს ცენტრი.

თუ ავსახავთ ახლა O-ს O-ში და O'-ს $\overline{S}\backslash\overline{A}\bigcup\overline{B}$ სიმრავლის ნებისმიერ წერტილში, მივიღებთ $\overline{S}\bigcup\overline{S'}\overset{9}{\prec}\overline{S}$, მაგრამ $\overline{S}\overset{1}{\prec}\overline{S}\bigcup\overline{S'}$, და ამრიგად, $\overline{S}\overset{9}{\cong}\overline{S}\bigcup\overline{S'}$, ანუ მივიღეთ, რომ ერთეულოვანი ბურთი შეიძლება დავჭრათ ცხრა ნაჭრად და ამ ნაჭრებისგან ავაწყოთ ორი ერთეულოვანი ბურთი.

ამ თეორემის მარტივი შედეგია კიდევ ერთი წარმოუდგენელი ფაქტი: პურის მარცვალი შეგვიძლია დავყოთ სასრულ რაოდენობა ნაწილებად და მიღებული ნაწილებისგან ავაწყოთ მზის ზომის ბურთი.

გეომეტრიის ორი საინტერესო ამოცანის შესახებ

ანა დანელია

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის ასისტენტ-პროფესორი

განვიხილოთ გეომეტრიის ორი საინტერესო ამოცანა: იზოპერიმეტრული ამოცანა და ფერმა-ტორიჩელ-შტეინერის ამოცანა.

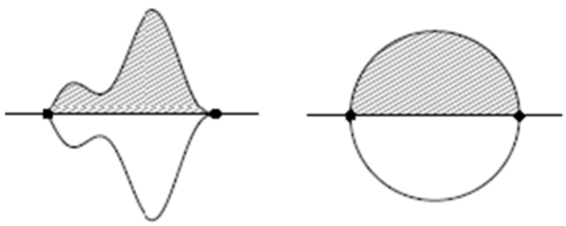
იზოპერიმეტრული ამოცანა

განვიხილოთ კლასიკური იზოპერიმეტრული ამოცანა: იმ წირთა შორის, რომელთაც მოცემული პერიმეტრი აქვთ, ვიპოვოთ ისეთი, რომელიც უდიდესი ფართობის მქონე არეს შემოსაზღვრავს.

ამ ამოცანის ისტორია მართლაც რომ გასაოცარია. მისი ამონახსნი ცნობილი იყო თითქმის 3000 წლის წინ. არავისთვის ეჭვს არ იწვევდა, რომ ეს არე იყო წრე, მაგრამ პასუხის მკაცრი დასაბუთება მოხერხდა მხოლოდ მეცხრამეტე საუკუნეში. ისტორიის თანახმად, ეს ამოცანა სათავეს იღებს მეცხრე საუკუნეში ჩვენს წელთაღრიცხვამდე და ცნობილია როგორც დიდონის ამოცანა. დიდონა, როგორც ძველი რომაელი პოეტი, ვერგილიუსი, თავის ნაწარმოებში აღწერს, იყო ფინიკელთა მეფის ქალწული. იგი გაექცა თავისივე ძმის მიერ მოწყობილ შეთქმულებას და თავი შეაფარა სხვა ტომს, რომლის ბელადსაც სთხოვა, გამოეყო მისთვის მიწის ნაკვეთი მდინარის ნაპირას. ბელადმა შესთავაზა მას, აეღო იმდენი მიწა, რამდენსაც შემოსაზღვრავდა ერთი ხარის ტყავით. დიდონმა დაჭრა წვრილად ხარის ტყავი, შეაწება ნაწილ-ნაწილ და მიიღო გრძელი თოკი. ამრიგად, დიდონი დადგა შემდეგი ამოცანის წინაშე: მდინარის ნაპირიდან (რომელსაც წრფის ფორმა ჰქონდა) მოცემული სიგრძის ტყავის თოკისგან შემოესაზღვრა უდიდესი ფართობის მქონე მიწის ნაკვეთი.

დიდონის ამოცანა იგივეა, რაც იზოპერიმეტრული ამოცანა. მართლაც, ვთქვათ თოკის სიგრძე 1 კმ-ია. თუ ავრეკლავთ საძიებელ არეს მდინარის ნაპირის მიმართ, მივიღებთ 2 კმ-იან ჩაკეტილ წირს. იგი შემოსაზღვრავს უდიდეს ფართობს, როცა მას წრეწირის ფორმა აქვს.

ამრიგად, თოკი უნდა შემოსაზღვრავდეს ნახევარწრეს.

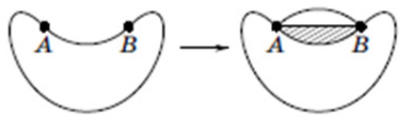


ლეგენდის მიხედვით, უძველეს ქალაქ კართაგენის ციხესიმაგრესაც ნახევარწრის ფორმა ჰქონდა, თუმცა ისტორიისთვის უცნობია, კავშირშია თუ არა ციხესიმაგრის ფორმა დიდონის ამოცანასთან.

ახლა გადავიდეთ წრის იზოპერიმეტრული თვისების დამტკიცებაზე, რომელიც ეკუთვნის იაკობ შტეინერს. განვიხილოთ ფიგურა, რომელსაც მოცემული პერიმეტრის დროს აქვს უდიდესი ფართობი (ვგულისხმობთ, რომ ასეთი ფიგურა არსებობს). დავარქვათ ამ ფი-

გურას F, მისი ფართობი აღვნიშნოთ S-ით, ხოლო პერიმეტრი – l-ით. დავამტკიცოთ, რომ F ფიგურას აქვს შემდეგი სამი თვისება:

1. F ფიგურა ამოზნექილია, რაც ნიშნავს, რომ ნებისმიერი მონაკვეთი, რომელიც აერთებს F-ის ორ წერტილს, მთლიანად დევს F-ში. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში იარსებებდა მონაკვეთი AB ბოლოებით F ფიგურის საზღვარზე, რომელიც მთლიანად დევს ამ ფიგურის გარეთ. თუ ავრეკლავთ იმ რკალს, რომელიც მოთავსებულია A და B წერტილებს შორის, სიმეტრიულად AB წრფის მიმართ, მივიღებთ ახალ ფიგურას იმავე l პერიმეტრით და უფრო დიდი ფართობით. ამრიგად დავამტკიცეთ, რომ F ამოზნექილია.

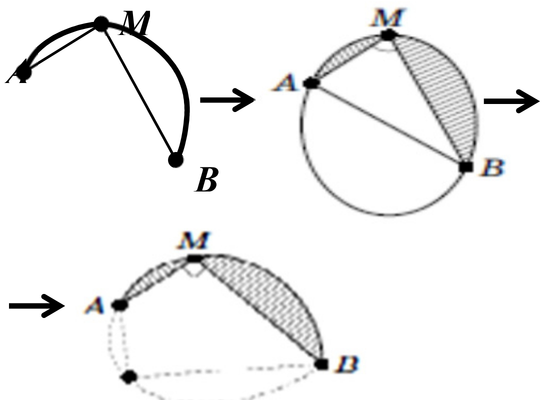


ამოზნექილი ფიგურის დიამეტრი ვუწოდოთ ნებისმიერ მონაკვეთს, რომელიც მის პერიმეტრს შუაზე ყოფს.

2. F ფიგურის ნებისმიერი დიამეტრი შუაზე ყოფს მის ფართობსაც. მართლაც, დავუშვათ, რომ არსებობს დიამეტრი AB, რომელიც ყოფს F-ს ორი არატოლი ფართის მქონე ფიგურად.

განვიხილოთ მხოლოდ ის ნაწილი, რომლის ფართობი $S/2$-ზე მეტია და ავრეკლოთ ის სარკულად AB-ს მიმართ. ცხადია, მივიღებთ სიმეტრიულ ფიგურას, რომლის პერიმეტრი კვლავ l-ია, ხოლო ფართობი კი S-ზე მეტი.

3. F ფიგურის საზღვრის ნებისმიერი წერტილიდან მისი დიამეტრი ჩანს მართი კუთხით. ეს ნიშნავს, რომ, თუ AB დიამეტრია, M – ნებისმიერი წერტილი ფიგურის საზღვარზე, მაშინ კუთხე $\angle AMB = 90^0$. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, არსებობს M წერტილი F ფიგურის საზღვარზე ისეთი, რომ $\angle AMB \neq 90^0$. დიამეტრი ფიგურას ყოფს ორ ნაწილად. განვიხილოთ მხოლოდ ის ნაწილი, რომელიც შეიცავს M წერტილს. თვისება 2-ის თანახმად, მისი ფართობი $S/2$-ია. ის შედგება სამი ნაწილისაგან: AMB სამკუთხედისგან და ორი სეგმენტისგან, რომლებიც, შესაბამისად, AM და MB გვერდებს ეყრდნობა. ახლა გავშალოთ (ან შევკუმშოთ) $\angle AMB$ მართ კუთხემდე, ამასთან, ამ მოძრაობისას უცვლელი დავტოვოთ მოცემული სეგმენტები. მიღებული ΔAMB -ის ფართობი გაიზრდება, ვინაიდან ის გახდება $1/2 AM \cdot MB$, ხოლო თავდაპირველად იყო $1/2 AM \cdot MB \cdot \sin \angle AMB$. ამრიგად, მივიღეთ ფიგურა, რომლის ფართობი მეტია $S/2$-ზე. ახლა თუ მიღებულ ფიგურას ავსახავთ სიმეტრიულად AB წრფის მიმართ, მივიღებთ l პერიმეტრის მქონე ფიგურას S-ზე მეტი ფართობით, რასაც მივყავართ წინააღმდეგობამდე.



მე-3 თვისებიდან კი უკვე გამომდინარეობს, რომ F წრეა, ვინაიდან წრეწირი დიამეტრით AB არის გეომეტრიული ადგილი წერტილებისა, რომლიდანაც AB ჩანს მართი კუთხით.

ფერმა-ტორიჩელ-შტეინერის ამოცანა

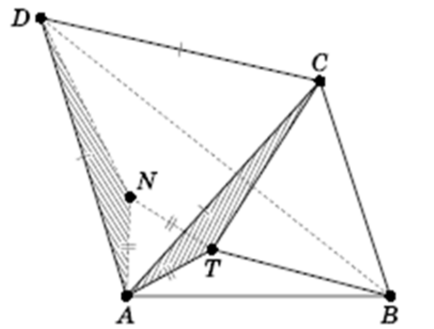
ამ ამოცანის ისტორია ითვლის სამ საუკუნეზე მეტს. ის მოხსენიებული იყო 1659 წელს, იტალიელი ფიზიკოსისა და მექანიკოს ვივიანის წიგნში „მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობების შესახებ“. ვინჩენცო ვივიანი (1622-1703) იყო გალილეო გალილეის მოსწავლე. ჩვენთვის იგი ცნობილია, როგორც ვერცხლისწყლიანი ბარომეტრის გამომგონებელი (ხელსაწყოსი, რომელიც ატმოსფერულ წნევას ზომავს), ხოლო იმდროინდელი საზოგადოებისთვის, როგორც კონუსური კვეთების თეორიის, ისე ექსტრემალური ამოცანების ამოხსნის საუკეთესო სპეციალისტიც. ვივიანის წიგნში ერთ-ერთი ამოცანა მაქსიმუმზე და მინიმუმზე არის შემდეგი:

სიბრტყეზე მოცემულია სამი — A , B და C წერტილი, რომლებიც ერთ წრფეზე არ მდებარეობენ. ვიპოვოთ ამავე სიბრტყეზე ისეთი T წერტილი, რომ ამ წერტილიდან მოცემულ

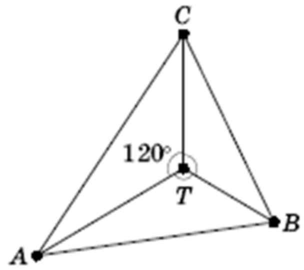
სამ წერტილამდე მანძილთა ჯამი იყოს მინიმალური.

ვივიანის ამ წიგნამდე ამ ამოცანამ დააინტერესა იტალიელი მათემატიკოსი ბენავენტურა კავალიერი (1598-1647), ავტორი პრინციპისა „კავალერიის პრინციპი", რომელიც გამოიყენება ფიგურის ფართობისა და მოცულობის გამოსათვლელად. ასევე ამ ამოცანას იხილავდა გამოჩენილი ფიზიკოსი და მათემატიკოსი ევანჯელისტა ტორიჩელი (1608-1647). ამბობენ, რომ სწორედ ტორიჩელიმ პირველმა მიიღო ამ ამოცანის ამოხსნა ფიზიკური მოსაზრებებიდან გამომდინარე. ტორიჩელიც ასევე გალილეის მოსწავლე იყო, რომელიც დაბრმავებულ მეცნიერს, სიცოცხლის ბოლო წლებში, ეხმარებოდა წიგნის „საუბრები მექანიკაზე" დაწერაში. სხვა წყაროების ცნობით, ტორიჩელისგან დამოუკიდებლად, ეს ამოცანა ამოხსნა უდიდესმა ფრანგმა მათემატიკოსმა პიერ ფერმამ (1601-1665). პირველი წმინდა გეომეტრიული ამოხსნა კი ალბათ ეკუთვნის შვეიცარიელ გეომეტრს იაკობ შტეინერს (1796-1863), რომელზეც დაწვრილებით შემდეგ ვისაუბრებთ.

ამოხსნა: ამოხსნის იდეა ემყარება „მონაკვეთთა ერთ წრფეზე განლაგების პრინციპს". აქ განვიხილავთ მოტრიალებას. კერძოდ, მოვატრიალოთ სიბრტყე 60-გრადუსიანი კუთხით A წერტილის გარშემო. ამ გარდაქმნით C წერტილი გადავა რაღაც D წერტილში, ხოლო T — წერტილში N. სამკუთხედი AND ტოლია ATC სამკუთხედის, ვინაიდან გადადის მასში 60-გრადუსიანი კუთხით მობრუნებისას. ამრიგად, $TC = ND$. სამკუთხედი ANT ტოლგვერდაა, ვინაიდან $AT=AN$ და კუთხე $TAN=60$.



ამიტომ $TA=TN$ და ჯამი $AT+BT+CT$ უდრის $BTND$ ტეხილის სიგრძეს და ცხადია, არანაკლებია ვიდრე BD მონაკვეთის სიგრძე.



ტოლობა მიიღწევა იმ შემთხვევაში, როცა B, T, N და D მოცემული თანმიმდევრობით ერთ წრფეზე განლაგდებიან. ეს მოხდება იმ შემთხვევაში, როცა BTA და ATN კუთხების ჯამი 180 გრადუსია, რაც ნიშნავს, რომ კუთხე $BTA=120$. ასევე AND და ANT კუთხეების ჯამი 180 გრადუსია და კუთხე $ATC=120$. მივიღეთ, რომ TA, TB და TC სხივები ერთმანეთისადმი ადგენენ 120-გრადუსიან კუთხეებს.

T წერტილს, რომლიდანაც სამკუთხედის ყველა გვერდი ჩანს 120-გრადუსიანი კუთხით, ხან უწოდებენ ფერმას წერტილს, ხან ტორიჩელის წერტილს და ხანაც შტეინერის წერტილს. ეს წერტილი სამკუთხედის კიდევ ერთი შესანიშნავი წერტილია სიმძიმის ცენტრსა (მედიანების გადაკვეთის წერტილი), ორთოცენტრსა (სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილი) და ჩახაზული და შემოხაზული სამკუთხედების ცენტრებთან ერთად. მაგრამ ამ წერტილებისგან განსხვავებით, ტორიჩელის წერტილი ნებისმიერი სამკუთხედისთვის არ არსებობს. თუმცა ჩვენ უკვე ვაჩვენეთ, რომ სამკუთხედს აქვს ტორიჩელის წერტილი, მაშინ ის ერთადერთი წერტილია, რომლისთვისაც სამკუთხედის წვეროებამდე მანძილთა ჯამი მინიმალურია.

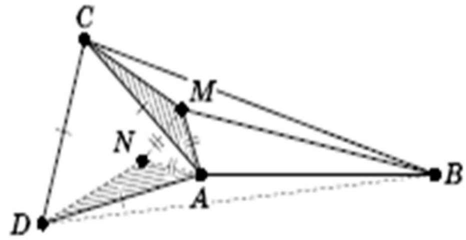
და მაინც, როდის არსებობს ტორიჩელის წერტილი?

ვთქვათ, ABC სამკუთხედის A წვეროსთან მდებარე კუთხე უდიდესია. სამკუთხედის AC და BC გვერდებზე სამკუთხედის შიგნით ავაგოთ 120-გრადუსიანი რკალები. ისინი იკვეთებიან A წერტილში. თუ A წვეროსთან მდებარე კუთხე ნაკლებია 120 გრადუსზე, მაშინ ამ რკალებს აქვთ მეორე გადაკვეთის წერტილიც, რომელიც აღვნიშნოთ T-თი. ის არის ტორიჩელის წერტილი. მართლაც, რადგან ATC და ATB კუთხეები აგების თანახმად 120-გრადუსია, ამიტომ BTC კუთხეც უდრის 120 გრადუსს. და, პირიქით თუ ტორიჩელის წერტილი არსებობს, მაშინ ის იგება ზუსტად ასევე,

რადგან ის სამკუთხედის გვერდებზე აგებული 120-გრადუსიანი რკალების გადაკვეთის წერტილია. ამრიგად, სამკუთხედს აქვს ტორიჩელის წერტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა თითოეული კუთხე ნაკლებია 120 გრადუსზე.

ისმის კითხვა: თუ სამკუთხედის ერთ-ერთი კუთხე მეტია ან ტოლი 120 გრადუსის (ვთქვათ, A კუთხე), მაშინ რომელი წერტილისთვის იქნება ამ წერტილიდან სამკუთხედის წვეროებამდე მანძილთა ჯამი მინიმალური?

პასუხი: ეს წერტილია სამკუთხედის ის წვერო, რომელთანაც მდებარე კუთხე მეტია 120 გრადუსზე. დავამტკიცოთ ეს წინადადება. ვთქვათ, A კუთხე მეტია 120 გრადუსზე, ხოლო M სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია. თუ M წერტილი A კუთხის გარეთაა, მაშინ MAC და MAB კუთხეებს შორის ერთ-ერთი ბლაგვია. ვთქვათ, ეს კუთხეა MAC, ე.ი., $MC > AC$, მეორე მხრივ, სამკუთხედის უტოლობის ძალით, $MA+MB > AB$, ამიტომ $MA+MB+MC>AB+AC$. თუ M წერტილი A კუთხის შიგნითაა, მაშინ სიბრტყე მოვატრიალოთ 60-გრადუსიანი კუთხით.



მივიღებთ, რომ BAD სამკუთხედი $BMND$ ოთხკუთხედის შიგნით მდებარეობს. ამიტომ სამკუთხედის პერიმეტრი ნაკლებია ოთხკუთხედის პერიმეტრზე. ამგვარად,

$$AB+AC=AB+AD<BM+MN+ND=BM+AM+CM.$$

ტორიჩელ-ფერმა-შტეინერის თეორემა. თუ სამკუთხედის ყველა კუთხე ნაკლებია 120 გრადუსზე, მაშინ წერტილი, რომლისთვისაც სამკუთხედის წვეროებამდე მანძილთა ჯამი მინიმალურია, ტორიჩელის წერტილია, ხოლო თუ ერთ-ერთი კუთხე მეტია ან ტოლია 120 გრადუსის, მაშინ ეს წერტილია ამ კუთხის წვერო.

გარდაქმნათა ჯგუფების შესახებ

მიხეილ ამაღლობელი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი; ფ.მ. დოსტოევსკის სახელობის ომსკის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საპატიო დოქტორი.

თეონა ნადირაძე

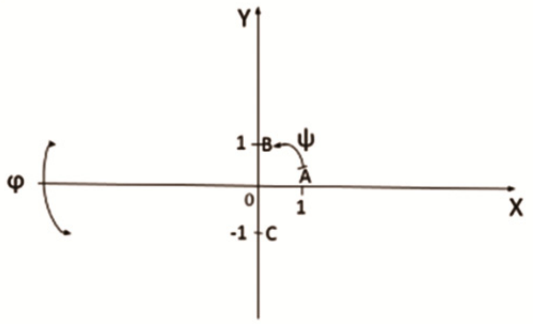
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მაგისტრანტი.

ჯგუფის ცნება ერთ-ერთი ძირითადი ზოგადმათემატიკური ცნებაა. კომუტაციურ ჯგუფს ხშირად ეწოდება აბელური ჯგუფი. კერძოდ, აბელური ჯგუფია ნებისმიერი რგოლის ადიციური ჯგუფი, ნებისმიერი ველის მულტიპლიკაციური ჯგუფი და ნებისმიერი ვექტორული სივრცის ადიციური ჯგუფი. არააბელურ ჯგუფთა უმნიშვნელოვანესი მაგალითები ჩნდება გარდაქმნათა ჯგუფების სახით.

კარგადაა ცნობილი, რომ X სიმრავლის ყველა ბიექციურ გარდაქმნათა $S(X)$ ჯგუფი და, განსაკუთრებით, მისი სხვადასხვა ქვეჯგუფი სასტარტო მოედანია, საიდანაც იწყება ჯგუფთა თეორიის ყოველგვარი გამოყენება. საკმარისია ვახსენოთ ფ. კლაინის (1872 წ.) „ერლანგენის პროგრამა", რომელსაც სხვადასხვა ტიპის გეომეტრიის კლასიფიკაციისთვის საფუძვლად უდევს გარდაქმნათა ჯგუფის ცნება (უფრო დაწვრილებით ამის შესახებ იხ.[2]).

სტატია ეძღვნება გარდაქმნათა ჯგუფების რამდენიმე მნიშვნელოვან გამოყენებას. გადმოცემას თან ახლავს კონკრეტული მაგალითები და ამოცანები, რომლებიც ნათლად ხსნის შემოტანილი მნიშვნელოვანი ცნებების რეალურ შინაარსს.

X სიმრავლის ყოველგვარ ასახვას თავის თავში ეწოდება ამ სიმრავლის ***გარდაქმნა***. რადგან ორი – $\varphi\colon X\to X$ და $\psi\colon X\to X$ გარდაქმნის $\varphi\cdot\psi$ კომპოზიცია კვლავ X სიმრავლის გარდაქმნაა, ამიტომ ასახვა, რომელიც გარდაქმნათა ნებისმიერ დალაგებულ წყვილს უთანადებს მათ კომპოზიციას, X სიმრავლის ყველა გარდაქმნათა $L(X)$ სიმრავლეზე შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ბუნებრივი ბინარული ალგებრული ოპერაცია. ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს ოპერაცია შეიძლება აღმოჩნდეს არაკომუტაციური ($\varphi\cdot\psi\neq\psi\cdot\varphi$). მაგალითად, განვიხილოთ $\mathbb{R}^2$ საკოორდინატო სიბრტყის შემდეგი გარდაქმნები. ვთქვათ, φ ღერძული სიმეტრიაა აბსცისათა ღერძის მიმართ, ხოლო ψ – მობრუნება $\frac{\pi}{2}$ კუთხეზე კოორდინატთა სათავის მიმართ. ნებისმიერი რიგით აღებული მოცემული ორი გარდაქმნის კომპოზიცია კვლავ სიბრტყის გარდაქმნაა, მაგრამ შედეგი დამოკიდებულია გარდაქმნათა შესრულების რიგზე (თუ $\varphi\colon X\to Y$ ნებისმიერი ასახვაა, მაშინ x ელემენტის ანასახს $y=x\varphi$-ით აღვნიშნავთ).



მართლაც, A = (1;0) წერტილის ანასახი φψ გარდაქმნის შედეგად B = (0;1) წერტილია: A(φψ) = (Aφ)ψ = Aψ = B. მეორე მხრივ, A = (1;0) წერტილის ანასახი ψφ გარდაქმნის მოქმედებით C = (0;-1) წერტილია: A(ψφ) = (Aψ)φ = Bφ = C. ამგვარად, გარდაქმნები φ · ψ და ψ · φ განსხვავებულია.

განსაზღვრება 1. X სიმრავლის ***გარდაქმნათა ჯგუფი*** ეწოდება მის ნებისმიერ ბიექციურ გარდაქმნათა ისეთ G ერთობლიობას, რომელიც შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებს:

1) თუ $\varphi, \psi \epsilon$ G, მაშინ $\varphi\psi \epsilon$ G;

2) $id_X \epsilon$ G;

3) თუ $\varphi \epsilon$ G, მაშინ $\varphi^{-1} \epsilon$ G.

(აქ φψ აღნიშნავს φ და ψ გარდაქმნათა ნამრავლს (კომპოზიციას), ხოლო id_X – იგივურ გარდაქმნას).

მაგალითი 1. ყველა ბიექციურ გარდაქმნათა S(X) სიმრავლე ჯგუფია (ამ ოპერაციის ასოციაციურობა ცნობილია, ერთეულოვანი ელემენტია იგივური გარდაქმნა, ხოლო შებრუნებული ელემენტია შებრუნებული გარდაქმნა). როცა X სიმრავლე უსასრულოა, S(X) ჯგუფი მეტისმეტად დიდია, რომ იყოს საინტერესო. თუ X სიმრავლე სასრულია, მაშინ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $X = \{1,2,\dots,n\}$; ამ შემთხვევაში S(X) ჯგუფს ეწოდება ***ჩასმათა ჯგუფი*** ან n-ური ხარისხის ***სიმეტრიული ჯგუფი*** და S_n-ით აღინიშნება.

მაგალითი 2. ევკლიდური E^2 სიბრტყის (ევკლიდური E^3 სივრცის) მოძრაობები ქმნის გარდაქმნათა ჯგუფს, რომელიც აღინიშნება Isom E^2-ით (შესაბამისად, Isom E^3-ით). ეს თვისება აქსიომაა ევკლიდური გეომეტრიის აქსიომატიკის იმ ვერსიაში, რომელშიც მოძრაობაა ერთ-ერთი განუსაზღვრელი ცნება. მეორე ვერსიაში, რომელიც საფუძვლად იღებს ორ წერტილს შორის მანძილს, მოძრაობა განისაზღვრება, როგორც მანძილების შემნახველი გარდაქმნა, ხოლო ზემოთ ჩამოყალიბებული თვისება მარტივი თეორემაა.

მაგალითი 3. წრფივ ასახვათა თვისებების გამო (იხ. [1]), V ვექტორული სივრცის ბიექციური წრფივი გარდაქმნები ქმნის (V სიმრავლის) გარდაქმნათა ჯგუფს. მას ეწოდება V სივრცის ***სრული წრფივი ჯგუფი*** და *GL(V)-თი* აღინიშნება.

მაგალითი 4. ვექტორული V სივრცის ***პარალელური გადატანა*** $a\epsilon$V ვექტორით ვუწოდოთ გარდაქმნას t_a: V→ V, t_a:$x \mapsto x + a$. ადვილი საჩვენებელია, რომ:

$$t_a t_b = t_{a+b},\ id_V = t_0\ ,\ t_a^{-1} = t_{-a}. \qquad (1)$$

(1) გვიჩვენებს, რომ V სივრცის ყველა პარალელურ გადატანათა Tran(V) ერთობლიობა მისი გარდაქმნათა ჯგუფია.

გარდაქმნათა ჯგუფებში გამრავლების ოპერაციის თვისებების ანალიზის საფუძველზე მივდივართ ჯგუფის ზოგად ცნებამდე, რომელიც აბელური ჯგუფის ცნებისაგან კომუტაციურობის მოთხოვნის არქონით განსხვავდება.

განსაზღვრება 2. არაცარიელ G=(G, $*$) სიმრავლეს $*: \mathrm{G} \times \mathrm{G} \rightarrow \mathrm{G}$, $(a, b) \mapsto a * b$ ბინარული ოპერაციით ეწოდება ჯგუფი, თუ:

1) $(a * b) * c = a * (b * c)$ ყველა $a, b, c \in \mathrm{G}$ (***ასოციაციურობა***);
2) *არსებობს* ისეთი ელემენტი $n \in \mathrm{G}$ (***ნეიტრალური***), რომ $a * n = n * a = a$, ყველა $a \in \mathrm{G}$;
3) ყოველი $a \in \mathrm{G}$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი ელემენტი $x \in \mathrm{G}$ (***სიმეტრიული***), რომ $a * x = x * a = n$.

ჯგუფს ეწოდება ***აბელური*** ან ***კომუტაციური***, თუ $a * b = b * a$, ყველა $a, b \in \mathrm{G}$.

შენიშვნა 1. ჯგუფთა თეორიაში ბინარულ ოპერაციას ხშირად გამრავლებას უწოდებენ და წერტილით აღნიშნავენ (რომელიც თითქმის ყოველთვის გამოტოვებულია). შედარებით იშვიათად იყენებენ + ნიშანს. ოპერაციის წერტილით ჩაწერას უწოდებენ მის ***მულტიპლიკაციურ*** ჩაწერას, ხოლო ჩაწერას პლუსით – ***ადიციურ*** ჩაწერას. ნეიტრალურ ელემენტს მულტიპლიკაციური ჩაწერისას უწოდებენ ***ერთეულოვან*** ელემენტს და წერენ $n = e$ ან n=1, ხოლო სიმეტრიულ x ელემენტს უწოდებენ ***შებრუნებულ*** ელემენტს და $x = a^{-1}$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ. აბელურ ჯგუფებში უფრო ხშირად გამოიყენება ადიციური ჩაწერა. ასეთ შემთხვევაში $n = e$-ს ნაცვლად წერენ n=0, ხოლო $x = a^{-1}$-ის ნაცვლად წერენ $x = -a$.

ყველაზე სწორ და ყველაზე რადიკალურ მიდგომას, განვასხვაოთ (ან,პირიქით, გავაიგივოთ) G და H ჯგუფები, გვთავაზობს იზომორფიზმის ცნება.

განსაზღვრება 3. ორი ჯგუფი ***იზომორფულია*** (G, $\cdot$)≅(H,$*$), თუ არსებობს ბიექცია φ: G → H ისეთი, რომ ნებისმიერი $a, b \in$ G-თვის სრულდება $(a \cdot b)\varphi = (a\varphi) * (b\varphi)$.

ჯგუფის თავის თავზე იზომორფულ φ: (G, $*$)→(G, $*$) ასახვას ეწოდება მისი ***ავტომორფიზმი.***

მაგალითი 5. ყველა n-ური რიგის შებრუნებად მატრიცთა $\mathrm{G}L_n(K)$={A∈ $M_n(K)$, |A|≠ 0} სიმრავლე K ველზე მატრიცთა ჩვეულებრივი გამრავლების მიმართ ჯგუფია. როცა n≥2 ჯგუფი $\mathrm{G}L_n(K)$ არააბელურია, რადგან არსებობს ბიექციური ასახვა n-ური რიგის კვადრატულ მატრიცებს და არითმეტიკული ვექტორული K^n სივრცის წრფივ გარდაქმნებს შორის (იხ. [1]), ამასთან, შებრუნებად მატრიცებს ეთანადება შებრუნებადი გარდაქმნები, ხოლო მატრიცთა ნამრავლს შეესაბამება წრფივ გარდაქმნათა ნამრავლი, $\mathrm{G}L_n(K)$ ჯგუფი $\mathrm{G}L(K^n)$ ჯგუფის იზომორფულია (და, მით უფრო $\mathrm{G}L(V^n)$-ის იზომორფულია, სადაც V^n ნებისმიერი n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცეა K ველზე).

განსაზღვრება 4. (G, $\cdot$) ჯგუფის ყოველგვარ არაცარიელ H ⊆ G ქვესიმრავლეს ეწოდება ***ქვეჯგუფი***, თუ ის ჩაკეტილია გამრავლებისა და შებრუნების მიმართ, ე.ი.:

1) თუ $a, b \in$H , მაშინ $ab \in$H;
2) თუ $a \in$H, მაშინ $a^{-1} \in$H.

თუ H G-ს ქვეჯგუფია, წერენ H≤G. თუ H≤G და H≠G, მაშინ წერენ H<G (არ აგერიოთ სიმრავლეთა ჩართვის ⊆, ⊂ ნიშნებთან!). ცხადია, რომ ჯგუფის ყოველი ქვეჯგუფი თვითონაა ჯგუფი იმავე ოპერაციის მიმართ. განსაზღვრებები 1-ისა და 4-ის შედარებისას ჩვენ ვხედავთ, რომ X სიმრავლის გარდაქმნათა ნებისმიერი ჯგუფი ყველა გარდაქმნათა S(X) ჯგუფის ქვეჯგუფია.

მაგალითი 6. ვთქვათ, f რომელიღაც n -უცნობიანი პოლინომია. მაშინ:

Sym f= $\{a \in S_n | f(x_{1a}, x_{2a}, \dots, x_{na}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ ქვეჯგუფია S_n-ში. მართლაც, ვთქვათ $a, b \in$ Sym$f$. თუ $x_{1a} = y_1, x_{2a} = y_2, \dots x_{na} = y_n$, მაშინ $f(x_{1(ab)}, x_{2(ab)}, \dots, x_{n(ab)}) =$
$=f(y_{1b}, y_{2b}, \dots y_{nb}) = f(y_1 . y_2, \dots y_n) = f(x_{1a}, x_{2a}, \dots, x_{na}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

შემდეგ, თუ $a \in$ Sym f და $x_{1a^{-1}} = y_1, x_{2a^{-1}} = y_2, \dots x_{na^{-1}} = y_n$, მაშინ $f(x_1, x_2, \dots, x_n) =$
$=f(x_{1(a^{-1}a)}, x_{2(a^{-1}a)}, \dots, x_{n(a^{-1}a)}) = f(y_{1a}, y_{2a}, \dots, y_{na}) = f(y_1, y_2, \dots, y_n) = f(x_{1a^{-1}}, x_{2a^{-1}}, \dots, x_{na^{-1}})$.

სიმეტრიული პოლინომის განსაზღვრება ნიშნავს, რომ Sym$f$ $=S_n$. ნაკლებად მდიდარ, მაგრამ არატრივიალური სიმეტრიის მქონე პოლინომის მაგალითად განვიხილოთ 4-უცნობიანი $f = x_1x_2 + x_3x_4$. ადვილი დასანახია, რომ Sym f შედგება 8 ჩასმისაგან, რომლებიც ინარჩუნებენ $\{1,2,3,4\}$ სიმრავლის დაყოფას ორ – $\{1,2\}$ და $\{3,4\}$ ქვესიმრავლედ. დასაშვებია ამ ქვესიმრავლეთა გადანაცვლება და თითოეულ მათგანში ელემენტთა გადანაცვლება.

მაგალითი 7. ანალოგიურად, K^n სივრცის წრფივი გარდაქმნები, რომლებიც ინახავს n უცნობის რომელიღაც მოცემულ პოლინომს, ქმნის K ველზე n-ური რიგის მატრიცთა $GL_n(K)$ ჯგუფის ქვეჯგუფს. ვექტორული R^n სივრცის წრფივ გარდაქმნებს, რომლებიც ინახავს $x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots x_n{}^2$ პოლინომს, ეწოდება ***ორთოგონალური გარდაქმნები;*** ისინი ქმნის ქვეჯგუფს $GL_n(R)$-ში, რომელსაც ეწოდება ***ორთოგონალური ჯგუფი*** და $O_n(R)$-ით აღინიშნება.

მაგალითი 8. ვაჩვენოთ, რომ ევკლიდური E^2 სიბრტყის მოძრაობები, რომლებიც ადგილზე ტოვებს O კოორდინატთა სათავეს, ქმნის IsomE^2 ჯგუფის ქვეჯგუფს. აღვნიშნოთ ის H-ით. რადგან ვექტორთა ჯამი და მათი რიცხვზე ნამრავლი განისაზღვრება ინვარიანტულ გეომეტრიულ ტერმინებში, ამიტომ ყოველგვარი მოძრაობა, რომელიც O-ს ტოვებს ადგილზე, წრფივი გარდაქმნაა. უფრო მეტიც, რადგან ის ვექტორთა სიგრძეებს ინახავს, ამიტომ ის ორთოგონალური გარდაქმნაა. პირიქით, რადგან A და B წერტილებს შორის |AB|მანძილი $\overrightarrow{OA}$-$\overrightarrow{OB}$ ვექტორის სიგრძეა, გვექნება, რომ ყოველგვარი ორთოგონალური გარდაქმნა ინახავს წერტილებს შორის მანძილებს და, მაშასადამე, მოძრაობაა. ამგვარად, H=O_2. ანალოგიურად, ევკლიდური E^3 სივრცის მოძრაობათა ჯგუფი, რომელიც უძრავად ტოვებს კოორდინატთა სათავეს, O_3-ს ემთხვევა.

მაგალითი 9. ვთქვათ, F რაიმე ფიგურაა ევკლიდურ სიბრტყეზე, მაშინ:

Sym F = $\{\varphi \in \text{Isom}E^2 \mid F\varphi = F\}$ ქვეჯგუფია IsomE^2-ში. მას ეწოდება F ფიგურის ***სიმეტრიის ჯგუფი.*** წრეწირის O ცენტრით კოორდინატთა სათავეში სიმეტრიის ჯგუფია O_2. წესიერი n-კუთხედის ცენტრით O წერტილში სიმეტრიის ჯგუფი O_2 ჯგუფის ქვეჯგუფია. ის შედგება $\frac{2\pi}{n}$-ის ჯერადი კუთხეების O წერტილის გარშემო ბრუნვებისაგან და იმ წრფეების მიმართ არეკვლებისაგან, რომლებიც გადის O წერტილზე და ერთ-ერთ წვეროზე ან ერთ-ერთი გვერდის შუა წერტილზე. ამგვარად, ეს ჯგუფი შეიცავს $2n$ ელემენტს (n ბრუნვა და n არეკვლა); მას ეწოდება ***დიედრის ჯგუფი*** და D_n-ით აღინიშნება.

მათემატიკოსებმა XIX საუკუნეში დაინახეს, რომ ევკლიდური გეომეტრია არ არის ერთადერთი შესაძლებელი გეომეტრია. იმ შემთხვევებშიც კი, თუ მივიღებთ, რომ „სივრცე, რომელშიც ჩვენ ვცხოვრობთ“ ემორჩილება ევკლიდური გეომეტრიის კანონებს, აზრი აქვს სხვა იმ სივრცეების გეომეტრიის შესწავლასაც, რომლებიც მათემატიკური აგებების შედეგად ჩნდება. ამასთან დაკავშირებით გასარკვევია როგორი გეომეტრია უნდა გავიგოთ ასეთ შემთხვევაში. თუ განვაზოგადებთ ევკლიდური გეომეტრიის სხვადასხვა ცნებას, მაშინ შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ამ შეკითხვაზე განსხვავებული პასუხები.

კერძოდ, ევკლიდური გეომეტრიის მოძრაობათა ჯგუფის ცნების განზოგადების შედეგად გერმანელმა მათემატიკოსმა კლაინმა მის 1872 წლის ლექციაში, რომელიც გახდა ცნობილი სახელწოდებით „ერლანგენის პროგრამა“, მოგვცა გეომეტრიის განსაზღვრება, როგორც ფიგურათა თვისებების შესწავლა, რომლებიც ინვარიანტულია მოცემული გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ.

უფრო დაწვრილებით, ვთქვათ, მოცემულია რაიმე X სიმრავლე და მისი რომელიღაც გარდაქმნათა G ჯგუფი. ჩავთვალოთ, G ჯგუფის მიმართ ფიგურა $F_1 \subset$ ▯ ეკვივალენტურია (ან ტოლი, როგორც ამბობენ ელემენტარულ გეომეტრიაში) $F_2 \subset$ ▯ ფიგურის და დავწეროთ $F_1 \underset{G}{\sim} F_2$, თუ არსებობს ისეთი $\varphi \in$ G გარდაქმნა, რომ $F_2 = F_1\varphi$. შევამოწმოთ, რომ ეს მართლაც ეკვივალენტობის მიმართებაა:

1) F~F, რადგან F= F id_X და $id_X \in G$;
2) თუ $F_1 \sim F_2$, ე.ი $F_2 = F_1\,\varphi$, სადაც $\varphi \in G$, მაშინ $F_2 \sim F_1$, რადგან $F_1 = F_2\varphi^{-1}$ და $\varphi^{-1} \in G$;
3) თუ $F_1 \sim F_2$ და $F_2 \sim F_3$, სადაც $\varphi, \psi \in G$, მაშინ $F_1 \sim F_3$ რადგან $F_3 = F_1(\varphi\psi)$და $\varphi\psi \in G$.

ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ ეკვივალენტობის მიმართების სამი აქსიომა ზუსტად შეესაბამება გარდაქმნათა ჯგუფის სამ აქსიომას.

გეომეტრიის ერთ-ერთი ამოცანაა ფიგურათა ეკვივალენტობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების მოძებნა (გავიხსენოთ სამკუთხედთა ტოლობის ნიშნები ევკლიდურ გეომეტრიაში). ამ მიზანს ემსახურება ის სიდიდეები, რომლებიც ინვარიანტულია გარდაქმნათა მიმართ G ჯგუფიდან (ისეთები,როგორც ორ წერტილს შორის მანძილი ან კუთხის ზომა ევკლიდურ გეომეტრიაში). ამ ინვარიანტებს შორის კავშირშია გეომეტრიული თეორემები (მაგალითად, პითაგორას თეორემა ან თეორემა იმის შესახებ, რომ სამკუთხედის მედიანები იკვეთება ერთ წერტილში).

გასაგებია, რომ ნებისმიერ გარდაქმნათა ჯგუფი ვერ მიგვიყვანს საინტერესო და გამოყენებებისათვის მნიშვნელოვან გეომეტრიამდე. ყველა ასეთი გეომეტრია დაკავშირებულია საკმაოდ მდიდარ გარდაქმნათა ჯგუფებთან, რომლებიც არც ისე ბევრია. აქ მინიმალური მოთხოვნაა ტრანზიტულობა.

განსაზღვრება 5. მოცემული X სიმრავლის გარდაქმნათა G ჯგუფს ეწოდება ტრანზიტული, თუ ნებისმიერი $x, y \in$X-თვის არსებობს ისეთი $\varphi \in G$ გარდაქმნა, რომ $y = x\varphi$.

ეს ნიშნავს, რომ შესაბამის გეომეტრიაში ყველა წერტილი ეკვივალენტურია ზემოთ განსაზღვრული ფიგურათა ეკვივალენტობის განსაზღვრების აზრით. ცხადია, რომ, თუ G ჯგუფის რომელიმე ქვეჯგუფი ტრანზიტულია, მაშინ G-ც ტრანზიტულია.

მაგალითი 10. ვექტორული V სივრცის პარალელურ გადატანათა Tran(V) ჯგუფი (იხ. მაგალითი 4) ტრანზიტულია. მართლაც, ნებისმიერი x და y-თვის V-დან გვაქვს $y = x\mathrm{t}_{y-x}$, მაგრამ Tran(V) ჯგუფი ჯერ კიდევ მეტისმეტად მცირეა იმისათვის, რომ განისაზღვროს საინტერესო გეომეტრია. ევკლიდური გეომეტრიისაგან განსხვავებული საინტერესო გეომეტრიის მაგალითად მოვიყვანოთ აფინური გეომეტრია.

ვთქვათ, V რაიმე ვექტორული სივრცეა, $\varphi \in$GL(V) და $a \in$ V, მაშინ:

$$\varphi^{-1}\mathrm{t}_a\varphi = \mathrm{t}_{a\varphi} \tag{2}$$

მართლაც, ნებისმიერი x-თვის V-დან გვაქვს

$$x(\varphi^{-1}\mathrm{t}_a\varphi)=(x\varphi^{-1})\,\mathrm{t}_a\varphi=(x\varphi^{-1} + a)\,\varphi = x + a\varphi = \mathrm{t}_{a\varphi}.$$

თეორემა 1. ნებისმიერი $G \leq GL(V)$ჯგუფისათვის სიმრავლე:

$$G \cdot \mathrm{Tran}(V)=\{\varphi \cdot t_a \mid a \in V,\ \varphi \in G\}$$

V სივრცის გარდაქმნათა ტრანზიტული ჯგუფია.

ვთქვათ, $a, b \in$V; $\varphi, \psi \in$ GL(V). თუ გამოვიყენებთ (1),(2) ფორმულებს, გვექნება

$$(\varphi\mathrm{t}_a)(\psi\mathrm{t}_b)= \varphi(\psi\psi^{-1})\mathrm{t}_a(\psi\mathrm{t}_b)=(\varphi\psi)(\psi^{-1}\mathrm{t}_a\psi)\mathrm{t}_b = (\varphi\psi)(\mathrm{t}_{a\psi}\mathrm{t}_b) = (\varphi\psi)\mathrm{t}_{a\psi+b} \in G\cdot\mathrm{Tran}(V)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ G · Tran(V) სიმრავლის ერთეულოვანი ელემენტია $id_V \cdot t_0$ და $(\varphi\mathrm{t}_a)^{-1} = \varphi^{-1}\mathrm{t}_{-a\varphi^{-1}}$. ამგვარად, G · Tran(V) ვექტორული V სივრცის გარდაქმნათა ჯგუფია. ის ტრანზიტულია, რადგან უკვე ტრანზიტულია მისი Tran(V) ქვეჯგუფი.

კერძოდ, ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ G= GL(V). მიღებულ

$$GA(V)= GL(V) \cdot \mathrm{Tran}(V) \tag{3}$$

ჯგუფს ეწოდება ვექტორული V სივრცის ***სრული აფინური*** ჯგუფი, ხოლო მის ელემენტებს *(ბიექციური)* ***აფინური*** გარდაქმნები. მასთან დაკავშირებულ გეომეტრიას ეწოდება ***აფინური გეომეტრია***.

იმ შემთხვევაში, როცა $V=E^2$, ჩვენ ვღებულობთ ევკლიდური სიბრტყის აფინურ გეომეტრიას $GA(E^2)= GL(E^2)\cdot Tran(E^2)$.

***თეორემა* 2.** ევკლიდური სიბრტყის მოძრაობათა $IsomE^2$ ჯგუფი $GA(E^2)$ ჯგუფის ქვეჯგუფია და $IsomE^2= O_2 \cdot Tran(E^2)$.

უპირველეს ყოვლისა, შევნიშნოთ, რომ ყველა პარალელური გადატანა და ყველა ორთოგონალური გარდაქმნა მოძრაობებია. ვთქვათ, ახლა $f\epsilon\, IsomE^2$ რაიმე მოძრაობაა და $a=Of$ (O კოორდინატთა სათავეა), მაშინ მოძრაობა $\varphi = f\, t_a^{-1} = f\, t_{-a}$ ადგილზე ტოვებს კოორდინატთა O სათავეს და, მაშასადამე, მიეკუთვნება O_2 ჯგუფს (იხ.მაგალითი 8). ამგვარად, $f = \varphi t_{-a}^{-1} = \varphi t_a \epsilon O_2 \cdot Tran(E^2)$ და $IsomE^2 = O_2 \cdot Tran(E^2)$.

ანალოგიურად აღიწერება ევკლიდური სივრცის მოძრაობათა ჯგუფი.

შედეგი. თუ ფიგურები F_1, $F_2 \subset E^2$ ტოლია ევკლიდურ გეომეტრიაში, მაშინ ისინი ტოლია აფინურ გეომეტრიაშიც.

შენიშვნა 2. სრული აფინური $GA(E^2)$ ჯგუფი არ ემთხვევა მოძრაობათა $IsomE^2$ ჯგუფს:

$IsomE^2 < GA(E^2)$. აფინური გარდაქმნის მაგალითად, რომელიც არაა მოძრაობა, გამოდგება ჰომოთეტია (კოეფიციენტი $\neq\pm1$) ან რომელიმე ღერძის გასწვრივ გაჭიმვა. ამგვარად, $GA(E^2)$ ჯგუფი უფრო მდიდარია, ვიდრე მოძრაობათა $IsomE^2$ ჯგუფი და ამიტომ არატოლი ფიგურები ევკლიდურ გეომეტრიაში შეიძლება აღმოჩნდნენ ტოლი აფინურ გეომეტრიაში. ასე მაგალითად, აფინურ გეომეტრიაში ყველა წრეწირი ტოლია.

ამოცანა 1. დაამტკიცეთ, რომ აფინურ გეომეტრიაში ყველა სამკუთხედი ტოლია.

აფინურ გეომეტრიაში არ არსებობს წერტილებს შორის მანძილის ცნება, მაგრამ, როგორც მომდევნო ამოცანა გვიჩვენებს, გააჩნია ერთ წრფეზე მდებარე სამი წერტილის ინვარიანტი.

ამოცანა 2. დაამტკიცეთ, რომ აფინური გარდაქმნების დროს ნარჩუნდება მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით.

ჯგუფური მიდგომის ჩარჩოებში შეიძლება აგრეთვე აიგოს პროექციული და კომფორმული გეომეტრიები, ლობაჩევსკის გეომეტრია და სხვა გეომეტრიები, რომლებიც ხშირად გვხვდება მათემატიკასა და მის გამოყენებებში.

ვთქვათ, G ჯგუფია და H მისი ქვეჯგუფი. ვიტყვით, რომ ელემენტები $g_1, g_2 \in G$ ***სადარია მოდულით*** H და ვწერთ $g_1 \equiv g_2 (\mathrm{mod}\, H)$, თუ:

$$g_1{}^{-1} g_2 \in H, \tag{4}$$

ე.ი. $g_2 = g_1 h$, სადაც $h\in H$. ეს განსაზღვრება აზოგადებს მთელ რიცხვთა სადარობას მოდულით n, რომელიც მიიღება $G=\mathbb{Z}$ და $H=n\mathbb{Z}$ შემთხვევაში. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ასეთი სახით განსაზღვრული სადარობის მიმართება მოდულით H ეკვივალენტობის მიმართებაა. ამ ეკვივალენტობის კლასებს ეწოდება G ჯგუფის ***მარცხენა მოსაზღვრე კლასები*** H ქვეჯგუფის მიმართ. ცხადია, რომ g ელემენტის შემცველ კლასს აქვს სახე: $gH=\{gh \mid h\in H\}$. ერთ-ერთი მოსაზღვრე კლასი თვით H ქვეჯგუფია, რადგან $eH=H$. რადგან ოპერაცია ჯგუფში არაა სავალდებულო იყოს კომუტაციური, ჩვენ მივიღებთ, საზოგადოდ, სხვა ეკვივალენტობის მიმართებას, თუ (4) პირობას შევცვლით მისი ანალოგიური პირობით: $g_2{}^{-1} g_1 \in H$.

ამ ეკვივალენტობის კლასებს ეწოდება ***მარჯვენა მოსაზღვრე კლასები***. მათ აქვთ ასეთი სახე: $Hg=\{hg \mid h\in H\}$. შევნიშნოთ, რომ ინვერსია $g \mapsto g^{-1}$ ამყარებს ურთიერთცალსახა თანადობას მარცხენა და მარჯვენა მოსაზღვრე კლასთა სიმრავლეებს შორის. სახელდობრ, $(gH)^{-1}= Hg^{-1}$.

მაგალითი 11. სიმეტრიულ $G=S_n$ ჯგუფში განვიხილოთ $H\cong S_{n-1}$ ქვეჯგუფი, რომლის ჩასმები ადგილზე ტოვებენ n-ს. ჩასმები $a, b \in S_n$ ეკუთვნის ერთ მარჯვენა მოსაზღვრე კლასს

H-ის მიმართ, თუ $n(ab^{-1}) \in S_n$, ე.ი. $na= nb$. მაშასადამე, გვექნება n მარჯვენა მოსაზღვრე $R_1, R_2,..., R_n$ კლასი, სადაც $R_k = \{a \in S_n|\ na = k\}$ k=1,2,..,n. თუკი ჩასმები $a, b \in S_n$ ეკუთვნის ერთ მარცხენა მოსაზღვრე კლასს, მაშინ $n(a^{-1}b)$= n, ე.ი. na^{-1}= nb^{-1}. ამგვარად, გვექნება n მარცხენა $L_1, L_2,..., L_n$ მოსაზღვრე კლასი, სადაც $L_k = \{a \in S_n|\ ka = n\}$ k=1,2,..,n. ჩვენ ვხედავთ, რომ მარჯვენა და მარცხენა მოსაზღვრე კლასები (გარდა $R_n = L_n$= H შემთხვევისა) განსხვავებულია (სხვა მაგალითები იხ. [3]-სა და [4]-ში).

G ჯგუფის H ქვეჯგუფის მიმართ მარცხენა მოსაზღვრე კლასთა სიმრავლე G/H სიმბოლოთი აღინიშნება. G-ს H-ის მიმართ მოსაზღვრე კლასთა რიცხვს (სულერთია, მარჯვენა თუ მარცხენა), თუ ის სასრულია, ეწოდება H ქვეჯგუფის ***ინდექსი*** და |G:H|-ით აღინიშნება.

თეორემა 3. (*ლაგრანჟი*). თუ G სასრული ჯგუფია და H მისი ნებისმიერი ქვეჯგუფი, მაშინ |G|=|G:H|·|H|.

ყველა gH მოსაზღვრე კლასი შეიცავს ელემენტთა ტოლ რაოდენობას, რომელიც |H|-ის ტოლია. რადგან ისინი ქმნის G ჯგუფის დაყოფას (როგორც ეკვივალენტობის კლასები), ამიტომ G ჯგუფის რიგი მათი რიცხვის |H|-ზე ნამრავლის ტოლია.

ჯგუფის მოსაზღვრე კლასებად დაყოფა ბუნებრივად ჩნდება გარდაქმნათა ჯგუფების შესწავლისას. ვთქვათ, X სიმრავლის გარდაქმნათა ჯგუფია G. ვიტყვით, რომ $x, y \in$ X წერტილები ეკვივალენტურია G-ს მიმართ და ვწერთ $x \underset{G}{\sim} y$, თუ არსებობს ისეთი $g \in$G ელემენტი, რომ $y = xg$. ეს ზემოთ განსაზღვრული ფიგურათა ეკვივალენტობის კერძო შემთხვევაა და, მაშასადამე, ეკვივალენტობის მიმართება.

ეკვივალენტობის კლასს xG={$y \in$ X| $\exists g \in$G, $y = xg$}={xg| $g \in$G}⊆ X, რომელიც წარმოქმნილია $x \in$X წერტილის მიერ, ეწოდება მისი ***ორბიტა***. კერძოდ, გარდაქმნათა ტრანზიტულ ჯგუფებს (იხ. განსაზღვრება 5) აქვთ ერთადერთი ორბიტა. ქვეჯგუფს G_x={$g \in$G| $xg = x$}≤G ეწოდება $x \in$X წერტილის ***სტაბილიზატორი*** G-ში.

მაგალითი 12. ევკლიდური სიბრტყის მოძრაობათა IsomE^2 ჯგუფი ტრანზიტულია. კოორდინატთა სათავის სტაბილიზატორია ორთოგონალური O_2 ჯგუფი.

მაგალითი 13. ორთოგონალური O_2 ჯგუფის ორბიტები წრეწირებია ცენტრით კოორდინატთა O სათავეში და თვით O წერტილი. კოორდინატთა სათავისაგან $P \neq O$ წერტილის სტაბილიზატორი შედგება იგივური გარდაქმნისა და OP წრფის მიმართ არეკვლისაგან, ხოლო O წერტილის სტაბილიზატორია მთელი O_2 ჯგუფი.

მაგალითი 14. სიმეტრიული S_n ჯგუფი ტრანზიტულია X={1,2,...,n} სიმრავლეზე.სიმბოლო n-ის სტაბილიზატორია S_n ჯგუფში ქვეჯგუფი H≅ S_{n-1}.

თეორემა 4. გვაქვს xG ორბიტის ურთიერთცალსახა ასახვა მარჯვენა მოსაზღვრე G/G_x კლასთა სიმრავალზე, სადაც ყოველ $y = xg \in x$G წერტილს შეესაბამება მოსაზღვრე $G_x g$ კლასი.

როცა g_1, $g_2 \in$G გვექნება $g_1 \equiv g_2 (\mathrm{mod}\ G_x) \Leftrightarrow g_1 g_2{}^{-1} \in G_x \Leftrightarrow x(g_1 g_2{}^{-1}) \Leftrightarrow x g_1 = x g_2$. ამგვარად, G-ს G_x-ის მიმართ ერთი მარჯვენა მოსაზღვრე $G_x g$ კლასის ელემენტები ხასიათდება იმით, რომ მათ x წერტილი გადაჰყავთ ერთსა და იმავე წერტილში. უფრო ზუსტად, მოსაზღვრე $G_x g$ კლასის ყველა ელემენტს და მხოლოდ მათ გადაჰყავთ x წერტილი $y = xg$ წერტილში. ამით დადგენილია საძიებელი თანადობა.

თუ xG ორბიტის ელემენტთა რიცხვი სასრულია, მაშინ მას მისი სიგრძე ეწოდება და $|x\mathrm{G}|$-ით აღინიშნება.

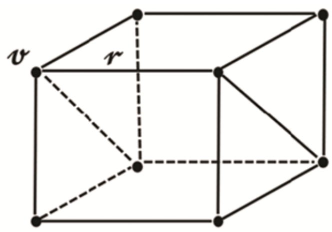
შედეგი. თუ G სასრული ჯგუფია, მაშინ:

$$|G|=|xG|\cdot|G_x|. \tag{5}$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ერთი ორბიტის ყველა წერტილის სტაბილიზატორთა რიგები ტოლია. სინამდვილეში არსებობს ზუსტი კავშირი ერთი ორბიტის ელემენტთა სტაბილიზატორებს შორის, რომელიც არ არის დამოკიდებული G ჯგუფის სასრულობაზე. ჩამოვაყალიბოთ ეს ამოცანის სახით.

ამოცანა 3. ნებისმიერი $x\epsilon$X და ნებისმიერი $g\epsilon$ G ადგილი აქვს ტოლობას $G_{xg} = g^{-1}G_x\, g$.

მაგალითი 15. ვთქვათ, K$\subset$ E^3 კუბია. განვიხილოთ მისი სიმეტრიის ჯგუფი G= Sym K = = { φϵIsomE^3|Kφ=K}. ცხადია, რომ G სასრულია. უფრო მეტიც, კუბის სიმეტრია მთლიანად განისაზღვრება იმით, თუ როგორ ანაცვლებს ის მის წვეროებს. ამის გამო ჩვენ შეგვიძლია ჯგუფი G განვიხილოთ როგორც K კუბის წვეროთა V სიმრავლის გარდაქმნათა S(V) ჯგუფის ქვეჯგუფი. იმის გამო, რომ კუბი წესიერი მრავალწახნაგაა, მისი ნებისმიერი წვერო შეიძლება გადავიყვანოთ ნებისმიერ სხვა წვეროში რომელიღაც გარდაქმნით G ჯგუფიდან. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ჯგუფი G ტრანზიტულია V სიმრავლეზე. მაშასადამე, |G|=8|G_v|, სადაც v კუბის რომელიმე წვეროა. ანალოგიური სახით, თუ განვიხილავთ G_v ჯგუფს, როგორც v წვეროდან გამომავალ წიბოთა სიმრავლის გარდაქმნათა ჯგუფს, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ: |G_v|=3|$G_{v,r}$|, სადაც $G_{v,r}$ არის v წვეროდან გამომავალი რომელიმე r წიბოს სტაბილიზატორი G_v ჯგუფში. ჯგუფი $G_{v,r}$ შედგება იგივური გარდაქმნისაგან და არეკვლისაგან იმ სიბრტყის მიმართ, რომელიც კუბის ცენტრზე და r წიბოზე გადის. ამგვარად, |Sym K|=8|G_v|=8· 3 ·|$G_{v,r}$|=8· 3 ·2=48



შენიშვნა 3. იგივე შედეგი კიდევ ორი ხერხით მიიღება, თუ განვიხილავთ შესაბამისად ჯგუფ Sym K-ს, როგორც წახნაგთა და წიბოთა სიმრავლეების გარდაქმნათა ჯგუფს.

მაგალითი 16. ვთქვათ, G={$g_\alpha|\alpha\epsilon S_4$} ოთხი უცნობის პოლინომთა K[x_1, x_2, x_3, x_4] რგოლის გარდაქმნათა ჯგუფია, რომელიც შედგება x_1, x_2, x_3, x_4 უცნობთა ყველა შესაძლო გადანაცვლებისაგან. ჯგუფი G იზომორფულია S_4-ის და, მაშასადამე, |G|=4!=24. განვიხილოთ f= $x_1x_2 + x_3x_4$ პოლინომი. უცნობთა ყველა გადანაცვლების შედეგად მიიღება სამი პოლინომი: $x_1x_2 + x_3x_4$, $x_1x_3 + x_2x_4$, $x_1x_4 + x_2x_3$. ეს ნიშნავს, რომ |fG|=3. თანახმად (4) ფორმულისა, ვღებულობთ $|G_f| = \frac{|G|}{|fG|} = \frac{24}{3}$=8. შევნიშნოთ, რომ, თუ G ჯგუფს S_4-თან გავაიგივებთ, მაშინ G_f იქნება სხვა არაფერი, თუ არა ქვეჯგუფი, რომელიც მაგალით 6-ში აღნიშნულია Sym f-ით.

მთელ რიცხვთა ადიციურ ჯგუფში შედარების მიმართება მოდულით n შეთანხმებულია შეკრების ოპერაციასთან, რაც იძლევა საშუალებას განვსაზღვროთ შეკრების ოპერაცია ℤ/nℤ ფაქტორ-სიმრავლეში. ანალოგიური სახით შეიძლება განისაზღვროს ოპერაცია მოსაზღვრე კლასთა სიმრავლეში სხვა შემთხვევებშიც, მაგრამ არა ყოველთვის.

განსაზღვრება 6. G ჯგუფის H ქვეჯგუფს ეწოდება ***ნორმალური***, თუ:

$$Hg = gH \ \forall g \in G \tag{6}$$

ან, რაც ეკვივალენტურია

$$g^{-1}Hg=H \ \forall g \in G. \tag{7}$$

ასეთ შემთხვევაში წერენ: H⊲G (ან G⊳H).

იმისათვის, რომ H ქვეჯგუფი იყოს ნორმალური, საკმარისია (მაგრამ არა აუცილებელი), რომ G ჯგუფის ყოველი ელემენტი H-ის ყოველ ელემენტთან იყოს გადანაცვლებადი. კერძოდ, აბელურ ჯგუფში ნებისმიერი ქვეჯგუფი ნორმალურია.

***თეორემა* 5.** სადარობის მიმართება მოდულით H შეთანხმებულია G ჯგუფის ოპერაციასთან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა H ნორმალური ქვეჯგუფია.

სადარობის მიმართების შეთანხმებულობა გამრავლების ოპერაციასთან ნიშნავს, რომ $g_1 \equiv g_1'(\mathrm{mod}\ \mathrm{H})$, $g_2 \equiv g_2'(\mathrm{mod}\ \mathrm{H}) \Rightarrow g_1g_2 \equiv g_1'g_2'(\mathrm{mod}\ \mathrm{H})$ ან, რაც იმის ეკვივალენტურია, რომ ნებისმიერი $g_1, g_2 \in \mathrm{G}$ და $h_1, h_2 \in \mathrm{H}$ $(g_1h_1)(g_2h_2) \equiv g_1g_2(\mathrm{mod}\ \mathrm{H})$. უკანასკნელი პირობა განსაზღრების თანახმად $g_2^{-1}h_1g_2 \in \mathrm{H}$ სახით გადაიწერება. რადგან g_2 შეიძლება იყოს G-ს ნებისმიერი ელემენტი, ხოლო h_1 იყოს H-ის ნებისმიერი ელემენტი, ამიტომ ეს ნორმალურობის (7) პირობის ტოლფასია.

***მაგალითი* 17.** სიმეტრიული S_n ჯგუფის $\mathrm{H} \cong S_{n-1}$ ქვეჯგუფი, რომელიც განხილულია მაგალით 11-ში, არ არის ნორმალური, როცა $n \geq 3$ (სხვა მაგალითები იხ. [3]-სა და [4]-ში).

ამგვარად, თუ $\mathrm{H} \triangleleft \mathrm{G}$, მაშინ გამრავლების ოპერაცია G ჯგუფში განსაზღვრავს გამრავლების ოპერაციას G/H სიმრავლეში წესით: $(g_1\mathrm{H})(g_2\mathrm{H}) = g_1g_2\mathrm{H}$. ეს ოპერაცია ასოციაციურია, მისთვის არსებობს ერთეული-მოსაზღვრე კლასი: $e\mathrm{H} = \mathrm{H}$. ყოველ მოსაზღვრე $g\mathrm{H}$ კლასს გააჩნია შებრუნებული, სახელდობრ, $g^{-1}\mathrm{H}$. მაშასადამე, G/H ჯგუფია, რომელსაც ეწოდება G ჯგუფის H-ის მიმართ ***ფაქტორ-ჯგუფი***. ცხადია, რომ, თუ ჯგუფი აბელურია, მაშინ ნებისმიერი მისი ფაქტორ-ჯგუფი აბელურია.

ერთი ტიპის სხვადასხვა ალგებრულ სტრუქტურებს შორის კავშირები მყარდება ჰომომორფიზმების საშუალებით. ჰომომორფიზმის ცნება იმით განსხვავდება იზომორფიზმის ცნებისაგან, რომ ის არ მოითხოვს ბიექციურობას. რამდენიმე შემთხვევაში ჩვენ უკვე შევხვდით ამ ცნებას. სახელდობრ, ვექტორულ სივრცეთა ჰომომორფიზმები სხვა არაფერია, თუ არა მათი წრფივი ასახვები (იხ.[1]).

განსაზღვრება* 6.** ვთქვათ, (G, ∗) და (H,∘) ჯგუფებია. ასახვას φ: G→ H ეწოდება ***ჰომომორფული ან (***ჰომომორფიზმი***) G-დან H-ში, თუ ნებისმიერი $a, b \in \mathrm{G}$ სრულდება

$$(a * b)\varphi = a\varphi \circ b\varphi.$$

ჯგუფის თავის თავში ჰომომორფიზმს ეწოდება მისი ***ენდომორფიზმი,*** ხოლო თავის თავზე იზომორფიზმს – მისი ***ავტომორფიზმი.***

შევნიშნოთ, რომ ხშირად ვწერთ $(a \cdot b)\varphi = a\varphi \cdot b\varphi$ და ვგულისხმობთ მარცხენა და მარჯვენა ნაწილში სხვადასხვა „გამრავლების" ოპერაციას.

დავადგინოთ ჯგუფთა ჰომომორფიზმების ზოგიერთი ზოგადი თვისებები.

1) $e\varphi = 1 \in \mathrm{H}$. მართლაც, ვთქვათ $e\varphi = \mathrm{h} \in \mathrm{H}$; მაშინ $\mathrm{h}^2 = (e\varphi)^2 = \mathrm{e}^2\varphi = e\varphi = \mathrm{h}$, საიდანაც h=1.
2) $a^{-1}\varphi = (a\varphi)^{-1}$, რადგან $a\varphi \cdot a^{-1}\varphi = (a \cdot a^{-1})\varphi = \mathrm{e}\varphi = 1$.
3) $\mathrm{Im}\,\varphi = \{a\varphi \mid a \in \mathrm{G}\}$ ქვეჯგუფია H-ში (რომელსაც ეწოდება φ ჰომომორფიზმის ***ანასახი***). ეს გამომდინარეობს ჰომომორფიზმის განსაზღვრებიდან და წინა თვისებებიდან.
4) $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{a \in \mathrm{G} \mid a\varphi = 1\}$ ნორმალური ქვეჯგუფია G-ში (რომელსაც ეწოდება φ ჰომომორფიზმის ***ბირთვი***). მართლაც:

   $a, b \in \mathrm{Ker}\,\varphi \Rightarrow (ab)\varphi = a\varphi b\varphi = 1^2 = 1 \Rightarrow ab \in \mathrm{Ker}\,\varphi$,

   $a \in \mathrm{Ker}\,\varphi \Rightarrow a^{-1}\varphi = (a\varphi)^{-1} = 1^{-1} = 1 \Rightarrow a^{-1} \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, $e \in \mathrm{Ker}\,\varphi$,

   $a \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, $g \in \mathrm{G} \Rightarrow (g^{-1}ag)\varphi = g^{-1}\varphi \cdot a\varphi \cdot g\varphi = g^{-1}\varphi \cdot g\varphi = 1 \Rightarrow g^{-1}ag \in \mathrm{Ker}\,\varphi$.

***მაგალითი* 18.** დეტერმინანტთა გამრავლების ფორმულა ნიშნავს, რომ ასახვა det: $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K}) \longrightarrow \mathrm{K}^*$, $\mathrm{A} \mapsto \det\mathrm{A}$ ჰომომორფიზმია (K^* გამრავლების მიმართ K ველის ყველა შებრუ-

ნებად ელემენტთა ჯგუფია). მისი ბირთვია ყველა იმ მატრიცთა $SL_n(K)$ ჯგუფი, რომელთა დეტერმინანტი 1-ის ტოლია.

მაგალითი 19. ამბობენ, რომ მოცემულ გადანაცვლებაში რიცხვთა წყვილი ქმნის ***ინვერსიას***, თუ მათ შორის უფრო დიდი დგას პატარაზე მარცხნივ. გადანაცვლებას ეწოდება ***ლუწი*** (შესაბამისად, ***კენტი***), თუ მასში ინვერსიათა რიცხვი ლუწია (შესაბამისად, კენტია). ამასთან ერთად განისაზღვრება გადანაცვლების ***ნიშანი***, რომელიც 1-ის ტოლია, თუ გადანაცვლება ლუწია, და (-1)-ის, თუ გადანაცვლება კენტია. მოცემული $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ გადანაცვლების ნიშანი $sgn(i_1, i_2, \dots, i_n)$-ით აღინიშნება. მაგალითად, როცა n=3 ლუწი გადანაცვლებებია – (1,2,3) (0 ინვერსია), (2,3,1) (2 ინვერსია) და (3,1,2) (2 ინვერსია); კენტია – (1,3,2) (1 ინვერსია), (3,2,1) (3 ინვერსია) და (2,3,1) (1 ინვერსია).

სიმეტრიული S_n ჯგუფის a ჩასმის $sgna$ ნიშანი ვუწოდოთ მისი ჩანაწერის ზედა და ქვედა გადანაცვლებების ნიშნების ნამრავლს (იხ.მაგალითი 1):

$$sgna\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \dots i_n \\ j_1\, j_2 \dots j_n \end{pmatrix} = sgn(i_1, i_2, \dots, i_n) \cdot sgn(j_1, j_2, \dots, j_n).$$

ეს ნამრავლი არაა დამოკიდებული a ჩასმის ჩაწერის წესზე, რადგან ჩაწერის ნებისმიერი წესიდან შეიძლება გადასვლა ნებისმიერ სხვა წესზე სვეტთა მიმდევრობითი ტრანსპოზიციებით, ხოლო ყოველი ასეთი ტრანსპოზიციით ერთდროულად იცვლება ზედა და ქვედა გადანაცვლებათა ნიშნები, ასე რომ, ნარჩუნდება მათი ნამრავლი. ნიშნის ძირითადი თვისება არის ის, რომ ასახვა $sgn: S_n \to C_2$={±1}, $a \mapsto sgna$, ჰომომორფიზმია. მართლაც, a და b ჩასმების გადამრავლებისას შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ b ჩასმის ჩანაწერში ზედა სტრიქონი ემთხვეოდეს a ჩასმის ჩანაწერის ქვედა სტრიქონს:

$a = \begin{pmatrix} i_1\, i_2 \dots i_n \\ j_1\, j_2 \dots j_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} j_1\, j_2 \dots j_n \\ k_1\, k_2 \dots k_n \end{pmatrix}$, მაშინ $ab = \begin{pmatrix} i_1\, i_2 \dots i_n \\ k_1\, k_2 \dots k_n \end{pmatrix}$, ასე რომ, $sgnab = sgn(i_1, i_2, \dots, i_n) \cdot sgn(k_1, k_2, \dots, k_n)$=[$sgn(i_1, i_2, \dots, i_n) \cdot sgn(j_1, j_2, \dots, j_n)$]× [$sgn(j_1, j_2, \dots, j_n) \cdot sgn(k_1, k_2, \dots, k_n)$]= $sgna \cdot sgnb = sgnb \cdot sgna$.

ასეთი სახით განსაზღვრული sgn ჰომომორფიზმის ბირთვს ეწოდება ***ნიშანცვლადი ჯგუფი*** და A_n-ით აღინიშნება. გამოიყენება აგრეთვე შემდეგი ტერმინოლოგია: a ჩასმას, რომლისთვისაც $sgna$=1 (შესაბამისად$sgna$=-1), ეწოდება ***ლუწი*** (შესაბამისად, ***კენტი***). ამგვარად, A_n ლუწ ჩასმათა ქვეჯგუფია (სხვა მაგალითები იხ.[1]-სა და [4]-ში).

თეორემა 6 (*პირველი იზომორფიზმის შესახებ*). ვთქვათ, φ: G→ H ჯგუფთა ჰომომორფიზმია, მაშინ Imφ ≅ G/Ker φ. უფრო ზუსტად, ადგილი აქვს τ: Imφ → G/Ker φ იზომორფიზმს, რომელიც ყოველ h = gφ∊ Imφ ელემენტს უთანადებს gKer φ მოსაზღვრე კლასს.

ზემოთ დამტკიცებული 5) თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ gKerφ მოსაზღვრე კლასის ყველა ელემენტი და მხოლოდ ისინი φ ჰომომორფიზმის შედეგად გადადის h = gφ∊ Imφ ელემენტში. ამით ნაჩვენებია, რომ ასახვა τ განსაზღვრულია კორექტულად და ბიექციურია. რჩება შესამოწმებლად, რომ τ ჰომომორფიზმია. ვთქვათ, g_1, g_2∊G, g_1φ = h_1, g_2φ = h_2, მაშინ ($g_1 g_2$) φ = $h_1 h_2$ და ($h_1 h_2$)τ=($g_1 g_2$)Kerφ=(g_1Kerφ)(g_2Kerφ)=(h_1τ)(h_2τ).

შედეგი. თუ ჯგუფი G სასრულია, მაშინ |G|=| Imφ||Kerφ| (საინტერესოა ამ ფორმულის (5) ფორმულასთან შედარება).

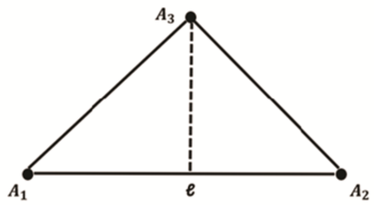
მაგალითი 20. ჰომომორფიზმისათვის sgn, რომელიც მაგალით 19-შია განხილული, გვაქვს $S_n/A_n \cong C_2$. კერძოდ, აქედან გამომდინარეობს, რომ: $|A_n| = \frac{1}{2}\, n!$

მაგალითი 21. განსაზღვრების თანახმად (იხ.(4)), ყოველი აფინური f გარდაქმნა პარალელური გადატანისა და φ წრფივი გარდაქმნის ნამრავლია. უკანასკნელს f გარდაქმნის ***წრფივი ნაწილი*** ან ***დიფერენციალი*** ეწოდება და df-ით აღინიშნება. ფორმულა, რომელიც თეორემა 1-ის დამტკიცების დროსაა მიღებული, გვიჩვენებს, რომ ასახვა d: GA(V) →GL(V),

$f \mapsto df$ ჰომომორფიზმია. ცხადია, რომ Imd= GL(V), Ker$d$=Tran(V), ასე რომ:

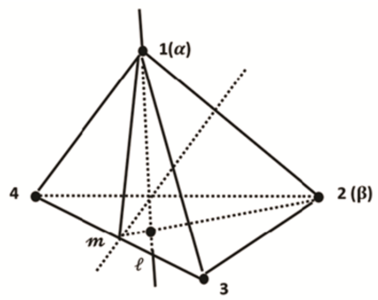
$$GA(V)/\,Tran(V) \cong GL(V).$$

მაგალითი 22. ვთქვათ, $\Delta A_1A_2A_3$ წესიერი სამკუთხედია, თუ ყოველ $\varphi \epsilon$SymΔ მოძრაობას შევუსაბამებთ $a \epsilon S_3$ ჩასმას $A_i\varphi = A_{ia}$ წესით, მივიღებთ f: SymΔ→ S_3 ჰომომორფიზმს. რადგან სიბრტყის ყოველი მოძრაობა, რომელიც ერთ წრფეზე არმდებარე 3 წერტილს ადგილზე ტოვებს, იგივურია, ამიტომ Ker f={id}. დავამტკიცოთ, რომ Im f = S_3. რადგან Im f ქვეჯგუფია S_3-ში და ჯგუფი S_3წარმოიქმნება ტრანსპოზიციებით (იხ.[1]), საკმარისია შევამოწმოთ, რომ ნებისმიერი ტრანსპოზიცია ეკუთვნის Im f-ს, ე.ი. შეიძლება განხორციელდეს რომელიღაც $\varphi \epsilon$SymΔ მოძრაობით. მაგრამ, ეს მართლაც ასეა: მაგალითად, ტრანსპოზიცია (12) ხორციელდება ℓ წრფის მიმართ არეკვლით. ამგვარად, SymΔ≅ S_3.



მაგალითი 23. ვთქვათ, G წესიერი ტეტრაედრის სიმეტრიების ჯგუფია. დავამტკიცოთ, რომ G≅ S_4.

ვიპოვოთ G-ს რიგი. ვთქვათ, v ტეტრაედრის წვეროა. გვაქვს |G|=|G_v|·|vG| (იხ.(5)), მაგრამ |vG|=4, რადგან ცხადია, რომ ყოველთვის მოიძებნება ნებისმიერი წვეროს ნებისმიერ წვეროში გადამყვანი სიმეტრია. ამის გამო |G|=4|G_v|. ვთქვათ, w სხვა წვეროა და $G_{vw} = (G_v)_w$, მაშინ |G_v|=|G_{vw}|·|$w G_v$|, მაგრამ |$w G_v$|=3, რადგან იმ ღერძის მიმართ ბრუნვას, რომელიც გადის v-ზე და მოპირდაპირე წახნაგის ცენტრზე, w შეუძლია გადაიყვანოს ნესბისმიერ წვეროში, გარდა v-სი. ბოლოს, |G_{vw}|=2, რადგან ერთადერთი არატრივიალური სიმეტრია, რომელიც v-ს და w-ს ადგილზე ტოვებს – სიმეტრიაა იმ სიბრტყის მიმართ, რომელიც გადის v-ზე, w-ზე და აერთებს მოპირდაპირე წიბოებს. ამგვარად, |G|=4· 3 ·2=24. მეორე მხრივ, არსებობს G-ს იზომორფული ჩადგმა S_4-ში ($g \mapsto a$ წესით $v_i g = v_{ia}$) და, ამგვარად, G≤ S_4, მაგრამ | G|=|S_4| და მაშასადამე, G≅ S_4.



თუ დავკმაყოფილდებით წესიერი ტეტრაედრის მხოლოდ ბრუნვებით, მივიღებთ ჯგუფს R≅ A_4 (ამ შემთხვევაში $G_{vw} = id$). განვიხილოთ უფრო დაწვრილებით ეს ჯგუფი. R შედგება: იგივური id გარდაქმნისაგან, სამი მობრუნებისაგან π კუთხით იმ წრფეების მიმართ, რომლებიც აერთებენ მოპირდაპირე წიბოებს (A_4-ში (12)(34) ტიპის ციკლები) და რვა მობრუნებისაგან $\frac{2}{3}\pi$ და $\frac{4}{3}\pi$ კუთხეებით იმ წრფეების მიმართ, რომლებიც აერთებენ წვეროს მოპირდაპირე წახნაგის ცენტრთან (A_4-ში (123) ტიპის ციკლები).

მაგალითი 24. პოლინომები:

$$f_1 = x_1x_2 + x_3x_4,\ \ f_2 = x_1x_3 + x_2x_4,\ \ f_3 = x_1x_4 + x_2x_3. \qquad (8)$$

უცნობთა ნებისმიერ $a\epsilon S_4$ ჩასმას x_1, x_2, x_3, x_4 უცნობთა f_1, f_2, f_3 პოლინომები გადაჰყავს ერთიმეორეში. ვღებულობთ ჰომომორფიზმს:

$$\varphi\colon S_4 \to S_3,\, a \mapsto (f_{i_1}, f_{i_2}, f_{i_3}),\, (i_1, i_2, i_3)\,\epsilon S_3.$$

დავამტკიცოთ, რომ $\operatorname{Im} f = S_3$. ამისათვის საკმარისია შევამოწმოთ, რომ (8) პოლინომთა ნებისმიერი ტრანსპოზიცია შეიძლება განხორციელდეს x_1, x_2, x_3, x_4 უცნობების რომელიღაც გადანაცვლებით. სინამდვილეში ეს მართლაც ასეა: მაგალითად, პირველი ორი პოლინომის ტრასნპოზიცია (8)-დან შეიძლება განხორციელდეს x_2 და x_3 უცნობთა ტრანსპოზიციით.

ცხადია, რომ F→ G და G→H ჰომომორფიზმთა კომპოზიცია F→ H ჰომომორფიზმია.

მაგალითი 25. განვიხილოთ det: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ და $sgn\colon \mathbb{R}^* \to C_2=\{\pm 1\}$ ჰომომორფიზმთა კომპოზიცია, სადაც sgn აღნიშნავს ნამდვილი რიცხვის ნიშანს. შედეგად მივიღებთ $\varphi\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to C_2$ ჰომომორფიზმს. როცა n=2, მას აქვს შემდეგი გეომეტრიული აზრი: თუ $A\varphi$=1 ($A\varphi$=-1), მაშინ A მატრიცით განსაზღვრული E^2 სივრცის წრფივი გარდაქმნა ინარჩუნებს (იცვლის) ორიენტაციას იმ აზრით, რომ მისი ნებისმიერი დადებითად ორიენტირებული ბაზისი გადაჰყავს დადებითად (უარყოფითად) ორიენტირებულ ბაზისში. ანალოგიური ინტერპრეტაციაა შესაძლებელი, როცა n=3.

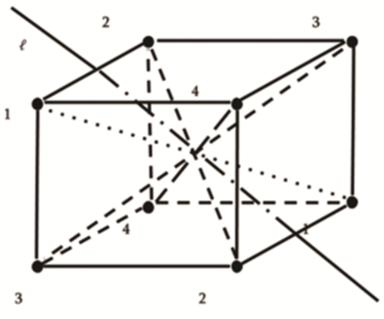
მაგალითი 26. ჰომომორფიზმთა d: $\mathrm{G}A(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)= \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ და φ: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to C_2$ კომპოზიცია $\mathrm{G}A(\mathbb{R}^n) \to C_2$ ჰომომორფიზმია.

როცა n=2 და n=3, ეს იძლევა საშუალებას განვავრცოთ ევკლიდური სიბრტყის და ევკლიდური სივრცის აფინურ გარდაქმნებზე ორიენტაციის შენარჩუნების და ცვლილების ცნებები. სახელდობრ, აფინური გარდაქმნა ინარჩუნებს(იცვლის) ორიენტაციას, თუ მისი დიფერენციალი ინარჩუნებს(იცვლის) ორიენტაციას. კერძოდ, შეიძლება ვილაპარაკოთ მოძრაობებზე, რომლებიც ინარჩუნებენ ან იცვლიან ორიენტაციას.

მაგალითი 27. ვთქვათ, G<IsomE^n (n=2 ან n=3) რაიმე ქვეჯგუფია, რომელიც შეიცავს ორიენტაციის შემცვლელ მოძრაობებს. თუ განვიხილავთ $\mathrm{G}A(\mathbb{R}^n) \to C_2$ ჰომომორფიზმის შეზღუდვას G-ზე, მივიღებთ, რომ ორიენტაციის შემნახველ მოძრაობათა ქვესიმრავლე G-დან, ქვეჯგუფია ინდექსით 2. აღვნიშნოთ G_+-ით ეს ქვეჯგუფი.

მაგალითი 28. კერძოდ, Sym_+K<Sym K ქვეჯგუფს ვუწოდოთ K ***კუბის ბრუნვათა ჯგუფი,*** რადგან |Sym K|=48 (იხ. მაგალითი 15), ხოლო Sym_+K ქვეჯგუფია ინდექსით 2, ამიტომ |Sym_+K|=24. დავამტკიცოთ, რომ $\mathrm{Sym}_+\mathrm{K} \cong S_4$.

ამისათვის დავნომროთ რაიმე სახით K კუბის 4 დიაგონალი და ყოველ $\varphi\epsilon\mathrm{Sym}_+$K მოძრაობას შევუსაბამოთ ამ დიაგონალთა სიმრავლით განხორციელებული ჩასმა. მივიღებთ f: $\mathrm{Sym}_+\mathrm{K} \to S_4$ ჰომომორფიზმს. დავამტკიცოთ, რომ $\operatorname{Im} f = S_4$. აქედან მივიღებთ, რომ f იზომორფიზმია, რადგან |Sym_+K|=|S_4|. ამისათვის საკმარისია შევამოწმოთ, რომ $\operatorname{Im} f$-ს ეკუთვნის ნებისმიერი ტრანსპოზიცია, მაგრამ ეს მართლაც ასეა: მაგალითად, ტრანსპოზიცია (12) ხორციელდება ℓ წრფის ირგვლივ π-ზე მობრუნებით.



ამოცანა 4. დაამტკიცეთ, რომ $\mathcal{D}_4$ ჯგუფი (კვადრატის სიმეტრიათა ჯგუფი) $\mathrm{Sym}(x_1x_2 + x_3x_4)$ ჯგუფის იზომორფულია (იხ.მაგალითები [6] და [15]).

შენიშვნა 4. თანახმად ოპერაციისა, G/N ფაქტორ-ჯგუფში ასახვა $\varepsilon: G \longrightarrow \mathrm{G/N}$, $g \mapsto g\mathrm{N}$, ჰომომორფიზმია. მას ეწოდება G ჯგუფის G/N ფაქტორ-ჯგუფზე ***კანონიკური*** (ან ***ბუნებრივი***) ჰომომორფიზმი. მისი ბირთვი, ცხადია, N ქვეჯგუფია.

ვთქვათ, $\varphi: \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}$ ნებისმიერი სურექციული ჰომომორფიზმია და $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{N}$. ძირითადი თეორემა 6-ის თანახმად, $\mathrm{H} \cong \mathrm{G/N}$ და თუ H-ს გავაიგივებთ G/N-თან იქ მითითებული იზომორფიზმის საშუალებით, ჰომომორფიზმი φ ემთხვევა G ჯგუფის G/N ფაქტორ-ჯგუფზე კანონიკურ ჰომომორფიზმს, ამიტომ თეორემა 6 ისეთი სახით შეიძლება გავიგოთ, რომ არსებითად ჯგუფთა არანაირი სტრუქტურული ჰომომორფიზმები არ არსებობს, გარდა კანონიკურისა ფაქტორ-ჯგუფზე.

ლიტერატურა:

1. ამაღლობელი მ., მაზუროვი ვ., ალგებრის კურსი, ნაწილი I, თსუ 2009.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра.: – М. Физматлит, 2000.
3. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры.: – М. Физматлит, 2000.
4. Каргаполов М.И, Мерзляков Ю.И, Основы теории групп.- СПб.: Издательство “Лань”, 2009.

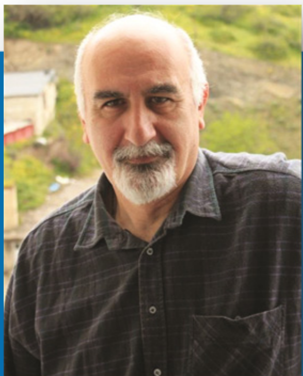
გრანდის ვარდები, ჩებიშევის პოლინომები და ჩებიშევის ფსევდოფუნქციები

International Telematic University UniNettuno
Corso Vittorio Emanuele II, 39,
00186 – Roma, Italia
e-mail:
paoloemilioricci@gmail.com,
p.ricci@uninettunouniversity.net

პაოლო ემილიო რიჩი

AMS 2010 Mathematics Subject Classifications: 33C99; 12E10; 42C10; 42C05
Keywords and phrases: Spirals, Grandi's roses, pseudo-Chebyshev functions, recurrence relations, differential equations, orthogonality properties.

დაიცვა სადოქტორო დისერტაცია (cum laude – უმაღლესი შეფასებით) პროფესორ გაეტანო ფიკერას ხელმძღვანელობით რომის უნივერსიტეტ „La Sapienza"-ში; 40 წელი ეწეოდა პედაგოგიურ მოღვაწეობას „La Sapienza"-სა და კატანიის უნივერსიტეტებში. გარკვეული წლები მან იმოღვაწევა რომის ბიომედიცინის უნივერსიტეტ „Campus Bio-medico of Rome"-ში. ამჟამად ის არის რომის ტელემატიკის უნივერსიტეტ „UniNettuno"-ს პროფესორი. იგი მათემატიკაში რამდენიმე მნიშვნელოვანი საერთაშორისო სიმპოზიუმის მთავარი ორგანიზატორი და მსოფლიოში ჩატარებული მრავალი კონფერენციის პლენარული მომხსენებელია; არის 250-ზე მეტი სამეცნიერო ნაშრომის ავტორი/ თანაავტორი; მათემატიკასა და გამოყენებით მათემატიკაში რამდენიმე წიგნის ავტორი და რედაქტორი. 2003 წელს მას ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში გადაეცა ი.ვეკუას სახ. გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის საპატიო დოქტორის წოდება; 2015 წელს დაჯილდოვდა სიმონ სტევინის სახ. გეომეტრიის ინსტიტუტის (ზანდვორტი, ნიდერლანდები) სპეციალური პრიზით; 2016 წელს მიიღო ინდოეთის ბუნდელკხანდის უნივერსიტეტის სამეცნიერო საბჭოს ჯილდო „ცხოვრებაში მიღწეული წარმატებებისათვის" – "Lifetime Achievement Award".



სტატია ინგლისურიდან თარგმნა ილია თავხელიძემ

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
ასოცირებული პროფესორი
ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა
ფაკულტეტი, აკადემიკოს ილია ვეკუას პრემიის ლაურეატი;
1984 წ. დაჯილდოებულია უკრაინის მათემატიკოსთა 2009 წლის
ყრილობის, აკადემიკოს ნიკოლოზ ბოგოლიუბოვის
მემორიალური ოქროს მედლით.

მიმართვა მკითხველს

ჩემთვის საპატიო და სასიამოვნოა, გამოვეხმაურო სამეცნიერო-პოპულარულ ჟურნალ „მათემატიკა"-ს რედაქტორის წინადადებას სტატიის წარდგენის შესახებ. მრავალი წლის განმავლობაში ვთანამშრომლობდი ქართველ კოლეგებთან, რომლებიც არიან პრესტიჟული მათემატიკური სკოლის მემკვიდრეები. ამ სკოლამ დიდი ყურადღება დაუთმო მათემატიკის ფუნდამენტური მიმართულებების შესწავლას კაცობრიობის პროგრესისათვის. დარწმუნებული ვარ, რომ ამ მშვენიერი ქვეყ-

ნის ახალგაზრდა თაობები ღირსი გახდებიან იმ ტრადიციებისა, რომელიც მათმა წინა თაობებმა შექმნეს და რუდუნებით განაგრძობენ დაწყებულ საქმეებს.

1. შესავალი

გეომეტრიისა და ალგებრის შერწყმამ, რომელსაც საფუძველი ჩაუყარა მე-17 საუკუნეში რენე დეკარტმა, გვიჩვენა გზა, ანალიზურად შეგვესწავლა ის ამოცანები, რომლებსაც ანტიკური ბერძნები გეომეტრიული კუთხით განიხილავდნენ. ამან საშუალება მოგვცა გამოგვევლინა ერთიანი მათემატიკური თეორია, რომელიც ერთი თვალთახედვიდან მეორეზე გადასვლის საშუალებას იძლევა. ამგვარად, ზოგჯერ ამოცანის გეომეტრიული სტრუქტურის შესწავლა შესაძლებლობას გვაძლევს პარალელურად განვავითაროთ ანალიზური თეორია, რაც პირველისაგან დამოუკიდებლად წარმოუდგენელი იქნებოდა.

ამ სტატიის ძირითადი მეთოდი იმაში მდგომარეობს, რომ პოლარული კოორდინატებიდან დეკარტეს კოორდინატებში გადასვლით, ვაჩვენებთ კავშირს მთელი ინდექსის მქონე როდონეას წირებსა (ანუ გრანდის ვარდებსა) და ჩებიშევის პირველი გვარის პოლინომებს შორის. შემდეგ, ვამჩნევთ რა, რომ როდონეას წირები არსებობენ რაციონალური ინდექსებისთვისაც, ინტუიციურად ვგრძნობთ ანალიზური თეორიის არსებობას, რომელიც ვრცელდება რაციონალური ინდექსის მქონე ამგვარ პოლინომებზე. ამგვარად ვღებულობთ მათემატიკურ ობიექტებს, რომლებიც, მართალია, თავად არ წარმოადგენენ პოლინომებს, მაგრამ აქვთ ამგვარი პოლინომების დამახასიათებელი თვისებები. მათ ჩებიშევის ფსევდოფუნქციები ეწოდათ . ჩვენ მიმოვიხილავთ ამ ფსევდოფუნქციების თვისებებსა და მათი სისტემების სისრულეს. ცოტა უფრო მეტ ყურადღებას დავუთმობთ ნახევრად მთელი ხარისხის ფსევდოფუნქციებს, რადგან მათ, ორთოგონალობისა და სისრულის გამო, დიდი მნიშვნელობა აქვთ ფუნქციების მწკრივად წარმოდგენისას. მასალა რომ ფართო აუდიტორიისათვის იყოს გასაგები, ჩვენ დავეყრდნობით მხოლოდ ელემენტარული სკოლის პროგრამას, როგორიცაა ტრიგონომეტრიული ტოლობები.

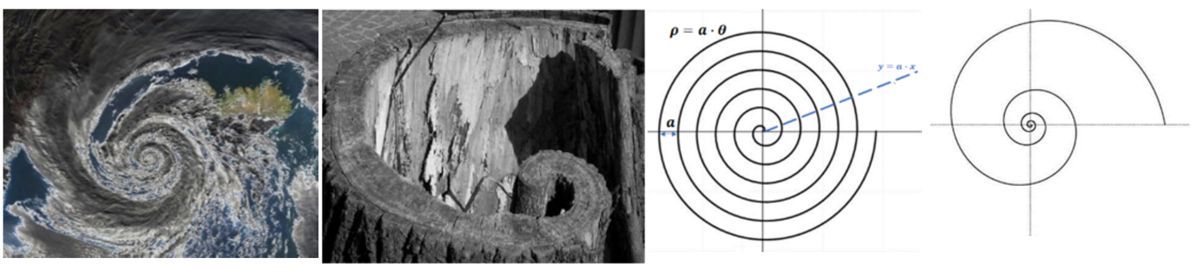
აღსანიშნავია, რომ აქ განხილული საკითხების გავრცელება მრავალ ცვლადზე გამოიყენება მატრიცების ფესვების დასადგენად [27] და პოლინომის ნულების სიმკვრივის ე. წ. წილადური მომენტების გამოსაკვლევად [28].

2. დეკარტული და პოლარული კოორდინატები

საზოგადოდ ცნობილია, რომ დეკარტული კოორდინატების პოლარული ჩანაცვლებით შესაძლებელია გარკვეული თანადოდების შემოღება. ფაქტია, რომ, თუ განვიხილავთ $y = f(x)$ და შესაბამისად $\rho = f(\theta)$, ანუ ერთსა და იმავე გამოსახულებას დეკარტისა და პოლარულ სიბრტყეებში, მივიღებთ განსხვავებულ შედეგებს. ამგვარ ქმედებას ელემენტარული ფუნქციები, როგორებიცაა: წრფეები, ხარისხოვანი და მაჩვენებლიანი ფუნქციები, გადაჰყავს სპირალებსა და ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებსა და როდონეას წირებში.

სპირალები და გრანდის ვარდები ანუ როდონეას წირები

ბუნებრივ მოვლენებში ხშირად წარმოიქმნებიან სპირალები [2,14], ასეთებია, მაგალითად, ქარიშხლები((სურ.1ა), გალაქტიკები და ხის მორების გადანაჭრების ნახატები (სურ.1ბ)



ა. ქარიშხალი | ბ. გადაჭრილი ხე [2] | გ. არქიმედეს $\boldsymbol{\rho = a \cdot \theta}$ | დ. ბერნულის $\boldsymbol{\rho = a \cdot e^{k\theta}}$

სურ.1. ბუნებრივი და მათემატიკური სპირალები

ასეთი თანადობის ყველაზე მარტვი მაგალითებია:

- სხივი $y = a \cdot x, a$ და $x > 0$ ხდება არქიმედეს სპირალი $\rho = a \cdot \theta$, [16], (სურ.1გ).
- $y = a \cdot e^{kx}$ ექსპონენციალური ფუნქციის გრაფიკი ხდება ბერნულის $\rho = a \cdot e^{k\theta}$ (ანუ ლოგარითმული) სპირალი, „გორგლის“ ანუ „ლოკოკინას“ წირი, რომელიც ფართოვდება, თუ $k > 0$, იკუმშება კოორდინატთა სათავის მიმართ, როდესაც $k < 0$ (სურ.1დ). ლოგარითმული სპირალი აღმოჩენილია 1638 წელს რენე დეკარტის მიერ და შესწავლილია იაკობ ბერნულის შრომებში. ეს წირი არის ფრაქტალის პირველი მაგალითი და იაკობ ბერნულის საფლავზე ამ წირის ირგვლივ არის წარწერა — „Eadem Mutata Resurgo“ (შეცვლილი აღვდგები ისეთივე, სურ.2გ).
- ფუნქცია $y = a \cdot x^{\frac{1}{2}}, a$ და $x > 0$ („წაქცეული პარაბოლა“) ხდება ფერმას სპირალი $\rho = a \cdot \theta^{\frac{1}{2}}$ (სურ. 3ა).
- ხარისხოვანი ფუნქციები $y = a \cdot x^{\frac{m}{n}}$, a, x და $\frac{m}{n} > 0$ ხდებიან $\rho = a \cdot \theta^{\frac{m}{n}}$ სპირალები, რომელთა ხვიები ფართოვდება, თუ $m > n$ (სურ.3 ბ.) ან იკუმშება, როგორც ფერმას სპირალში, თუკი $m < n$ (სურ. 3ა).
- ხარისხოვანი ფუნქციები $y = a \cdot x^{\frac{m}{n}}, a$ და $x > 0$; $\frac{m}{n} < 0$, ხდებიან $\rho = a \cdot \theta^{-\left|\frac{m}{n}\right|}$ სპირალები, რომელთა ხვიები ასიმპტოტურად მიისწრაფვიან ერთიანი რადიუსის წრისაკენ (სურ. 3გ).

არქიმედე 287 — 212 ძვ.წა ნახატი დომენიკო ფეტი

რენე დეკარტი კარტეზიო 1596 —1650

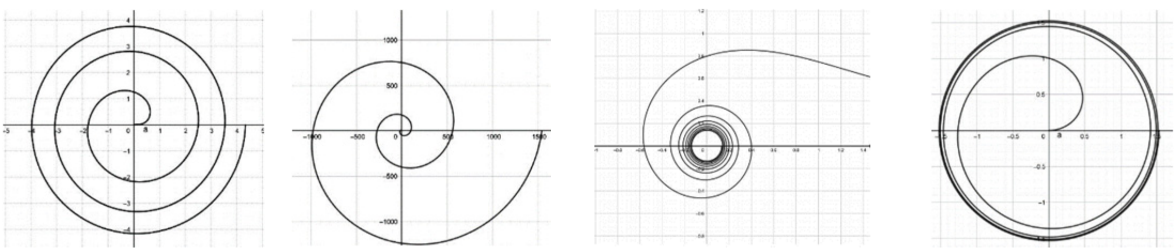
გ. „Eadem Mutata Resurgo“

იაკობ ბერნული (1654—1705)

პიერ ფერმა (1601—1665)

სურ. 2

- ფუნქცია $y = \arctan x, x > 0$ ხდება ასიმპტოტური სპირალი $\rho = \arctan \theta$, რომელიც ასიმპტოტურად მიისწრაფვის $\frac{\pi}{2}$ რადიუსის მქონე წრისაკენ (სურ. 3დ).



ა. ფერმას $\rho = a \cdot \theta^{1/2}$

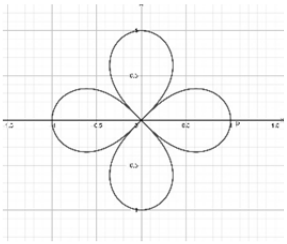
ბ. $\rho = a \cdot \theta^{3/2}$

გ. $\rho = a \cdot \theta^{-1/2}$

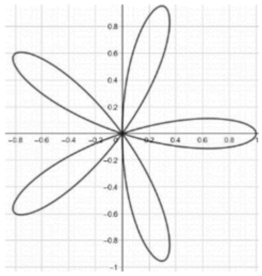
დ. $\rho = \arctan(\theta)$

სურ. 3. კლასიკური და ასიმპტოტური სპირალები

- ტრიგონომეტრიული ფუნქციები $y = \cos(nx)$ და $y = \sin(nx)$ (სადაც n დადებითი მთელი რიცხვია) ხდებიან როდონეას წირები: $\rho = \cos(n\theta)$ თუ $-\frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi k}{n} \le \theta \le \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi k}{n}, k \in N$ და $\rho = \sin(n\theta)$, თუ $\frac{2\pi k}{n} \le \theta \le \frac{\pi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$, [17,18] (სურ. 4).



ა. $\rho = \cos(2\theta)$



ბ. $\rho = \cos(5\theta)$

ლუიჯი გვიდო გრანდი
1671—1742

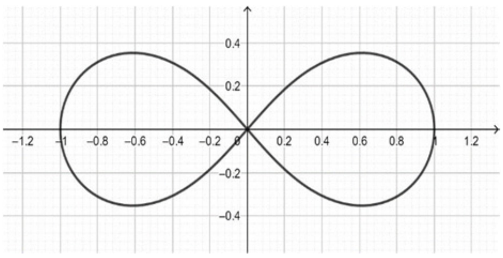
გოტფრიდ ლეიბნიცი
1646 — 1716

სურ. 4. გრანდის ვარდები ანუ როდონეას წირები

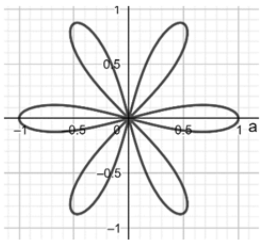
პოლარულ კოორდინატებში ჩაწერილი წირები $\rho = \cos(n\theta)$ აგრეთვე ცნობილია, როგორც გრანდის ვარდები, გვიდო გრანდის პატივსაცემად, რომელმაც ამ წირების შესახებ შეატყობინა გოტფრიდ ლეიბნიცს 1713 წელს (სურ. 4 ა და ბ). პოლარულ კოორდინატებში ჩაწერილი $\rho = \sin(n\theta)$ წირები $-\frac{\pi}{2n}$ — რადიანით მობრუნების სიზუსტით გრანდის წირების ეკვივალენტურია. როგორც სურათი 3ბ-დან ჩანს, გრანდის ვარდს n ფურცელი აქვს, თუ n კენტი რიცხვია, ხოლო $2n$ ფურცელი, თუ n ლუწია (სურ.3 ა). ცხადია, რომ ამ პოლარული თანადობის გამოყენებით შეუძლებელია მივიღოთ $4n + 2$ ფურცლის მქონე გრანდის ვარდი, სადაც $n \in N \cap \{0\}$. $4n + 2$ ფურცლის მქონე გრანდის ვარდის მიღება შესაძლებელია ბერნულის წირისა (ანუ „ლემნისკატა“, „ლენტისებრი“) და მისი განზოგადების საშუალებით. უფრო ზუსტად:

- ტრიგონომეტრიული ფუნქცია $y = \sqrt{\cos(2x)}, -\frac{\pi}{4} + \pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2n} + \pi k, k \in N$ ხდება ორფოთლიანი ბერნულის „ლენტი“ $\rho = \cos^{\frac{1}{2}}(2\theta), -\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \theta \leq \frac{\pi}{2n} + \pi k$ ანუ ორფურცლიანი ვარდი (სურ. 5ა).
- ფუნქციები $y = \sqrt{\cos(4n+2)x}$, თუ $n > 1, -\frac{\pi}{4(2n+1)} + \frac{\pi k}{(2n+1)} \leq x \leq \frac{\pi}{4(2n+1)} + \frac{\pi k}{(2n+1)}$ ხდებიან პოლარული განტოლებები $\rho = \cos^{\frac{1}{2}}((4n+2)\theta)$, $-\frac{\pi}{4(2n+1)} + \frac{\pi k}{(2n+1)} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4(2n+1)} + \frac{\pi k}{(2n+1)}$ ანუ $4n + 2$ — ფურცლის მქონე ვარდები (სურ. 5 ბ. და გ.)

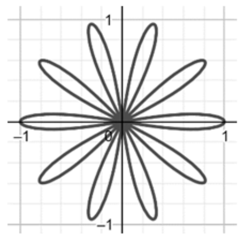
წილადმაჩვენებლიანი როდონეას წირის რამდენიმე მაგალითი მოყვანილია სურათებზე 6-7



ა. ბერნულის „ლენტი“ $n = 0$



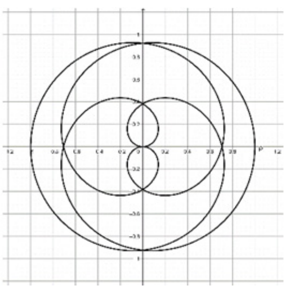
ბ. $n = 1$



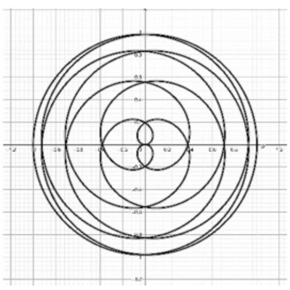
გ. $n = 2$

$$\rho = \cos^{\frac{1}{2}}((4n+2)\theta)$$

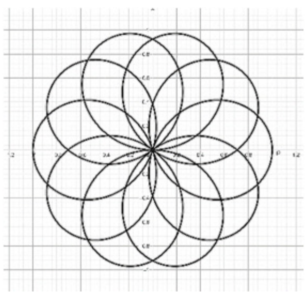
სურ. 5. $(4n + 2)$-ფურცლიანი ვარდები



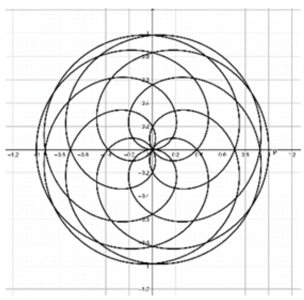
ა. $\rho = \cos\left(\frac{1}{4}\theta\right)$



ბ. $\rho = \cos\left(\frac{1}{8}\theta\right)$

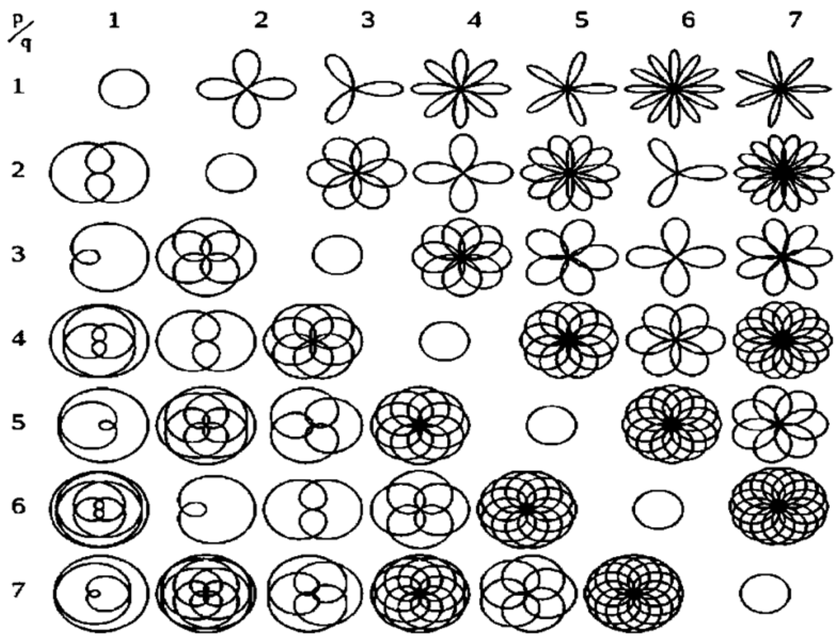


გ. $\rho = \cos\left(\frac{5}{4}\theta\right)$



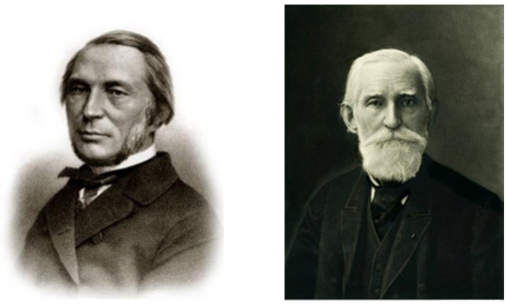
დ. $\rho = \cos\left(\frac{3}{8}\theta\right)$

სურ. 6. წილადმაჩვენებლიანი გრანდის ვარდები ანუ როდონეას წირები



სურ. 7. წილადმაჩვენებლიანი როდონეას წირები $\cos\left(\frac{p}{q}\theta\right)$

3. პაფნუტი ჩებიშევი



სურ. 8. პაფნუტი ჩებიშევი 1821—1894

კ. ჩებიშევა, თავისი ოჯახის ისტორიის აღწერისას, ამბობს, რომ ჩებიშევების ერთ-ერთი წინაპარი იყო თათრული წარმოშობის სამხედრო მეთაური ჩებიშ ხანი, რომელიც მოხსენიებულია მე-17 საუკუნის ჟამთაღწერისას. პ.ჩებიშევის ბიოგრაფები პ.ბუტცერი და ფ.იონგმანსი [4] ამბობენ, რომ ჩებიშევი იყო რევოლუციამდელი სანქტ-პეტერბურგის რუსული მათემატიკური სკოლის შემქმნელი, რომლის შრომები მისი მხოლოდ არქიმედესთან შედარების შესაძლებლობას იძლევა. XIX საუკუნის შუაწლებიდან მოყოლებული, ის რეგულარულად სტუმრობდა პარიზს, იყო შარლ ერმიტისა და ჟოზეფ ლიუვილის მეგობარი. მისი მრავალრიცხოვანი შრომები მოიცავს მათემატიკის სხვადასხვა დარგს, ისეთებს, როგორიცაა: აპროქსიმაციის თეორია, ალბათობის თეორია, რიცხვთა თეორია, მექანიზმთა თეორია და აგრეთვე მრავალი ტექნიკური და გამოყენებითი მათემატიკური ამოცანა. ის იყო სხვადასხვა მექანიზმის შემქმნელი, კერძოდ, მექანიკური კალკულატორისა, რომელსაც არითმომეტრი ეწოდა. მისი ღვაწლი მოკლედ შესაძლოა შემდეგნაირად შეჯამდეს.

ალბათობის თეორიაში: ჩებიშევის უტოლობა

ნორმალური (ანუ გაუსის) განაწილების შემთხვევში ჩვენ ვიცით, რომ მონაცემების დაახლოებით 68% თავმოყრილია საშუალოდან ერთი სტანდარტული გადახრის ფარგლებში; დაახლოებით 95% თავმოყრილია საშუალოდან ორი სტანდარტული გადახრის ფარგლებში და დაახლოებით 99% კი — სამი სტანდარტული გადახრის ფარგლებში.

გავიხსენოთ, რომ სტანდარტული გადახრა σ არის არითმეტიკული კვადრატული ფესვი შერჩევითი დისპერსიიდან, რომელიც, თავის მხრივ, წარმოადგენს მონაცემების μ საშუალოდან კვადრატული გადახრების არითმეტიკულ საშუალოს. მაგრამ, თუ მონაცემთა ერთობლიობას არ აქვს ნორმალური განაწილება, მაშინ მონაცემთა სხვა რაოდენობა შეიძლება მოხვდეს საშუალოდან სტანდარტული გადახრის ამა თუ იმ რაოდენობაში. ჩებიშევის უტოლობა გვეუბნება, რომ ნებისმიერი შერჩევისათვის მონაცემთა, სულ ცოტა, $1-\frac{1}{K^2}$ ნაწილი ვარდება საშუალოდან K სტანდარტული გადახრის ფარგლებში (K არის ნებისმიერი ნამდვილი 1-ზე მეტი რიცხვი).

$$P(|X-\mu|)\ \geq K\sigma \leq \frac{1}{K^2}$$

ეს უტოლობა ალბათური თანაფარდობის შედეგია, რომელიც ასევე შეიძლება გამოყენებულ იქნეს სტატისტიკაში. K=2-ისთვის გვაქვს $1-\frac{1}{K^2} = 1/4 = 3/4 = 75\%$. ამ შემთხვევაში ჩებიშევის უტოლობა გვეუბნება, რომ ნებისმიერი განაწილების მონაცემების, სულ ცოტა, 75% მაინც მოთავსებულია საშუალოდან ორი სტანდარტული გადახრის ფარგლებში.

მაგალითი.

ექსპედიტორს საწყობში აქვს ფუთების გარკვეული რაოდენობა და ადასტურებს, რომ ფუთის საშუალო წონაა 9 კგ, სტანდარტული გადახრა კი — 1.5 კგ. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით, ჩვენ ვიცით, რომ ფუთების, სულ მცირე, 75%-ის წონა მოთავსებულია წონის საშუალო მნიშვნელობიდან ორი სტანდარტული გადახრის ფარგლებში. ორჯერ სტანდარტული გადახრა გვაძლევს 2 × 1.5 კგ = 3 კგ-ს. საშუალო 9 კგ-ს თუ გამოვაკლებთ და მივუმატებთ 3 კგ-ს, მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ფუთების წონის 75% არის 6-დან 12 კგ-მდე.

რიცხვთა თეორიაში: თეორემა მარტივ რიცხვთა შესახებ

ჩებიშევის ღვაწლიდან აღსანიშნავია ფუნდამენტური შედეგი, რომელიც ეხება მარტივი რიცხვების განაწილებას. აღვნიშნავთ რა $\pi(n)$-ით მარტივ რიცხვთა რაოდენობას, რომელიც არაუმეტესია n-ზე, მან აჩვენა, რომ თუ არსებობს ზღვარი: $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)\log n}{n}$, მაშინ ის უნდა იყოს 1-ის ტოლი. ამ ზღვრის არსებობა დამტკიცდა, მალევე მისი სიკვდილის შემდეგ, 1996 წელს ადამარისა და ვალე პუსენის მიერ. ა. სელბერგმა და პ.ერდოშმა 1949 წელს შემოგვთავაზეს ამ თეორემის „ელემენტარული“ დამტკიცება.

კარლ ფრიდრიხ გაუსი 1777 – 1855

ჟაკ სოლომონ ადამარი 1865 – 1968

შარლ ჟან დე ლა ვალე პუსენ 1866 – 1962

ალტე სელბერგი 1917 – 2007

პაულ ერდოში 1913 – 1996

სურ. 9

აპროქსიმაციის თეორიაში: „საუკეთესო მიახლოების“ თეორია

მისმა პირველმა ნაშრომებმა «Теория мэханизмов connus sous le nom de parall´elogrammes». (1854 г.) და «Sur les questions de minima qui se rattachent` a la représentation приблизительно des fonctions» (1859 г.) სათავე დაუდო მის მექანიზმთა თეორიასთან დაკავშირებულ 40-წლიან გამოკვლევას მიახლოების თეორიაში. მიზანი იყო ჯეიმს უატის ორთქლის მანქანის გაუმჯობესება. ფაქტობრივად, შესწავლამ მექანიზმისა, რომელსაც წრიული მოძრაობა გადაჰყავს

წრფივ მოძრაობაში და ჯ.უატის შედეგების გაუმჯობესებამ მიიყვანა ის ახალი მიახლოების (ე.წ. „საუკეთესო მიახლოების“) ამოცანებამდე, რომელთა ამოხსნებშიც გამოიყენება ე.წ. ჩებიშევის პირველი გვარის პოლინომები.

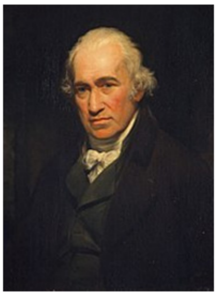
პრობლემა შემდეგ ტერმინებში ყალიბდება: მოცემულია $f \in C([a,b])$ ინტერვალზე უწყვეტი ფუნქცია — ვიპოვოთ ყველა $p_n(x) \in P_n$, ერთი ცვლადის n -ზე არაუმეტესი ხარისხის მქონე პოლინომებს შორის ისეთი, რომელიც ახორციელებს ამ ფუნქციის საუკეთესო მიახლოებას, ანუ რომელიც მინიმიზაციას უკეთებს შემდეგ თანადობას: $max_{\,x\in[a,b]}\,|f(x)-p_n(x)|$. ეს კი ნიშნავს იმას, რომ საძიებელია ისეთი პოლინომი $p_n(x)$, რომელზეც შემდეგი შედეგი მიიღება:

$$E_n[f] = \inf_{p_n(x)\in P_n} \max_{(x\in[a,b])} |f(x)-p_n(x)| = min$$

მინიმუმის არსებობა დაამტკიცეს კიხბერგრმა (1902 წ.) და ე. ბორელმა (1905 წ.). რაიმე დამატებითი შეზღუდვის გარეშე მოიაზრება, რომ $[a,b] \equiv [-1,1]$ და ამოხსნა მოიცემა $T_n(x)/2^{n-1}$ ჩებიშევის პირველი გვარის ერთი ცვლადის პოლინომით. ეს პოლინომები აჩვენებენ სხვა თვისებებსაც: მათი ნულები არიან ოპტიმალური ინტერპოლაციის კვანძები, ამიტომაა, რომ მათი არჩევით ინტერპოლაციის ცდომილება მინიმიზდება.

ისინი აგრეთვე გაუსის კვადრატურული ფორმულისათვის ოპტიმალურ კვანძებს წარმოადგენენ. მათი საშუალებით დგინდება $(1-x^2)^{-1/2}$ — წონის მიმართ $[-1,1]$ ინტერვალზე ოპთოგონალობა და მრავალი სხვა.

მთელი ცხოვრების მანძილზე ჩებიშევი ანაცვლებდა თეორიულ კვლევასა და პრაქტიკულ კონსტრუირებას. 1852 წელს ის ბერლინში ეწვია იმ დროის ყველაზე გამოჩენილ მეცნიერ ოიჰან პეტერ გუსტავ ლეჟენ დირიხლეს და „დიდ სიამოვნებას იღებდა, როგორც მისი თეორიულ მექანიკაში ლექციების მსმენელი“ (პ.ჩ). მექანიზმებისადმი ინტერესს ადასტურებს მისი უწყვეტი ქმედების „მთვლელი“ მანქანის კონსტრუქცია, რომელიც ცნობილია, როგორც არითმომეტრი.



ჯეიმს უატი
1736 – 1819

ემილ ბორელი
1871 – 1956

დირიხლე
1805 –1859

არითმომეტრი

ვალტერ გუჩი
1927 –

სურ. 10

4. ჩებიშევის პოლინომები

ამოვიდეთ იგივეობიდან $(\mathrm{e}^{it})^n = \mathrm{e}^{int}$ და გამოვიყენოთ ეილერის ფორმულა:

$$(\cos t + i\sin t)^n = (\mathrm{e}^{it})^n = \mathrm{e}^{int} = \cos(nt) + i\sin(nt). \qquad (1)$$

მარცხენა მხარის პირველი წევრი ნიუტონის ბინომის ფორმულის თანახმად:

$$(\cos t + i\sin t)^n = \sum_{k=0}^{n} i^k \binom{n}{k} \cos^{n-k} t \sin^k t \ =$$

$$\sum_{h=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^h \binom{n}{2h} \cos^{n-2h} t \sin^{2h} t \ + i \sin t \sum_{h=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^h \binom{n}{2h+1} \cos^{n-2h--} t \sin^{2h+1} t \qquad (2)$$

$$= \sum_{h=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^h \binom{n}{2h} \cos^{n-2h} t \,(1-\cos^2 t)^h \ + i \sin t \sum_{h=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^h \binom{n}{2h+1} \cos^{n-2h--} t \,(1-\cos^2 t)^h.$$

თუ შევადარებთ (1) და (2) ფორმულას, დავინახავთ, რომ:

$$\cos(nt) = \sum_{h=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^h \binom{n}{2h} \cos^{n-2h} t \,(1-\cos^2 t)^h \tag{3}$$

$$\frac{\sin(nt)}{\sin t} = \sum_{h=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^h \binom{n}{2h+1} \cos^{n-2h--} t \,(1-\cos^2 t)^h. \tag{4}$$

თუ (3) და (4) გამოსახულებაში ჩავსვამთ $x = \cos t$ ცვლადს, ჩვენ მივიღებთ x ცვლადის მიმართ ორ, შესაბამისად, n და $\mathrm{n}-1$ ხარისხის პოლინომს, რომელთაც ეწოდათ, სათანადოდ, ჩებიშევის პირველი და მეორე გვარის პოლინომები:

$$T_n(x) := \cos\big(n \cdot arcos(x)\big) = \sum_{h=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^h \binom{n}{2h} \mathrm{x}^{n-2h} \cdot (1-x^2)^h. \tag{3 *}$$

$$U_{n-1}(x) := \frac{\sin\big(narcos(x)\big)}{\sin\big(arcos(x)\big)} = \sum_{h=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^h \binom{n}{2h+1} \mathrm{x}^{n-2h--} \cdot (1-x^2)^h. \tag{4 *}$$

ამ პოლინომებს მრავალი ძალზე მნიშვნელოვანი თვისება გააჩნია [20,26], ჩვენ კი მხოლოდ ზოგიერთს წარმოგიდგენთ.

4.1. პირველი და მეორე გვარის ჩებიშევის პოლინომები

ჩებიშევის პირველი გვარის პოლინომების მთავარი თვისებები

ცნობილი ტრიგონომეტრიული ტოლობა:

$$\cos\big((n+1)t\big) + \cos\big((n-1)t\big) = 2\cos t \, \cos(nt)$$

იძლევა რეკურსიულ ფორმულას:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

ანუ საწყის მნიშვნელობებს. $T_0(x) = \cos(0 \cdot t) = 1$ და $T_1(x) = \cos(1 \cdot t) = x$ გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი მრავალწევრები:

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$
....

შევნიშნოთ, რომ:

- ყოველი $T_n(x)$ პოლინომის მთავარი კოეფიციენტია 2^{n-1} ;
- თუ $T_n(x)$ პოლინომის რიგი ლუწია (ანუ $n = 2m, m \in N$), მაშინ $T_{2m}(x)$ წარმოადგენს x ცვლადის მიმართ ლუწ ფუნქციას, ხოლო, თუ რიგი კენტია, მაშინ $T_{2m+1}(x)$ არის x ცვლადის მიმართ კენტი ფუნქცია;
- ნებისმიერი $n \in N$ რიგის შემთხვევაში: $T_n(1) = 1$ და $T_n(-1) = (-1)^n$.

ტრიგონომეტრიულ მწკრივთა თეორიიდან ცნობილია, რომ $\int_0^\pi \cos(nt)\cos(mt)dt = 0$, თუ $m \neq n$ (ორთოგონალობის პირობა). შესაბამისად, თუ შემოვიღებთ ახალ $t = arcos(x)$ ცვლადს, მარტივად მივიღებთ, რომ $(1-x^2)^{-1/2}$ — წონის მიმართ $[-1,1]$ ინტერვალზე ჩებიშევის პირველი გვარის პოლინომები აკმაყოფილებენ ორთოგონალობის პირობას, ანუ, თუ $m \neq n$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{(1-x^2)}}dx = 0.$$

გარდა ამისა, ამას მივყავართ იმასთან, რომ:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}dx = \pi.$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{(1-x^2)}}dx = \int_{0}^{\pi} \cos^2(nt)dt = \frac{\pi}{2}, \qquad \forall n \in N$$

$T_n(x)$ პოლინომის ყველა ნული (ფესვი) არის ნამდვილი რიხვი, ერთჯერადი (მარტივი) და $[-1,1]$ ინტერვალშია მოთავსებული, უფრო ზუსტად, ისინი მოიცემა ფორმულით:

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right), \ \ k = 0,1,2,\dots,n-1$$

ფაქტობრივად:

$$|T_n(x_k)| = \left|\cos\left(n\cdot arcos(x_k)\right)\right| = \left|\cos\left((2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right| = 0$$

ჩებიშევის მეორე გვარის პოლინომების მთავარი თვისებები

ანალოგიურად შესაძლებელია მიღებულ იქნეს ჩებიშევის მეორე გვარის პოლინომების ის თვისებები, რომლებსაც აქ მოვიტანთ. ისინი იმეორებენ იმავე რეკურსიას, რომელსაც $T_n(x)$:

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

ანუ ფორმულა (4)-ის საწყისი მნიშვნელობების. $U_0(x) = \frac{\sin(1\cdot arcos(x))}{\sin(arcos(x))} = 1$ და $U_1(x) = \frac{\sin(2\cdot arcos(x))}{\sin(arcos(x))} = = \frac{2\sin(arcos(x))\cos(arcos(x))}{\sin(arcos(x))} = 2x$ გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი მრავალწევრები:

$$U_2(x) = 4x^2 - 1$$
$$U_3(x) = 8x^3 - 4x$$
$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$
$$\dots$$

ჩებიშევის მეორე გვარის პოლინომები მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ არაგადაგვარებული 2×2 მატრიცების ხარისხების წარმოდგენისას [22,23]. აგრეთვე იყო მცდელობები ამ პოლინომების გაფართოებისა მრავალ ცვლადზე, რათა შესაძლებელი ყოფილიყო არაგადაგვარებული $r\times r$ მატრიცების ხარისხების წარმოდგენა [23,24].

შენიშვნა 1. ჩებიშევის პოლინომები წარმოადგენენ კერძო შემთხვევებს იაკობის $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ პოლინომებისა, რომლებიც, თავის მხრივ, ორთოგონალურია $(1-x)^\alpha\cdot(1+x)^\beta$- წონის მიმართ $[-1,1]$ ინტერვალზე, შესაბამისად:

$$T_n(x) = P_n^{(-1/2,-1/2)}(x), \qquad U_n(x) = P_n^{(1/2,1/2)}(x).$$

შესაბამისად, ჩებიშევის პოლინომები შესაძლოა გამოყვანილ იქნენ უფრო ზოგადი, ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების კონცეფციიდან.

4.2. მესამე და მეოთხე გვარის ჩებიშევის პოლინომები

საინტერპოლაციო და კვადრატურის ამოცანებთან დაკავშირებით, ჩებიშევის პოლინომების კიდევ ერთი წყვილის განხილვაა მიზანშეწონილი. ისინი შეესაბამებიან სხვადასხვა წონის შერჩევას:

$$V_n(x) = P_n^{(1/2,-1/2)}(x), \qquad W_n(x) = P_n^{(1/2,-1/2)}(x)\,.$$

ამ პოლინომებს ვ.გუჩის (W. Gautsch)[8] მიერ ეწოდა მესამე და მეოთხე გვარის ჩებიშევის პოლინომები [19]. ისინი $[-1,1]$ ინტერვალზე შემდეგნაირად განისაზღვრებიან:

$$V_n(x) := \frac{\cos\left[\left(n + {}^{1}\!/_{2}\right) n\,arcos(x)\right]}{\cos\left[{\left(arcos(x)\right)}\big/_{2}\right]}$$

(5)

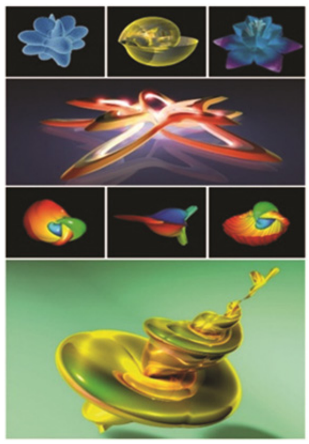
$$W_n(x) := \frac{\sin\left[\left(n + {}^{1}\!/_{2}\right) n\,arcos(x)\right]}{\sin\left[{\left(arcos(x)\right)}\big/_{2}\right]}$$

რადგან სამართლიანია ტოლობა $W_n(x) = (-1)^n V_n(-x)$, ჩებიშევის მესამე გვარის პოლინომები გადაიქცევა მეოთხე გვარის პოლინომად, შეცვლის რა $[-1,1]$ ინტერვალის ბოლოებს, ამიტომაცაა, რომ ისინი შინაარსობრივად დიდად არ განსხვავდებიან.

5. გამოყენებები

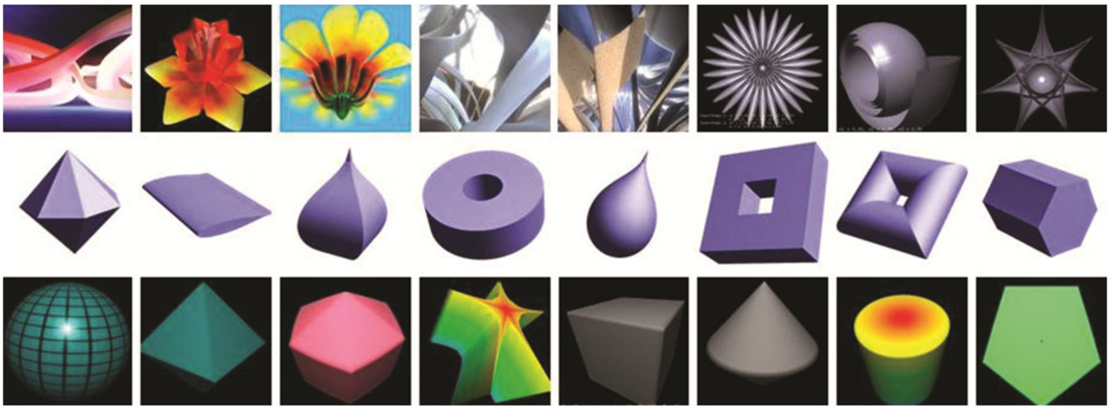
ბუნებაში არსებული ფორმების ანალიზურად გამოსახვამ დიდი ხანია რაც მიიქცია მეცნიერთა ყურადღება. აქ უნდა გავიხსენო დ'არსი ტომსონის შესანიშნავი წიგნი [31] და ი.ჰილისის სრულიად ახალი ნაშრომები [9-14]. ჰილისმა შეძლო ლამეს წირების იდეის გაფართოება ორ- და სამგანზომილებიან სივრცეებში. მან შეძლო ბუნებაში არსებული ძალიან ბევრი ფორმის აღწერა ე.წ. სუპერფორმულაზე დაყრდნობითა და შესაბამისი პარამეტრების შერჩევით. ამ ნაშრომებმა მეცნიერთა წრეში ფართო გამოხმაურება ჰპოვა [6,11,12,19] იმიტომაც, რომ მათი ძალზე საინტერესო გამოყენება იქნა შესაძლებელი დაწყებული ბოტანიკიდან, დამთავრებული ელეტრომაგნეტიზმით, კერძოთდ, ტელეკომუნიკაციისათვის ანტენების წარმოებაში (სურ. 11-12).

იოჰან ჰილისი



სურ. 11. სამგანზომილებიანი სუპერზედაპირები

აგრეთვე მინდა გავიხსენო ჩემი, იოჰან ჰილისისა და ილია თავხელიძის ნაშრომები, რომლებიც ეძღვნება განზოგადებული მებიუს-ლისტინგის სხეულების შესწავლას [15, 32], რომლებსაც საქმე აქვთ ბუნებრივ ფორმებთან და აზოგადებენ მეიუსის ფურცელს.



სურ.12. სამგანზომილებიანი ბუნებრივი და სუპერზედაპირები

შემდგომ, შემოვიტანთ რა ჩებიშევის პირველი გვარის პოლინომს $T_n(x) = \cos(nt)$, სადაც $t = arcos(x)$ და შევნიშნავთ, რომ ის კავშირშია შესაბამის როდონეას $\rho = \cos(n\theta)$ წირთან, აღმოვაჩენთ, რომ გრანდის ვარდები აგრეთვე არსებობს რაციონალური ინდექსისთვისაც. ამიტომ შესაძლებელი ხდება, რომ ვივარაუდოთ ე.წ.რაციონალური ინდექსის ჩებიშევის ფსევდოფუნქციების შემოტანის შესაძლებლობა. მართლაც, ეს ფუნქციები შეესაბამებიან როდონეას $\rho = \cos\left({}^{p\theta}/_{q}\right)$ წირებს და მიიღება n მთელი ინდექსის ${}^{p}/_{q}$ რაციონალურით შეცვლით. ნაჩვენებ იქნა, რომ ამგვარ ფუნქციებს პოლინომიალურის ტიპის თვისებები გააჩნია. სისრულისთვის უნდა აღვნიშნოთ, რომ ანალოგიურად განისაზღვრება ჩებიშევის მეორე, მესამე და მეოთხე გვარის ფსევდოფუნქციები. დეტალური ინფორმაცია ამ ფუნქციების შესახებ იხილეთ [3, 5, 7, 26].

6. ჩებიშევის ფსევდოფუნქციები

ვიწყებთ ჩებიშევის პირველი და მეორე გვარის ფსევდოფუნქციების, ანუ ჩებიშევის რაციონალურინდექსიანი პოლინომის განსაზღვრას. განმარტების თანახმად:

$$T_{\frac{p}{q}}(x) := \cos\left(\frac{p}{q}\cdot arcos(x)\right), \tag{6}$$

$$\sqrt{1-x^2}U_{\frac{p}{q}}(x) := \sin\left(\frac{p}{q}arcos(x)\right), \tag{7}$$

სადაც p და $q \neq 0$ მთელი რიცხვებია. აღსანიშნავია, რომ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ლუწობის გამო, განსაზღვრება (6) და (7) სამართლიანია უარყოფითი ინდექსებისთვისაც, ანუ, როდესაც $\frac{p}{q} < 0$.

შევნიშნოთ, რომ ეს ფუნქციები ბუნებრივად წარმოიქმნება, თუ მოვისურვებთ რაციონალურინდექსებიანი პოლინომების შეტანას. აქ ჩვენ მოვიტანთ ამ ფუნქციების მხოლოდ ზოგიერთ თვისებას, მრავალი სხვა კი დამტკიცებულია სულ ახალ [3,5,7,25,26] ნაშრომებში. სამართლიანია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 6.1. *ჩებიშევის $T_{\frac{p}{q}}(x)$ ფსევდოფუნქციები აკმაყოფილებენ შემდეგ რეკურსიულ თანადობას:*

$$T_{\frac{p}{q}+1}(x) = 2xT_{\frac{p}{q}}(x) - T_{\frac{p}{q}-1}(x). \tag{8}$$

დამტკიცება: ყველაფერი ცხადი ხდება, თუ გადავწერთ (8) თანადობას შემდეგი სახით:

$$T_{\frac{p}{q}+1}(x) + T_{\frac{p}{q}-1}(x) = 2xT_{\frac{p}{q}}(x)$$

და გამოვიყენებთ (6) განმარტებასა და შემდეგ ტრიგონომეტრიულ ტოლობას:

$$\cos\alpha \; + \; \cos\beta \; = \; 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\; \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

აგრეთვე სამართლიანია

თეორემა 6.2. *ჩებიშევის $U_{\frac{p}{q}}(x)$ ფსევდოფუნქციები აკმაყოფილებენ შემდეგ რეკურსიულ თანადობას:*

$$U_{\frac{p}{q}+1}(x) = \; 2xU_{\frac{p}{q}}(x) - U_{\frac{p}{q}-1}(x). \tag{9}$$

დამტკიცება: ყველაფერი ცხადი ხდება, თუ გადავწერთ (9) თანადობას შემდეგი სახით:

$$U_{\frac{p}{q}+1}(x) + U_{\frac{p}{q}-1}(x) = \; 2xU_{\frac{p}{q}}(x)$$

და გამოვიყენებთ (7) განმარტებასა და შემდეგ ტრიგონომეტრიულ ტოლობას:

$$\sin\alpha \; + \; \sin\beta \; = \; 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\; \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

7. ნახევრად მთელი ხარისხების შემთხვევები

ახლა განვიხილოთ ნახევრად მთელი ხარისხების შემთხვევა, რადგან ის გვეჩვენება ძალზე საინტერესოდ, რადგან შესაბამისი ჩებიშევის ფსევდოფუნქციები არიან იმავე წონების მიმართ ორთოგონალურნი $[-1,1]$ ინტერვალზე [5].

განსაზღვრება — ნებისმიერი მთელი k რიცხვისათვის:

$$\begin{aligned} T_{k+\frac{1}{2}}(x) &:= \cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot arcos(x)\right),\\ \sqrt{1-x^2}U_{k-\frac{1}{2}}(x) &:= \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)arcos(x)\right),\\ \sqrt{1-x^2}V_{k+\frac{1}{2}}(x) &:= \cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)arcos(x)\right),\\ W_{k+\frac{1}{2}}(x) &:= \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot arcos(x)\right). \end{aligned} \tag{10}$$

აღსანიშნავია, რომ ზემოთ მოტანილი განსაზღვრება, წრიული ფუნქციების ლუწობის თვისებების გათვალისწინებით, სამართლიანია მაშინაც, როდესაც $k+\frac{1}{2}<0$. ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ნახევრად მთელი ხარისხის ჩებიშევის ფსევდოფუნქციები არა მარტო აკმაყოფილებენ ანალოგიურ რეკურსიულ თანადობებს, არამედ არიან ორთოგონალურნიც.

7.1. ჩებიშევის პირველი და მეორე გვარის ფსევდოფუნქციების ორთოგონალობა

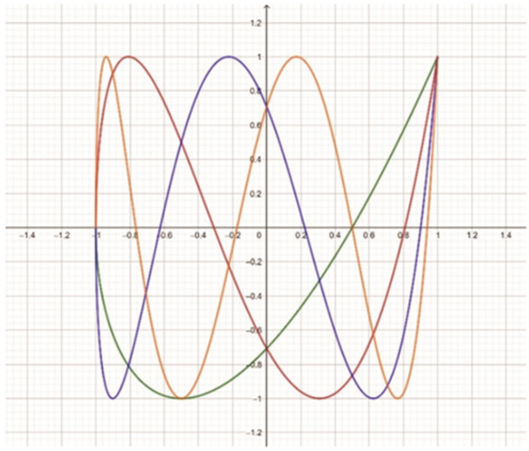
თეორემა 7.1. *ჩებიშევის $T_{k+\frac{1}{2}}(x)$ ფსევდოფუნქციები არიან ორთოგონალურნი, ანუ*

$$\int_{-1}^{1} T_{h+\frac{1}{2}}(x)\cdot T_{k+\frac{1}{2}}(x)\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}dx = 0, \qquad h \neq k \tag{11}$$

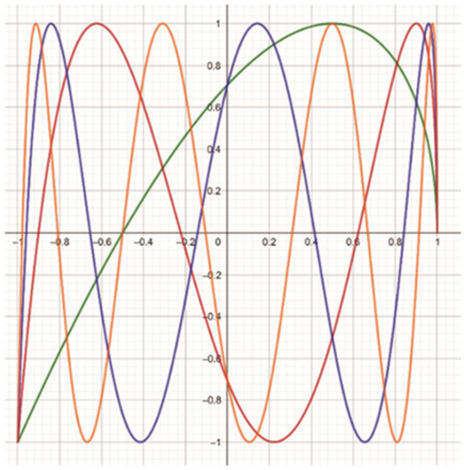
სადაც h და k მთელი რიცხვებია და

$$\int_{-1}^{1} T^2_{k+\frac{1}{2}}(x)\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}dx = \frac{\pi}{2}. \;\; \forall k \in Z \tag{12}$$

$T_{k+\frac{1}{2}}(x)$ ფუნქციების რამდენიმე გრაფიკი შემოთავაზებულია სურ.13 ა-ზე.



ა. $\mathbf{T_{k+\frac{1}{2}}(x)}$



ბ. $\mathbf{U_{k+\frac{1}{2}}(x)}$

სურ. 13. ჩებიშევის $\mathbf{T_{k+\frac{1}{2}}(x)}$ და $\mathbf{U_{k+\frac{1}{2}}(x)}$ ფსევდოფუნქციების გრაფიკები, როდესაც $\boldsymbol{k = 1, 2, 3, 4}$. 1. მწვანე, 2. წითელი, 3. ცისფერი, 4. ფორთოხლისფერი.

თეორემა 7.2. *ჩებიშევის $U_{k+\frac{1}{2}}(x)$ ფსევდოფუნქციები არიან ორთოგონალურნი, ანუ:*

$$\int_{-1}^{1} U_{h+\frac{1}{2}}(x) \cdot U_{k+\frac{1}{2}}(x)\sqrt{(1-x^2)}\,dx = 0, \qquad h \neq k \tag{13}$$

სადაც h და k მთელი რიცხვებია და:

$$\int_{-1}^{1} U_{k+\frac{1}{2}}^2(x)\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \forall k \in Z \tag{14}$$

$U_{k+\frac{1}{2}}(x)$ ფუნქციების რამდენიმე გრაფიკი შემოთავაზებულია სურ.13 ბ.-ზე.

დამტკიცება: დავამტკიცებთ მხოლოდ თეორემა 7.1-ს, რადგან 7.2-ის დამტკიცება ანალოგიურია. ვერნერის ფორმულების თანახმად:

$$\int_{-1}^{1} \cos\left(\left(h+\frac{1}{2}\right)\cdot arcos(x)\right)\cdot \cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot arcos(x)\right)\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}dx =$$

$$= 2\int_{0}^{\pi/2} \cos[(2h+1)t]\cdot\cos[(2k+1)t]\,dt = 0$$

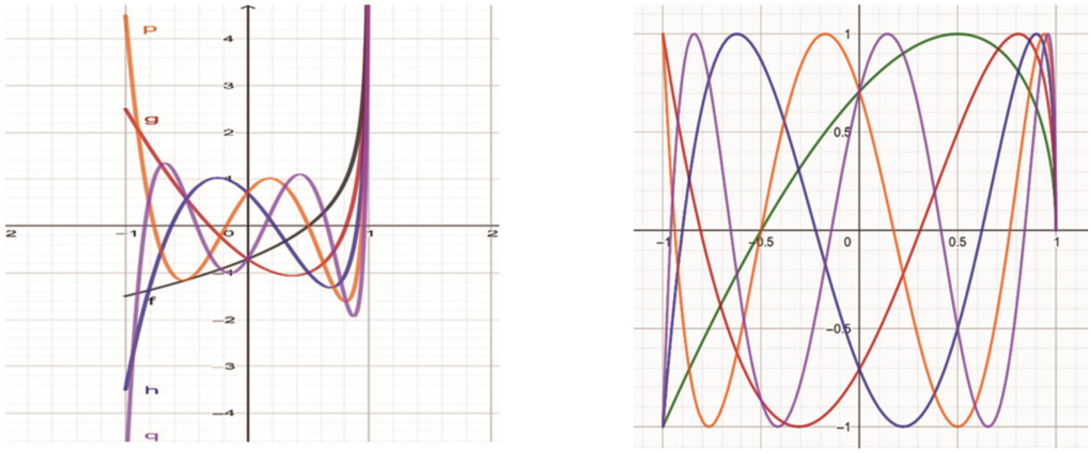
და

$$\int_{-1}^{1} \cos^2\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot arcos(x)\right)\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}dx = 2\int_{0}^{\pi/2}\cos^2[(2k+1)t]\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

7.2. ჩებიშევის მესამე და მეოთხე გვარის ფსევდოფუნქციების მთავარი თვისებები

ჩებიშევის მესამე გვარის ფსევდოფუნქციები (სურ. 14 ა.) აკმაყოფილებენ შემდეგ რეკურსიულ თანადობას:

$$\begin{cases} V_{k+\frac{1}{2}}(x) = 2xV_{k-\frac{1}{2}}(x) - V_{k-\frac{3}{2}}(x) \\ V_{\pm\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2(1-x)}}. \end{cases} \tag{15}$$



ა. $V_{\mathbf{k}+\frac{1}{2}}(\mathbf{x})$ ბ. $W_{k+\frac{1}{2}}(x)$

სურ. 14. ჩებიშევის $V_{\mathbf{k}+\frac{1}{2}}(\mathbf{x})$ და $W_{k+\frac{1}{2}}(x)$ ფსევდოფუნქციების გრაფიკები, როდესაც $\boldsymbol{k} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}$. 1. მწვანე, 2. წითელი, 3. ცისფერი, 4. ფორთოხლისფერი, 5. იასამნისფერი.

ჩებიშევის $V_{k+\frac{1}{2}}(x)$ ფსევდოფუნქციები არიან ორთოგონალურნი, ანუ:

$$\int_{-1}^{1} V_{h+\frac{1}{2}}(x) \cdot V_{k+\frac{1}{2}}(x)\sqrt{(1-x^2)}\, dx = 0, \qquad h \neq k \tag{16}$$

სადაც h *და* k *მთელი რიცხვებია და:*

$$\int_{-1}^{1} V^2_{k+\frac{1}{2}}(x)\sqrt{(1-x^2)}\, dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \forall k \in Z \tag{17}$$

ჩებიშევის მეოთხე გვარის ფსევდოფუნქციები (სურ. 14 ბ.) აკმაყოფილებენ შემდეგ რეკურსიულ თანადობას:

$$\begin{cases} W_{k+\frac{1}{2}}(x) = \ 2xW_{k-\frac{1}{2}}(x) - W_{k-\frac{3}{2}}(x) \\ W_{\pm\frac{1}{2}}(x) \ = \ \pm\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}\,. \end{cases} \tag{18}$$

ჩებიშევის $V_{k+\frac{1}{2}}(x)$ ფსევდოფუნქციები არიან ორთოგონალურნი, ანუ:

$$\int_{-1}^{1} W_{h+\frac{1}{2}}(x) \cdot W_{k+\frac{1}{2}}(x)\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx = 0, \qquad h \neq k \tag{19}$$

სადაც h *და* k *მთელი რიცხვებია და*

$$\int_{-1}^{1} W^2_{k+\frac{1}{2}}(x)\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \forall k \in Z \tag{20}$$

შენიშვნა 2. დამატებითი ტექნიკური თვისებები, როგორიცაა ჰიპერგეომეტრიული წარმოდგენები, მოცემულია [30], ნულების განლაგება დიფერენციალური განტოლებები, როდრიგესის ტიპის ფორმულები და სხვ. იხილე [7].

ლიტერატურა

[1] K. Aghigh, M. Masjed-Jamei, M. Dehghan, A survey on third and fourth kind of Chebyshev polynomials and their applications, *Appl. Math. Comput.*, *199* (1), (2008), 2–12.

[2] D. Bini, C. Cherubini, S. Filippi, A. Gizzi, P.E. Ricci, On the universality of spiral waves, *Comm. Computat. Physics*, 8, (2010), 610–622.

[3] P. Brandi, P.E. Ricci, Some properties of the pseudo-Chebyshev polynomials of half-integer degree, *Tbilisi Math. J.*, 12 (4), (2019), 111–121.

[4] P. Butzer, F. Jongmans, P.L. Chebyshev (1821-1894). A Guide to his Life andWork, *J. Approx. Theory*, 96, (1999), 111–138, Article ID jath.1998.3289, available online at http://www.idealibrary.com

[5] C. Cesarano, P.E. Ricci, Orthogonality properties of the pseudo-Chebyshev functions (Variations on a Chebyshev's theme), *Mathematics*, (2019), 7, 180; doi:10.3390/math7020180.

[6] R. Chac´on, Modeling Natural Shapes with a Simple Nonlinear Algorithm, *Int. J. Bifurc. Chaos*, 16, (2006), 2365–2368.

[7] C. Cesarano, S. Pinelas, P.E. Ricci, The third and fourth kind pseudo-Chebyshev polynomials of half-integer degree, *Symmetry*, (2019), 11, 274; doi: 10.3390/sym11020274

[8] W. Gautschi, On mean convergence of extended Lagrange interpolation, *J. Comput. Appl. Math.*, 43 (1-2), (1992), 19–35.

[9] J. Gielis, A Generic Geometric Transformation that Unifies a Wide Range of Natural and Abstract Shapes, *Amer. J. Botany*, 90, (2003), 333–338.

[10] J. Gielis, The Geometry of Universal Natural Shapes, (2011); doi: 10.1142/978981

[11] J. Gielis, S. Haesen, L. Verstraelen, Universal shapes: from the Supereggs of Piet Hein to the Cosmic Egg of Georges Lemaˆıtre, *Kragujevac J. Math.*, 28, (2005), 55–67.

[12] J. Gielis, P. Natalini and P.E. Ricci, A Note about Generalized forms of the Gielis formula, in: *Atlantis Transactions in Geometry*, 2, Modeling in Mathematics, (2017), 107–116.

[13] J. Gielis, *The Geometrical Beauty of Plants*, Atlantis Press, Springer Nature, Basingstoke, U.K., 2017.

[14] J. Gielis, D. Caratelli, P. Shi and P.E. Ricci, A note on spirals and curvature, Growth and Form, 1 (1), (2020), 1–8.

[15] J. Gielis, I. Tavkhelidze, The M¨obius phenomenon in Generalized M¨bius-Listing bodies with even and odd polygons as cross section, (2020); doi: 10.13140/RG.2.2.33566.36167.

[16] T.L. Heath, *The Works of Archimedes*, Cambridge Univ. Press., 1897, Google Books.

[17] L. Hall, (Trochoids, Roses, and Thorns-Beyond the Spirograph, *College Math. J.*, 23, (1992), 20–35.

[18] E.H. Lockwood, *A book of curves*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1961.

[19] J.C. Mason, Chebyshev polynomials of the second, third and fourth kinds in approximation, indefinite integration, and integral transforms, *J. Comput. Appl. Math.*, 49, (1993), 169–178.

[20] J.C. Mason, D.C. Handscomb, *Chebyshev Polynomials*, Chapman and Hall, New York, NY, CRC, Boca Raton, 2003.

[21] M. Matsuura, Gielis' Superformula and Regular Polygons, *J. Geom.*, 106 (2), (2015), 383–403.

[22] P.E. Ricci, Alcune osservazioni sulle potenze delle matrici del secondo ordine e sui polinomi di Tchebycheff di seconda specie, *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, *109*, 1975, 405–410.

[23] P.E. Ricci, Sulle potenze di una matrice, *Rend. Mat.*, (6) *9*, 1976, 179–194.

[24] P.E. Ricci, I polinomi di Tchebycheff in pi`u variabili, *Rend. Mat.*, (6) *11*, 1978, 295–327.

[25] P.E. Ricci, Complex spirals and pseudo-Chebyshev polynomials of fractional degree, *Symmetry* (2018), 10, 671.

[26] P.E. Ricci, A Survey on pseudo-Chebyshev Functions, *4Open*, 3 2, (2020); doi.org/10.1051/fopen/2020001

[27] P.E. Ricci, On the roots of complex $r \times r$ matrices, *Lecture Notes of TICMI*, 21, (2020), 95–105.

[28] P.E. Ricci, R. Srivastava, A note on Multivariate Pseudo-Chebyshev Functions of Fractional Degree, *Applied Analysis and Optimization*, (2020), (to appear).

[29] T.J. Rivlin, *The Chebyshev polynomials*, J. Wiley and Sons, New York, 1974.

[30] H.M. Srivastava, H.L. Manocha, *A Treatise on Generating Functions*, Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), J. Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane and Toronto, 1984.

[31] W. D'Arcy Thompson, *On Growth and Form*, Reprint of the University Press, Cambridge, 1942.

[32] Ilia Tavkhelidze and Paolo Emilio Ricci Some Properties of "Bulky" Links,Generated by Generalised Möbius–Listing's Bodies $GML_m^n\{0\}$– *in Book "Modeling in Mathematics"* Atlantis Press 2018, pp. 159-185 https://www.springer.com/gp/book/9789462392601

თარგმანი

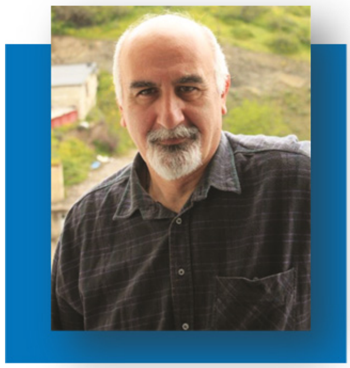
გამონათქვამები გეომეტრიის შესახებ

შუა საუკუნის მეცნიერთა უმეტესობისთვის მეცნიერება, განსაკუთრებით გეომეტრია და ასტრონომია/ასტროლოგია, პირდაპირ კავშირში იყო ღვთიურთან. ამ ხელნაწერის ძირითადი სიმბოლო არის ღვთიური ქმნილების მარადიულობა. გეომეტრიული და ჰარმონიული პრინციპებით ღმერთმა შექმნა სამყარო, ამიტომ მათი ძიება ღმერთის თაყვანისცემასაც ნიშნავდა.

XIII საუკუნის მანუსკრიპტი (ავსტრიის ნაციონალური ბიბლიოთეკა)

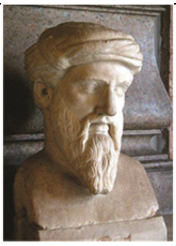
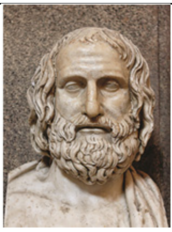
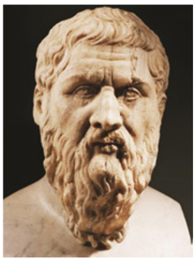
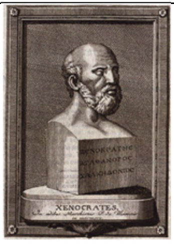
შეაგროვა და თარგმნა ილია თავხელიძემ

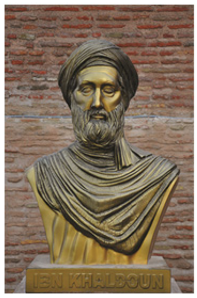
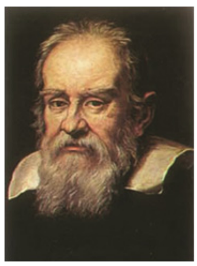
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
ასოცირებული პროფესორი
ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, აკადემიკოს ილია ვეკუას პრემიის ლაურეატი;
1984 წ. დაჯილდოებულია უკრაინის მათემატიკოსთა 2009 წლის ყრილობის, აკადემიკოს ნიკოლოზ ბოგოლიუბოვის მემორიალური ოქროს მედლით.

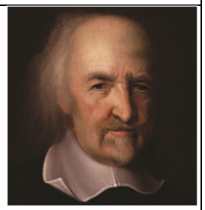


1979 წელს დავამთავრე ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასპირანტურა და გავხდი ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი და უკვე ოფიციალურად დავიწყე მუშაობა მათემატიკაში. ყოველთვის მაინტერესებდა სხვადასხვა ადამიანის აზრი გეომეტრიის შესახებ და ახლა შემოგთავაზებთ ჩემ მიერ სხვადასხვა დროს და გარემოებაში შეგროვებულ, ქართულად გადათარგმნილ და ჩაწერილ გამონათქვამებს გეომეტრიის შესახებ. ზოგიერთ გამონათქვამს მე ხანდახან არც კი ვეთანხმები, მაგრამ მკითხველი უნდა გაეცნოს განსხვავებულ მოსაზრებებს ამ ულამაზესი მეცნიერების შესახებ. ამ მხრივ განსაკუთრებით საინტერესოა არაპროფესიონალების მოსაზრებები. წინა ნომერში შემოგთავაზეთ გამონათქვამები მათემატიკის შესახებ. შემდგომ ვაპირებ წარმოგიდგინოთ ასეთივე კოლექციები: მათემატიკოსების, მათემატიკური კანონზომიერების, მათემატიკური განათლებისა და სხვ. შესახებ. სამწუხაროდ, ამ გამონათქვამებს აკლია ციტირება, მაგრამ

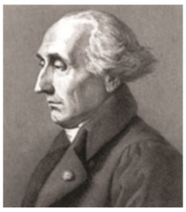
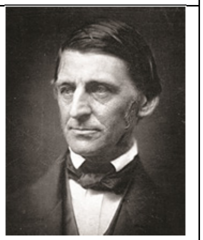
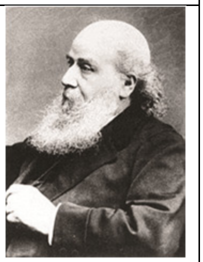
ჩვენი მკითხველი მგონი მომიტევებს. აგრეთვე მოხარული ვიქნები, თუ ჩვენს ჟურნალს გაამდიდრებთ ჩემ მიერ ვერმოძიებული ციტატებით.

1. გეომეტრია, ესაა მარადიულობის შესწავლა; 2. სიმების ხმიანობაში არის გეომეტრია, სფეროებს შორის არის მუსიკა.	**პითაგორა** 580 - 500 ძვ.წა	
ძლევამოსილია გეომეტრია, ურყევია მისი კავშირი ხელოვნებასთან.	**ევრიპიდე** 480 - 406 ძვ.წა	
1. და ნუ შემოვა აქ (აკადემიაში) გეომეტრიისა და მუსიკის არმცოდნე! 2. „ღმერთი ყოველთვის რჩება გეომეტრად“; 3. გეომეტრია იზიდავს სულს ჭეშმარიტებისაკენ და ქმნის ფილოსოფიურ სულისკვეთებას; 4. გეომეტრიის საშუალებით იწმინდება გონი; 5. გეომეტრიას მიჰყავს სული ჭეშმარიტებისაკენ; 6. იმის გაგება, თუ რისკენ მიისწრაფვის გეომეტრია, არის მარადიულობის შეცნობა; 7. გამოცდილება გვიჩვენებს, რომ ნებისმიერი, ვინც სწავლობდა გეომეტრიას, გაცილებით სწრაფად ითვისებს რთულ დარგებს, ვიდრე ის, ვინც ამას არ აკეთებდა.	**პლატონი** 429 - 347 ძვ.წა	
კაცს, რომელმაც არ იცოდა არც მუსიკა, არც გეომეტრია და არც ასტრონომია, მაგრამ უნდოდა ქსენოკრატეს მოწაფეობა, მან უთხრა: „წადი, შენ ვერაფრით ვერ მოეჭიდები ფილოსოფიას!“	**ქსენოკრატე ქალკიდელი** 396 - 314 ძვ.წა ფილოსოფოსი	
არ არსებობს სამეფო გზა გეომეტრიაში.	**ევკლიდე** IV – III ძვ.წა	
გეომეტრიის პრინციპები – ეს მთელი მათემატიკის პრინციპებია	**ომარ ხაიამი** 1048 - 1131	

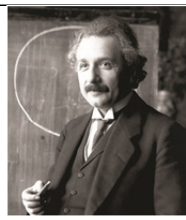
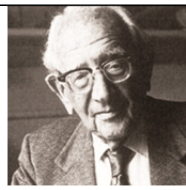
გეომეტრია ანათლებს ინტელექტს და განაწყობს გონებას. ყოველი მისი დამტკიცება, ძალზე მკვეთრი და მოწესრიგებულია. საეჭვოა, რომ გეომეტრიულ მსჯელობებში შესაძლებელი იყოს ეჭვის შეტანა, რადგან ისინი კარგადაა ორგანიზებული და დალაგებული. ამგვარად გონი, რომელიც მუდმივადაა დაკავებული გეომეტრიით, საეჭვოა, რომ შეცდეს. ამგვარი ხელსაყრელი გზით, გეომეტრიაში გათვითცნობიერებით, ადამიანი იძენს ინტელექტს.	**იბნ ხალდუნი** 1332 - 1406 ფილოსოფოსი	
სამყაროს შექმნისას ღმერთი იყენებდა მათემატიკას, გეომეტრიასა და ასტრონომიას!	**ნიკოლოზ კუზანელი** 1401 - 1464	
ჩემთვის მისაღებია გამოჩენილი ანტიკური ფერმწერის, პამფილეს, გამონათქვამი, რომელთანაც ახალგაზრდა კეთილშობილი ოჯახისშვილები იწყებდნენ ფერწერის სწავლას. ის თვლიდა, რომ გეომეტრიის კარგად ცოდნის გარეშე, ვერცერთი ფერმწერი ვერ შექმნის კარგ ნახატს. ჩვენი ქმნილებები, რომლებშიც ასახულია ფერწერის მთელი ხელოვნება, მთელი მისი უცილო სრულქმნილებით, მარტივად გასაგებია ყოველი გეომეტრისათვის, მაგრამ გეომეტრიაში უმეცარი ვერ ჩაწვდება ვერც ამ და ვერც ფერწერის ვერანაირ ჩანაფიქრს. ამიტომაც მე ვამტკიცებ, რომ ფერმწერისათვის აუცილებელია გეომეტრიის შესწავლა.	**ლეონ ბატისტა ალბერტი** 1404 - 1472 ფერწერაში წრფივი პერსპექტივის ფუძემდებელი	
პერსპექტივის ყველა პრობლება შესაძლებელია აიხსნას მათემატიკის ხუთი ტერმინის საშუალებით: წერტილი, წირი, კუთხე, ზედაპირი და სხეული.	**ლეონარდო და ვინჩი** 1452 - 1519	
გეომეტრია — მთელი ფერწერის საფუძველია	**ალბრეხტ დიურერი** 1471 - 1528 **მხატვარი**	
1. „რას ვიტყვით ამაზე? ხომ არ უნდა ვაღიაროთ, რომ გეომეტრია არის ყველაზე ძლიერი საშუალება ჩვენი გონის შესაძლებლობების დასახვეწად და გვაძლევს სწორად ფიქრისა და მსჯელობის საშუალებას? ხომ არ იყო მართალი პლატონი, როდესაც თავის მოსწავლეებს სთხოვდა, უპირველეს ყოვლისა, მათემატიკის საფუძვლიანად გაცნობას?“; 2. უნდა ვაღიაროთ, რომ ბუნებრივი პრობლემების გააზრება გეომეტრიის გარეშე, არის მცდელობა შევძლოთ შეუძლებელი.	**გალილეო გალილეი** 1564 - 1642	

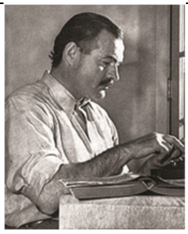
1. სადაც მატერიაა, იქ გეომეტრიაა; 2. გეომეტრია ერთიანი და მარადიულია, ის ბრწყინავს ღვთი-ურ სულში. ჩვენი ურთიერთობა, თანამონაწილეობა მასთან, არის ერთ-ერთი საფუძველი, რითაც ადამიანი უნდა იყოს ხა-ტება ღვთისა. ამასთანავე, გეომეტრიაში არის სფეროს გარდა ფიგურების სრულყოფილი სახეობა [პლატონის 5 სხეული]; და მათი სახითა და მათნაირადაა მოწყობილი ჩვენი პლანეტარუ-ლი სისტემა; 3. გეომეტრია — ეს სამყაროს მშვენიერების არქეტიპია (პირველსახეა); 4. გეომეტრია არსებობდა სამყაროს შექმნამდე, ის მარადიულია ღვთიურ გონთან ერთად. გეომეტრიამ მისცა ღმერთს სამყაროს მოდელი; 5. გეომეტრიას ორი განძი გააჩნია: ერთი მათგანია პითა-გორას თეორემა და მეორე — მონაკვეთის დაყოფა საშუალო და უკიდურესი ფარდობით ... პირველი მათგანი შესაძლოა შევადაროთ ოქროს, ხოლო მეორე ჰგავს ძვირფას ქვას.	**იოჰან კეპლერი** 1571 - 1630	
1. გეომეტრია — რაღაცით მოგვაგონებს ღვინოს; 2. თუ გეომეტრიული აქსიომები აზარალებდნენ ადამიანების ინტერესებს, მაშინ ისინი უგულებელყოფილნი იქნებოდნენ!	**თომას გობსი** 1588 - 1679 ფილოსოფოსი	
1. იმ მსჯელობების გრძელმა ჯაჭვებმა, ყოველთვის მარტივმა და ადვილმა, რომლითაც ჩვეულებრივად სარგებლობენ გეომეტრები, რათა გავიდნენ ბოლოში თავის ყველაზე რთულ დამტკიცებებში და მომცეს მე საბაბი წარმომედგინა ყოველი მოვლენა, რომელიც შესაძლოა გახდეს ადამიანების შეცნობის საგანი, არის ერთმანეთთან ანალოგიურ მიმართებაში; 2. მე გადავწყვიტე უარი ვთქვა წმინდა აბსტრაქტულ გეომეტრიაზე, ანუ იმ საკითხების განხილვაზე, რომლებიც მხოლოდ გონების ვარჯიშს ემსახურება, რომ დავკავდე სხვაგვარი გეომეტრიის შესწავლით, რომლის კვლევის საგანია ბუნების მოვლენათა ახსნა.	**რენე დეკარტი კარტეზიო** 1596 - 1650	
1. თანაბარ გონთა შორის — სხვა თანაბარ პირობებში — უპირატესობა გააჩნია მას, ვინც იცის გეომეტრია; 2. „ყველაფერი, რაც აღემატება გეომეტრიას, აღგვემატება ჩვენ".	**ბლეზ პასკალი** 1623 - 1662	
1. რომ შექმნილიყო ეს (მზის) სისტემა თავისი ყველა მოძრაობით, გაჩნდა აუცილებლობა მატერიის,... მანძილის,... სიჩქარის ცნებების გაცნობიერებისა და შედარების. და ის, რომ შესაძლებელი გახდა აურაცხელი რაოდენობის სხეული-სათვის ამ სიდიდეების შედარებისა და შეთანხმების, მოწმობს იმას, რომ ამის მიზეზი იყო არა გაუთვითცნობიერებლობა ანდა შემთხვევითობა, არამედ საკმარისად დაოსტატება მექანიკასა და გეომეტრიაში. გეომეტრია, ეფუძნება რა მექანიკის გამოცდილებას, სხვა არაფერს წარმოადგენს, თუ არა ზოგადი მექანიკის ნაწილს, რომელშიც ყალიბდება და მტკიცდება ზუსტი გაზომვების ხელოვნება;	**ისააკ ნიუტონი** 1642 - 1725	

2. წესიერი წირებისა და წრეების აღწერა, რაზეც ეფუძნება გეომეტრია, განეკუთვნება მექანიკას. გეომეტრია არ გვასწავლის ამ წირების ხატვას, მაგრამ თხოულობს მათ გამოსახვას.		
1. ღმერთი მოქმედებს როგორც უდიდესი გეომეტრი, რომელიც უპირატესობას ანიჭებს ამოცანების საუკეთესო ამოხსნებს; 2. თუ გეომეტრია ისევე წინააღმდეგობაში მოვა ჩვენს ვნებებთან და ყოველდღიურ ინტერესებთან, როგორც ზნეობა , მაშინ ასევე ვიკამათებდით მის წინააღმდეგ და დავარღვევდით მათ, მიუხედავად ყველა მტკიცებულებისა; 3. გეომეტრებს ხშირად გამოსდით რამდენიმე სიტყვით გამოხატონ ის, რაც სიტყვებში საჭიროებს ძალზე რთულ მსჯელობებს.	**გოტფრიდ ლაიბნიცი** 1646 - 1716	
დიდი ხანია შემჩნეულია, რომ გეომეტრია — ესაა შესანიშნავი ლოგიკა. მარლთაც: როდესაც განსაზღვრებები ნათელია, როდესაც პოსტულატები უდავოა, როდესაც ფიგურების თვისებები გამომდინარეობენ ზუსტი, თანმიმდევრული მსჯელობების ჯაჭვის მკაფიო დაკვირვებიდან, ხოლო ობიექტები მუდმივად არიან თვალთახედვის არეალში, — ამ გზით ყალიბდება ზუსტად, თანმიმდევრულად და მეთოდურად ფიქრის ჩვევა; ეს ჩვევა გონს აძლიერებს და ხვეწს და საჭირო ხდება სხვა დარგებში ჭეშმარიტების ძიებისას.	**ჯორჯ ბერკლი** 1685 - 1753 ფილოსოფოსი	
1. გეომეტრიაში არ არსებობს სექტები; 2. არსებობს ერთი მორალი, როგორც ერთი გეომეტრია.	**ფრანსუა მარი არუე ვოლტერი** 1694 - 1778	
ნებისმიერი სამუშაოს ჩატარება შეუძლებელია არითმეტიკის გარეშე; ტექნიკაში არცერთი გამოგონება არაა შესაძლებელი გეომეტრიის გარეშე.	**ბენჟამინ ფრანკლინი** 1706 - 1790 პრეზიდენტი	
1. გეომეტრია — ესაა ყოველგვარი აზრობრივის კვლევების წესები; 2. გეომეტრია — გონის ყველა კვლევის მმართველია.	**მიხეილ ლომონოსოვი** 1711 - 1765	
წარმატებულად რომ ავაცილოთ გეომეტრიას შარიანი დამოკიდებულება, ის უნდა იყოს ლოგიკისნაირი და უნდა ეფუძნებოდეს ფორმალურ მსჯელობას.	**ალექსი კლოდ კლერო** 1713 - 1765	
1. მკაცრად რომ ჩამოვაყალიბოთ, მათემატიკის მხოლოდ ის ნაწილებია სრული სიცხადის მატარებელი, რომლებსაც საქმე აქვთ სიდიდეთა გათვლებთან და სივრცის ზოგად თვისებებთან, ასეთებია: ალგებრა, გეომეტრია და მექანიკა; 2. გეომეტრია მექანიკაზე მარტივია და ისინი ორივე უფრო რთულია, ვიდრე ალგებრა.	**ჟან ლეონ დ'ალამბერი** 1717 - 1787	

სანამ ალგებრა და გეომეტრია იყო განცალკევებული, მათი განვითარება იყო ნელი და მათი გამოყენება შეზღუდული; მაგრამ, როგორც კი ისინი გაერთიანდა, ისინი საერთო ძალისხმევით ერთად წავიდნენ სრულყოფისაკენ.	**ჟოზეფ-ლუი ლაგრანჟი** 1736 - 1813	
ალგებრა სხვა არაფერია, თუ არა გეომეტრია სიტყვებში; გეომეტრია სხვა არაფერია, თუ არა ალგებრა ნახატებში.	**სოფი ჟერმენი** 1776 - 1831	
1. მე სულ უფრო ვრწმუნდები იმაში, რომ ჩვენი გეომეტრიის აუცილებლობის დემონსტრაცია შეუძლებელია, ყოველ შემთხვევაში, ადამიანის ინტელექტის საშუალებით... გეომეტრია უნდა შეფასდეს არა არითმეტიკიდან, რომელიც წმინდად აპრიორულია, არამედ მექანიკიდან; 2. დაშვებას იმისა, რომ სამკუთხედის კუთხეების ჯამი ნაკლებია 180^0, მივყავართ ჩვენი გეომეტრიისაგან განსხვავებულ, თავისებურ გეომეტრიამდე; ის სრულად თანმიმდევრულია ... ამ გეომეტრიის დასკვნები გვეჩვენება პარადოქსულად და ადამიანისათვის უჩვეულოდ, ხანაც უაზროდ; მაგრამ, მკაცრად და მშვიდად დაფიქრების შემდეგ, აღმოჩნდება, რომ ისინი არ შეიცავენ არაფერ შეუძლებელს.	**კარლ ფრიდრიხ გაუსი** 1777 - 1855	
შთაგონება საჭიროა გეომეტრიაში არანაკლებ, ვიდრე პოეზიაში.	**ალექსანდრე პუშკინი** 1799 - 1837 პოეტი	
გეომეტრია — ეს არის ხელოვნება, კარგად იმსჯელო ცუდად შესრულებულ ნახაზებზე.	**ნილს ჰენრიკ აბელი** 1802 - 1828	
ბერძნული (ანტიკური) არქიტექტურა — ესაა გეომეტრიის გაფურჩქვნის ხანა.	**რალფ ვალდო ემერსონი** 1803 - 1882 ფილოსოფოსი	
ევკლიდეს გეომეტრიის ადრეულმა შესწავლამ გულით შემაძულა გეომეტრია.	**ჯეიმს ჯოზეფ სილვესტრი** 1814 - 1897	

1. დრამატული ხელოვნება — ეს გეომეტრიაა, რომელიც გადადის მუსიკაში; 2. პოეზია ისეთივე ზუსტი რამეა, როგორც გეომეტრია.	**გუსტავ ფლობერი** 1821 - 1880 მწერალი	
1. ერთი გეომეტრია შეუძლებელია იყოს მეორეზე უფრო მართალი; ის შესაძლოა იყოს უფრო მოხერხებული; 2. გეომეტრია მცდარია — ეს ხელსაყრელია.	**ანრი პუანკარე** 1854 - 1912	
უბრალოდ შეუძლებელია იმ ადამიანის მოტყუება, რომელსაც შეუძლია დაკვირვება და ანალიზი. მისი დასკვნები იქნება უშეცდომო, როგორც ევკლიდეს თეორემები.	**სერ არტურ კონან დოილი** 1859 - 1930 მწერალი	
ბავშვობაში მე ვერ გამოვხატავდი ნათლად სიტყვებით, მაგრამ ვგრძნობდი, რომ ცოდნა სულიერი სამყაროს შესახებ უნდა ატარო შენში ისევე, როგორც გეომეტრია.	**რუდოლფ შტაინერი** 1861 - 1925 ეზოთერიკოსი	
მე ვნანობ, რომ ამ ლექციის დროს ასე ხშირად მივმართავდი ოთხგანზომილებიან გეომეტრიას. მაგრამ, არ ვიხდი ბოდიშს, რადგან მე არ ვარ პასუხისმგებელი იმაზე, რომ თავისი ფუნდამენტური ასპექტებით ბუნება ოთხგანზომილებიანია.	**ალფრედ ნორტ უაიტჰედი** 1861 - 1947	
1. გეომეტრია ყველაზე სრული მეცნიერებაა 2. გეომეტრიის უდიდეს ბაღში ყველას შეუძლია თავისი გემოვნებით აირჩიოს თაიგული.	**დავიდ ჰილბერტი** 1862 - 1943	
გეომეტრია ქმნის ამოხსნის მეთოდებს არა მარტო იმ საკითხებისა, რომლებიც არის თანამედროვე მოთხოვნილებისათვის, არამედ ასევე მომავლისათვის, რომლებიც წარმოიქმნება შესაძლოა ხვალ, შესაძლოა ათასი წლის შემდეგ.	**ალექსანდრე კრილოვი** 1863 - 1945	
გეომეტრია ფიზიკის უკეთილშობილესი ნაწილია.	**უილიამ ფოგ ოსგუდი** 1864 - 1943	
მუსიკა — ეს ხმების არითმეტიკაა, როგორც ოპტიკა არის სინათლის გეომეტრია.	**კლოდ დებუსი** 1862 - 1918 კომპოზიტორი	

ელემენტარული გეომეტრიის ამოცანებში გვიხდება ძალზე მახვილგონივრული, ხანდახან ფაქიზი მეთოდების გამოყენება და ის, ვინც ახალგაზრდობაში გაუგო გემო მათ მშვენიერებას, ვერასდროს დაივიწყებს მათ.	**ემილ ბორელი** 1871 - 1956	
„წრფეები არსებობენ მხოლოდ გეომეტრიაში და არა ბუნებასა და ცხოვრებაში“.	**ჰერმან ჰესე** 1877 - 1962 მწერალი, მხატვარი	
გრავიტაცია გეომეტრიაზე რეაქციაა.	**ალბერტ აინშტაინი** 1879 - 1955	
ქანდაკებისათვის გეომეტრია წარმოადგენს იმას, რასაც გრამატიკა წარმოადგენს მწერლის ხელოვნებისათვის.	**გიიომ აპოლინერი** 1880 - 1919 პოეტი	
ერთადერთი სამეფო გზა გეომეტრიაში — ესაა გამომგონებლობა.	**ერიკ ტემპლ ბელი** 1883 - 1960 ფანტასტი	
1.ორნამენტის ხელოვნება ფარულად მოიცავს უმაღლესი მათემატიკის ჩვენთვის ცნობილ ყველაზე ძველ ნაწილს; 2. ბუნებას გააჩნია მისთვის დამახასიათებელი ფარული ჰარმონია, რომელიც აისახება ჩვენს გონებაში მარტივ მათემატიკურ კანონებში. უთუოდ ამითი აიხსნება, თუ რატომაა შესაძლებელი ბუნების მოვლენების წინდაწინ განჭვრეტა დაკვირვებებისა და მათემატიკური ანალიზის კომბინაციით.	**ჰერმან ვეილი** 1885 - 1955	
მე ვფიქრობ, რომ არასოდეს ამ დრომდე ჩვენ არ გვიცხოვრია ასეთ გეომეტრიულ პერიოდში. ყველაფერი ირგვლივ გეომეტრიაა.	**შარლ ედუარდ ჟანერე გრი ლე კორბუზიე** 1887 - 1965 არქიტექტორი	
გეომეტრია — ესაა მეცნიერება არასწორ ფიგურებზე სწორი მსჯელობებისა.	**(დიერდ) ჯორჯ პოია** 1887 - 1985	
მუსიკა — ესაა გეომეტრია დროში.	**არტურ ჰონეგერი** 1892 - 1955 კომპოზიტორი	

სულელები ფიქრობენ, რომ მე ალგებრას ვწერ, მაგრამ რასაც ნამდვილად ვწერ, არის გეომეტრია.	**ერნესტ ჰემინგუეი** 1899 - 1961 მწერალი	
რომ შესძინო სამყაროს აზრი, უნდა შეიგრძნო შენი თავი მისი შექმნის თანამონაწილედ. ამგვარი დამოკიდებულება თხოულობს კონცენტრაციას, გონის მოწესრიგებულობას, მგრძნობელობასა და გეომეტრიის შეგრძნებას.	**ჰენრი კარტიე ბრენსონი** 1908 - 2004 ფოტოგრაფი	
1. ჩვენი გარშემო სამყარო — ეს გეომეტრიის სამყაროა; 2. გეომეტრიის თავისებურება, რომელიც მას გამოყოფს მათემატიკის ყველა მიმართულებისაგან და აგრეთვე მეცნიერების ყველა დარგისაგან, მდგომარეობს ცოცხალი წარმოსახვისა და მკაცრი ლოგიკის ორგანულად განუყოფელ ნაერთში; 3. გეომეტრია თავისი არსით არის სივრცითი წარმოსახვა, მკაცრი ლოგიკით გამსჭვალული და ორგანიზებული.	**ალექსანდრე დ. ალექსანდროვი** 1912 - 1999	
რატომ ეძახიან ხშირად გეომეტრიას ცივსა და მშრალს? ერთი მიზეზთაგანი ისაა, რომ მისი საშუალებით არ აღიწერება ღრუბლები, მთები, ხეები და ზღვის სანაპირო. ღრუბლები — ეს სფეროები არაა, მთები — ეს კონუსები არაა, ზღვის სანაპირო წირები — წრეწირები არაა და ხის ქერქი გლუვი არაა, ელვა არ ვრცელდება სწორი ხაზის გასწვრივ.	**ბენუა მანდელბროტი** 1924 - 2010	
გეომეტრიულ ამოცანათა ამოხსნის ხელოვნება რაღაცით ილუზიონისტის ტრიუკებს მოგვაგონებს — ხან კი, იმის მიუხედავად, რომ ვიცით ამოცანის ამოხსნა, ძნელი გასაგებია, თუ როგორ უნდა მიხვიდე აქამდე.	**იგორ ნოვიკოვი** 1935 - ასტროფიზიკოსი	
განტოლებები — ეს მათემატიკის მოსაწყენი ნაწილია. მე ვცდილობ შევხედო ყოველივეს გეომეტრიის თვალთახედვით.	**სტივენ უილიამ ჰოკინგი** 1942 - 2018	
მე ვთვლი, რომ სამყარო, — ეს წმინდა გეომეტრიაა — ძირითადად, ლამაზი ფორმა, სივრცე-დროში ბრუნვადი და მოცეკვავე.	**ანტონი გარეტ ლიზი** 1968 ფიზიკოს-თეორეტიკოსი	
მშვენიერება — ეს გეომეტრიაა.	**ჯ.კ.როულინგი** 1965 - ფილანტროპი	

„vir stupendae sagacitatis, qui prima fundamenta posit inventionum fere omnium, de quibus promovendis aetas nostra gloriatur“. J.Wallis

„გასაოგნებელი გამჭრიახობის ადამიანი, რომელსაც უნდა ვუმადლოდეთ აღმოჩენებიდან უმეტესს, რომელთა განვითარებამაც სახელი მოუხვეჭა ჩვენ მიერ განვლილ ეპოქას“. ჯ.ვალისი

ა რ ქ ი მ ე დ ე
287-212 ძვ.წაღ.
ნახატი
დომენიკო ფეტი 1620 წ.

სილის მარცვლების დათვლა უძრავი ვარსკვლავთ ცის ტოლ სივრცეში

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΨΑΜΜΊΤΗΣ (ფსამიტი ბერძნულად)
ARCHIMEDIS ARENARIUS (არენარიუს ლათინურად)

მეუფეო ჰელონ,

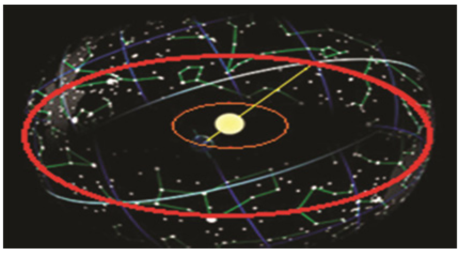
არსებობენ ადამიანები, რომელთაც ჰგონიათ, რომ სილის მარცვლების რაოდენობა უსასრულოა. მე არ ვამბობ სილაზე სირაკუზის გარშემო ანკი სიცილიის სხვა რეგიონებში, მაგრამ ვსაუბრობ მთელ მის რაოდენობაზე როგორც დასახლებულ, ისე დაუსახლებელ ქვეყნებში.

სხვები ფიქრობენ, რომ, მართალია ეს რაოდენობა არაა უსასრულო, მაგრამ მისი რაოდენობრივად წარმოდგენა შეუძლებელია.

ამ უკანასკნელთ რომ წარმოედგინათ მთელი დედამიწის სილის მასა, თანაც ამით გავსებული ყველა ზღვა და ხევი მაღალი მთების სიმაღლეზე, მაშინ, რა თქმა უნდა, კიდევ უფრო ნაკლებად დაიჯერებდნენ, რომ ადვილია ამ რაოდენობაზე დიდი რიცხვის დასახელება.

მე კი, პირიქით, შევეცდები გეომეტრიული სიზუსტით დაგიმტკიცო და დაგარწმუნო, რომ რიცხვთა შორის, რომლებიც მე აღვნიშნე ზევქსიპესთან[1] მიწერილ წიგნში, არის რიცხვები, რომლებიც უმეტესნი არიან სილის მარცვლების იმ რაოდენობაზე, რომელიც დაეტევა არა მარტო იმ სივრცეში, რომელიც დედამიწის მოცულობის ტოლია, არამედ მთელს სამყაროში.

შენ იცი, რომ ზოგიერთი ასტრონომის წარმოდგენით, სამყარო არის ბირთვის ფორმის, რომლის ცენტრში არის დედამიწა, ხოლო მისი რადიუსი არის წრფის მონაკვეთი, რომლის სიგრძე ტოლია მანძილის დედამიწის ცენტრსა და მზეს შორის.



ა. სამყაროს ბირთვი აგურისფერი უძრავი ვარსკვლავით; ცის ბირთვი წითელი

ბ. არისტარქე სამოსელი 310-230 ძვ.წა.

გ. ზოდიაქო XVII სვეტიცხოველი სამხრეთ კედელი

სურ. 1

მაგრამ არისტარქე სამოსელი თავის „დებულებებში“, რომელიც დაწერილია ასტრონომთა საწინააღმდეგოდ, უარყოფს ამ მოსაზრებას და ასკვნის, რომ სამყარო აღნიშნულზე გაცილებით დიდია.

ის თვლის, რომ უძრავი ვარსკვლავები და მზე არ იცვლიან თავის მდებარეობას სივრცეში; რომ დედამიწა მოძრაობს მზის, რომელიც სამყაროს ცენტრშია, გარშემო წრეზე და ამ ვარსკვლავთ ბირთვის ცენტრი ემთხვევა მზის ცენტრს, ხოლო ამ ბირთვის ზომები იმგვარია, რომ წრეწირი (რადიუსი), რომელსაც აღწერს დედამიწა, მისი ვარაუდით, მზის გარშემო იმავე თანაფარდობაშია უძრავ ვარსკვლავებამდე მანძილთან, როგორც სამყაროს ცენტრი მის ზედაპირთან.

მაგრამ, ცხადია, რომ ეს შეუძლებელია: რადგან ბირთვის ცენტრს არავითარი ზომა არ აქვს და დაუშვებელია, რომ მას რაიმე ფარდობა ჰქონდეს ბირთვის ზედაპირთან.

სავარაუდოდ, არისტარქე (სურ.1ბ) გულისხმობდა შემდეგს:

„თუ დედამიწას ჩავთვლით სამყაროს ცენტრად, მაშინ დედამიწის ბირთვის ფარდობა სამყაროს ბირთვთან იგივეა, რაც მოძრავი დედამიწის მიერ აღწერილი წრის ფარდობა უძრავ ვარსკვლავთა წრესთან, და ამიტომაცაა, რომ მისი ყველა დამტკიცება ამ დებულებიდან ამოდის. უფრო იმიტომაც, რომ ბირთვს, რომელზეც მას წარმოუდგენია დედამიწის მოძრაობა, მეჩვენება, რომ ის თვლის ბირთვად, რომელსაც **„სამყაროს“** უწოდებს[2] (სურ.1ა).

ახლა მე ვამბობ, რომ, თუ არსებობს სილით სავსე არისტარქესეული უძრავ ვარსკვლავთა ბირთვი, შესაძლოა დამტკიცება იმისა, რომ „საწყისებში“ მოყვანილ რიცხვთა შორის არის ისეთებიც, რომლებიც აღნიშნული ბირთვის შემავსებელი სილის მარცვლების რაოდენობაზე დიდია.

ამასთანავე, მე გამოვთქვამ მოსაზრებას, რომ, პირველი: — დედამიწის გარშემოწერილობა შეადგენს სამას მირიად (ათიათას) სტადიუმს,[3] მაგრამ არა უფრო მეტს; როგორც შენთვისაა ცნობილი, ბევრი ამტკიცებს, რომ დედამიწას აქვს 30 მირიადი სტადიუმი. მე მივდივარ გაცილებით შორს, ვთვლი რა ამას ათჯერ უფრო დიდად, ანუ 300 მირიადი, თუმცა არა უმეტესს.[4]

მეორე: — დედამიწის დიამეტრი მეტია, ვიდრე მთვარისა, ხოლო მზის დიამეტრი დედამიწისაზე მეტია; ყველაფერი ეს ეყრდნობა ასტრონომების ზემოთ აღნიშნულ მოსაზრებას.

დაბოლოს, მზის დიამეტრი 30-ჯერ აღემატება მთვარის დიამეტრს,[5] მაგრამ არა უმეტესად, რადგან აღნიშნული ასტრონომებიდან ევდოქსი (კნიდელი 400-350 ძვ.წა.) ამტკიცებს, რომ ის თითქმის 9-ჯერ დიდია; აკუპატრეს შვილი ფიდიუსი[6] თვლის, რომ — 12-ჯერ. საბოლოოდ არისტარქე ცდილობს დაამტკიცოს, რომ 18-ჯერ მეტია, მაგრამ უფრო ნაკლებია, ვიდრე 20-ჯერ აღებული მთვარის დიამეტრი.[7]

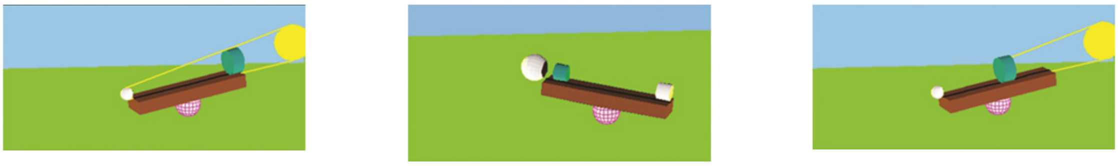
მაგრამ, მე რომ ავირიდო ჩემი დებულების დამტკიცების ყველანაირი წინააღმდეგობა, უფრო შორს წავედი და ვამბობ, რომ მზის დიამეტრი 30-ჯერ მეტია მთვარისაზე, მაგრამ არა უფრო დიდი.

გარდა ამისა, მზის დიამეტრი მეტია სამყაროს უდიდეს წრეში ჩახაზულ ათასგვერდედის გვერდზე. ამ დებულებას მე ვუშვებ არისტარქეს მოსაზრებაზე დაყრდნობით, რომე-

ლიც ამბობს, რომ მზის ხილული ზომა არის ერთი შვიდას მეოცედი მისი ორბიტისა, რომელსაც ზოდიაქო ეწოდება.[8]

სპეციალური ხელსაწყოს საშუალებით ვცდილობდი მეპოვა მზის დამზერის კუთხე, რომლის წვერო არის თვალში, თუმცა ამის წარმატებით განხორციელება მძიმე სამუშაოების ჩატარებას მოითხოვს, რადგან ამ ოპერაციის ჩატარებისათვის არც თვალი, არც ხელები და არც ხელსაწყოები არ არიან ძალზე ზუსტი გაზომვებისათვის საკმარისი.

თუმცა ვთვლი, ზედმეტია ამაზე საუბარი, როგორც საკითხზე, რომელზეც ბევრჯერაა ნამსჯელი. მეტიც, ჩემი დებულების დასამტკიცებლად საკმარისია შემოვიფარგლოთ იმ კუთხეზე საუბრით, რომლის სათავე დამკვირვებლის თვალშია და არაა იმაზე დიდი, რომლითაც ჩანს მზე, და, მეორე მხრივ, კუთხეზე საუბრით, რომლის სათავე დამკვირვებლის თვალის ცენტრშია და არაა იმაზე ნაკლები, რომლითაც ჩანს მზე.



ა ბ გ

სურ. 2 არქიმედეს მოწყობილობის სქემატური ნახაზები - აღებულია [1] ნაშრომიდან.

დავდე რა სიბრტყეზე საკმარისი სიგრძის სახაზავი იმგვარად, რომ შესაძლებელი გახდა მზის ამოსვლაზე დაკვირვება, მე, მზის ამოსვლამდე ცოტა ხნით ადრე, სახაზავზე შვეულად დავდე მრგვალი ღერო. როგორც კი ჰორიზონტზე მზე ამოიწვერა და, შესაბამისად, მისი დანახვა გახდა შესაძლებელი, მივმართე სახაზავის ერთი ბოლო პირდაპირ მზისკენ, ხოლო მეორე ბოლო თვალისაკენ, ხოლო თვალსა და მზეს შორის მოვათავსე ცილინდრული ღერო იმგვარად, რომ ის სრულად ფარავდა მზეს (სურ. 2 ა).

შემდეგ დავიწყე ღეროს თვალიდან გაწევა მანამ, სანამ მისი ორივე მხრიდან ოდნავ არ გამოჩნდა მზე, რის შემდგომ შევწყვიტე ღეროს მოძრაობა.

მზის დისკოს დანახვა გახდა შესაძლებელი ღეროს ორივე მხრიდან, და თუ ჩავთვლით, რომ დამკვირვებლის თვალი წერტილია, გამოვა, რომ ამ წერტილიდან ღეროსადმი გავლებული მხებები მისცემდა მას კუთხეს, ანუ უმცირეს კუთხეს, რომლითაც შესაძლოა ერთი თვალით მზის დანახვა. მაგრამ თვალი წერტილი არ არის, არამედ ნაწილია, რომელსაც გარკვეული ზომა გააჩნია. მე ავიღე მეორე ღერო, რომლის დიამეტრი არანაკლებია, ვიდრე თვალის გუგის; დავამაგრე ის სახაზავის ბოლოში თვალთან და გავავლე რა ორივე ღეროს მხებები, ვიპოვე მათ შორის კუთხე, ნაკლები იმაზე, რომლითაც ჩანს მზე, მისი წვერო თვალის ცენტრში რომ ყოფილიყო.

გუგის დიამეტრზე არანაკლები ღეროს მიღება შესაძლებელია შემდეგნაირად: უნდა ავიღოთ ორი წვრილი ერთნაირი ზომის ღერო — ერთი თეთრი და მეორე მუქი — დავიკავოთ ისინი თვალის წინ ისე, რომ პირველი იყოს მოშორებით და მეორე — რაც შეიძლება ახლოს, თითქმის ეხებოდეს სახეს (სურ.2 ბ).

თუ ღეროები გუგაზე პატარა კვეთის არიან, მაშინ დამკვირვებელი, დაინახავს რა უახლოესს, იმავდროულად დაინახავს შორს მყოფსაც, თანაც სრულად, თუ ისინი საკმარისად მცირენი არიან; ხოლო, თუ სხვაობა მცირეა, მაშინ გამოჩნდება შორეული ღეროს მხოლოდ ნაწილები წინა ღეროს ორივე მხრიდან.

შესაბამისად, თუ ორ ერთნაირი დიამეტრის ღეროს განვათავსებთ როგორც აღვწერეთ, რომ ერთმა დაფაროს მეორე, მაგრამ კიდეებიდან ოდნავ ჩანდეს მეორე, მაშინ მათი დიამეტრები თვალის გუგისაზე არანაკლებია.

რომ ამეგო კუთხე, რომელიც არანაკლებია იმაზე, რომლითაც ჩანს მზე, როდესაც კუთხის წვერო თვალის ცენტრშია, მე დავიწყე ღეროს თვალიდან გაწევა მანამ, სანამ ღერომ არ დაფარა მზე, და შემდეგ სახაზავის ბოლოდან ღეროსკენ გავავლე მხებები: შესაბამისად, მხებებს შორის მივიღე კუთხე არანაკლები იმაზე, რომლითაც თვალის ცენტრიდან გამოსული კუთხით ჩანს მზე (სურ. 2 გ).

გავზომე რა, მართი კუთხის საშუალებით, ამგვარად აგებული კუთხე, ვიპოვე, რომ ყველაზე დიდი მათ შორის იყო ნაკლები, ვიდრე მართი კუთხის 1/164 და მეტი იყო მართი კუთხის 1/200, საიდანაც გამოდის, რომ კუთხე, რომლითაც ჩანს მზე, როდესაც მისი წვერო თვალის ცენტრშია, მართი კუთხის 1:164 ნაკლები და 1:200 მეტია.[9]

ახლა უკვე მარტივია იმის დამტკიცება, რომ მზის დიამეტრი მეტია სამყაროს უდიდეს წრეში ჩახაზულ 1000-კუთხედის გვერდზე.

წარმოვიდგინოთ სიბრტყე, რომელიც გადის დედამიწის, მზისა და დამკვირვებლის თვალის ცენტრებზე, როდესაც მზე ოდნავ აცდა ჰორიზონტს (სურ. 3).

დავუშვათ ეს სიბრტყე გაკვეთს სამყაროს ბირთვს ABΓ წრეზე, დედამიწის ბირთვს — ΔEZ წრეზე, ხოლო მზეს — ΣT წრეზე; დავუშვათ H არის დედამიწის ცენტრი, K — მზის და Δ — თვალის.

გავავლოთ Δ-დან ΣT წრის მხებები ΔΛ, ΔM, რომლებიც წრეს ეხებიან N და O წერტილებში, ხოლო H წერტილიდან ამავე წრის მხებები HΞ და HP, რომლებიც წრეს ეხებიან Φ და Ψ წერტილებში. დაბოლოს, წრფეები HΞ და HP კვეთენ ABΓ წრეს A და B წერტილებში.

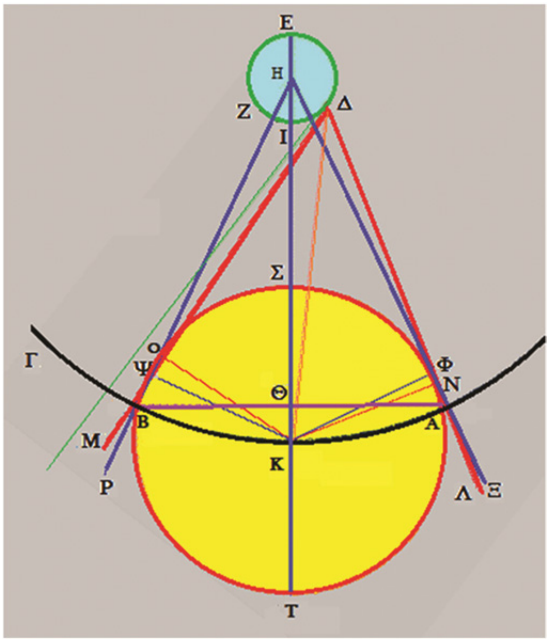
მონაკვეთი HK მეტია KΔ-ზე, რადგან ჩვენ დავუშვით, რომ მზე ჰორიზონტზეა:[10] ამიტომ კუთხე ΛΔM მეტია ΞHP კუთხეზე.[11]

მაგრამ კუთხე ΛΔM მეტია მართი კუთხის 1/200 და ნაკლებია მართი კუთხის 1/164, რადგან ეს კუთხე ტოლია იმისა, რომლითაც ჩანს მზე, როდესაც წვერო თვალშია; ამიტომაც ΞHP კუთხე ნაკლებია მართი კუთხის 1/164. შედეგად, მონაკვეთი AB ნაკლებია ABΓ წრეწირის ერთ ექვსას ორმოცდამეთექვსმეტედ რკალის მომჭიმავ მონაკვეთზე (ქორდაზე — ი.თ.).

ამ მრავალკუთხედის პერიმეტრი ისე შეეფარდება ABΓ წრეწირის რადიუსს, როგორც 44:7, იმიტომ, რომ ნებისმიერი ჩახაზული მრავალკუთხედის პერიმეტრის შეფარდება იმ წრის რადიუსთან ნაკლებია 44:7.[12]

ო, ჰელონ, როგორც შენთვის ცნობილია, ჩემ მიერ დამტკიცებულია, რომ ნებისმიერი წრეწირის სიგრძე მეტია გასამმაგებულ დიამეტრზე და მეტობა ნაკლებია დიამეტრის 1/7 და მეტია 10/71. ამიტომ ფარდობა AB / HK ნაკლებია 11:1148,[13] შესაბამისად, AB ნაკლებია HK მონაკვეთზე 1/100-ით.

ΣT წრის დიამეტრი ტოლია AB მონაკვეთის, რადგან მისი ნახევარი ΘA მონაკვეთი ტოლია KΦ-სა, რადგან ტოლია HK და HA მონაკვეთები, რომელთა ბოლოებიდან აღნიშნული კუთხის მოპირდაპირედ გავლებულია მართობები.



სურ. 3. თვალის, დედამიწის, მზისა და სამყაროს წრეების სიბრტყით გაკვეთით მიღებული სქემატური ნახაზი - აღებულია [1,2] ნაშრომებიდან.

შედეგად, ΣT წრის დიამეტრი 1/100 ნაკლებია HK მონაკვეთზე. H ანუ EHI წრის დიამეტრი ნაკლებია ΣT წრის დიამეტრზე, რადგან ΔEZ ნაკლებია ΣT წრეზე, აქედან კი HIKΣ ერთი მეასედით ნაკლებია HK მონაკვეთზე.

ამიტომ ფარდობა HK/ΣI ნაკლებია 100/99,[14] მაგრამ HK არაა ნაკლები HΦ-ზე, ხოლო IΣ ნაკლებია ΔO, ამიტომ ფარდობა HΦ/ ΔO ნაკლებია, ვიდრე 100/99.

რადგან HKΦ და ΔKO მართკუთხა სამკუთხედებში KΦ და KO გვერდები ტოლია, ხოლო HΦ და ΔO — არა, თანაც HΦ დიდია, შედეგად, ფარდობა KΔO და KHΦ კუთხეებს შორის მეტია, ვიდრე ფარდობა HK და ΔK მონაკვეთებს შორის, მაგრამ ნაკლებია HΦ-ის ფარდობაზე ΔO-სთან.

რადგან, თუ ორი მართკუთხა სამკუთხედის თითო მართ კუთხესთან მიმდებარე გვერდი (კათეტი — ი.თ.) ტოლია და მეორე არა,

მაშინ არატოლ მართ კუთხესთან მიმდებარე გვერდებთან (ანუ კათეტებთან) მიმდებარე კუთხეებიდან უფრო დიდის შეფარდება მცირესთან მეტია, ვიდრე მართი კუთხის მოპირდაპირე დიდი გვერდის ფარდობა პატარასთან (ანუ დიდი ჰიპოტენუზის ფარდობა პატარა ჰიპოტენუზასთან — ი.თ.), მაგრამ უფრო პატარაა, ვიდრე არატოლი მართ კუთხესთან მიმდებარე გვერდებიდან დიდის შეფარდება პატარასთან.[15]

შესაბამისად, ΛΔΜ და ΞΗΡ კუთხეების ფარდობა ნაკლებია ΗΦ-ის ფარდობაზე ΔΟ-თან, ხოლო ეს უკანასკნელი ნაკლებია 100/99.[16]

ამიტომაა, რომ ΛΔΜ და ΞΗΡ კუთხეების ფარდობა ნაკლებია 100/99. [17]

ამგვარად, ΛΔΜ კუთხე მეტია ერთი მესედით მართ კუთხეზე და, შესაბამისად, ΠΗΡ კუთხე მეტია ერთ 99 /2000-ზე, შესაბამისად, მართი კუთხის ერთ ორას მესამე ნაწილთან.[18] ამიტომ ΑΒ მონაკვეთი მეტია ΑΒΓ რკალის მომჭიმავ მონაკვეთის 812 ნაწილზე. მაგრამ მზის დიამეტრი ΑΒ-ს ტოლია: ამგვარად, ცხადია, რომ მზის დიამეტრი ათასკუთხედის გვერდზე მეტია.

დამატებით დავამტკიცოთ, რომ სამყაროს დიამეტრი ნაკლებია მირიადჯერ აღებულ დედამიწის დიამეტრზე და იმავდროულად ის ნაკლებია, ვიდრე მირიადჯერ მირიადი ასი სტადიუმი.

მართლაც, რადგან უკვე დავუშვით, რომ მზის დიამეტრი 30-ჯერ აღებულ მთვარის დიამეტრს არ აღემატება, ხოლო დედამიწის დიამეტრი მეტია მთვარის დიამეტრზე, ცხადია, რომ მზის დიამეტრი ნაკლებია, ვიდრე 30-ჯერ აღებული დედამიწის დიამეტრი.

გარდა ამისა, რადგან უკვე დავამტკიცეთ, რომ მზის დიამეტრი მეტია სამყაროს ბირთვში ჩახაზული ათასკუთხედის გვერდზე, ცხადი ხდება, რომ ამ ათასკუთხედის პერიმეტრი უფრო მცირეა, ვიდრე ათასჯერ აღებული მზის დიამეტრი.

მაგრამ მზის დიამეტრი ნაკლებია 30-ჯერ აღებულ დედამიწის დიამეტრზე, შესაბამისად, ამ ათასკუთხედის პერიმეტრი ნაკლებია, ვიდრე 3 მირიადჯერ აღებული დედამიწის დიამეტრი.

ამგვარად, ამ ათასკუთხედის პერიმეტრი ნაკლებია რა, ვიდრე 3 მირიადჯერ აღებული დედამიწის დიამეტრი, მაგრამ მეტია, ვიდრე გასამმაგებული სამყაროს დიამეტრი, რადგან დამტკიცებულია, რომ ნებისმიერი წრის დიამეტრი ნაკლებია, ვიდრე მასში ჩახაზული (წესიერი) მრავალკუთხედის, რომელსაც გააჩნია ექვსზე მეტი გვერდი, პერიმერტის მესამედი, ამიტომაც სამყაროს დიამეტრი ნაკლებია მირიადჯერ აღებულ დედამიწის დიამეტრზე.

ხოლო სამყაროს დიამეტრი, რომელიც ნაკლებია მირიადჯერ აღებულ დედამიწის დიამეტრზე, რომ ნაკლებია, ვიდრე მირიადჯერ მირიადი ასი სტადიუმი, ჩანს შემდეგნაირად: ითვლება, რომ დედამიწის გარშემოწერილობა არაა უმეტესი 300 მირიად სტადიუმზე და დედამიწის გარშემოწერილობა სამჯერ მეტია მის გასამმაგებულ დიამეტრზე, რადგან ნებისმიერი წრის გარშემოწერილობა მეტია მის გასამმაგებულ დიამეტრზე. ამგვარად ცხადია, რომ დედამიწის დიამეტრი ნაკლებია 100 მირიად სტადიუმზე და რადგან სამყაროს დიამეტრი ნაკლებია მირიადჯერ აღებულ დედამიწის დიამეტრზე, აქედან გამოდის, რომ სამყაროს დიამეტრი ნაკლებია მირიადჯერ მირიადი ასი სტადიუმი. ამგვარია დებულებები ზომებსა და მანძილებზე.

სილის შესახებ მე შემდეგნაირად ვმსჯელობ: პირველი — თუ ავიღებთ ყაყაჩოს თესლის არაუმეტეს (მოცულობის — ი.თ.) სილას, მასში მარცვლების რაოდენობა იქნება არაუმეტეს მირიადისა; მეორე — ამ თესლის დიამეტრი იქნება არანაკლებ ერთი „დაქტილის“ მეორმოცედი ნაწილისა.

უკანასკნელად ვუშვებ, ვეყრდნობი რა შემდეგ ცდას: პატარა დაფაზე დავალაგე ყაყაჩოს თესლები სწორი ხაზის გასწვრივ ისე, რომ ისინი ერთმანეთს ეხებოდნენ, და აღმოჩნდა, რომ თესლის ოცდახუთმა მარცვალმა სიგრძეში დაიკავა არაუმეტეს ერთი დაქტილისა. მაგრამ მე დავუშვი, რომ ყაყაჩოს თესლის ერთი მარცვალი კიდევ უფრო პატარაა, ანუ, მისი დიამეტრი არანაკლებია დაქტილის ერთ მეორმოცედზე. ამ შემთხვევაში არავითარი წინააღმდეგობა არ წარმოიშობა იმასთან, რაც მე მინდა დავამტკიცო. აი, ჩემი ყველა დაშვება.

გარდა ამისა, მე ვთვლი სასარგებლოდ აქვე ჩამოვაყალიბო რიცხვთა კლასიფიკაცია, რადგან ვშიშობ, თუ ამის შესახებ არაფერს ვიტყვი, ისინი, ვისაც არ წაუკითხავს ჩემი ზევ-

ქსიპესადმი მიწერილი წიგნი, არ შევიდნენ შეცდომაში.

მირიადამდე რიცხვებს აქვთ გარკვეული დასახელებები, როგორც მათ, რომლებიც შემდგომ მირიადო მირიადამდე მოდიან, რადგან მათში წინას გამეორებაა. ახლა აღნიშნულ რიცხვებს, ე.ი. მირიადო მირიადამდე რიცხვებს დავარქვათ „პირველები“, ხოლო „პირველი“ რიცხვების მირიადო მირიადს დავარქვათ „მეორე“ რიცხვების ერთიანი და დავიწყებთ თვლას ამ ერთეულებით, მათი ათეულებით, ასეულებით, ათასეულებით, მირიადებით და ასე შემდეგ მირიადო მირიადამდე. შემდეგ „მეორე“ რიცხვების მირიადო მირიადს დავარქვათ „მესამე“ რიცხვების ერთიანი და მათი ათეულებით, ასეულებით, ათასეულებით, მირიადებით და ასე შემდეგ მირიადო მირიადამდე.

ზუსტად ასევე, „მესამე“ რიცხვების მირიადო მირიადს დავარქვათ „მეოთხე“ რიცხვების ერთიანი, „მეოთხე“ რიცხვების მირიადო მირიადს დავარქვათ „მეხუთე“ რიცხვების ერთიანი და გავაგრძელოთ ასეთივე წესით შემდეგი რიცხვების სახელდება მირიადო მირიადებით „მირიადო მირიადამდე“. რა თქმა უნდა, ამხელა რიცხვებით გამოსახული რაოდენობები ჩვენთვის საკმარისი იქნება. თუმცა შესაძლებელია მოვიქცეთ შემდეგნაირად: დავარქვათ ჩვენ მიერ აღწერილ რიცხვებს „პირველი პერიოდის რიცხვები“. ამ რიცხვების ბოლო რიცხვი გამოვაცხადოთ „მეორე პერიოდის ერთიანად“ და ისევ მირიადო მემირიადე „მეორე პერიოდის“ პირველ რიცხვს დავარქვათ ამავე პერიოდის მეორე რიცხვების ერთიანი და წინა მსჯელობისნაირად ამ პერიოდის ბოლო რიცხვს დავარქვათ ამავე „მეორე“ პერიოდის მესამე რიცხვების ერთიანი. გავაგრძელოთ ამგვარად მოქცევა მირიადი მირიადჯერ მეორე რიგის მირიად მირიადამდე. ამ პერიოდის ბოლო რიცხვს დავარქვათ „მესამე პერიოდის ერთიანი“ და ა.შ. ამგვარი საშუალებით რიცხვების სახელდება შემდომ მიგვიყვანს მირიადო მემირიადე „მირიადო მირიადი პერიოდის“ მირიადო მირიად რიცხვამდე.

ამგვარი ნომენკლატურის (აღრიცხვის — თ.ი.) დაშვებისას შევთანხმდეთ: თუ, დაწყებული ერთიანიდან, რიცხვები იქნებიან უწყვეტად პროპორციულნი (გეომეტრიული პროგრესია — თ.ი.) და მათი მეორე წევრი იქნება ათიანი, ვუწოდოთ „პირველები“ რვა პირველ წევრს ერთიანის ჩათვლით; „მეორეები“ — შემდეგ რვა წევრს და ამგვარად ყველა სხვას, ყოველი რვა წევრის ჩათვლით. ყოველი ასეთი „ოქტადა“ მიიღებს ახალ დასახელებას იმაზე დამოკიდებულებით, თუ როგორაა ის დაშორებული „პირველი რიცხვების ოქტადიდან“.

შესაბამისად, პირველი ოქტადის მერვე რიცხვი იქნება ათასი მირიადი, მეორე ოქტადის პირველი რიცხვი, რომელიც არის „მეორე რიცხვების ერთიანი“ , იქნება მირიადო მირიადი, რადგან ის არის თავის წინმდგომი რიცხვის ათმაგი. მეორე ოქტადის მერვე რიცხვი იქნება „მეორე“ რიცხვების ათასი მირიადი, რადგან ის ათმაგია წინამორბედის.

ამგვარად ცხადია, როგორც ზემოთაა აღნიშნული, რომ იქნება მრავალი ოქტადა.[19]

სასარგებლოა აღინიშნოს შემდეგი: თუ მოცემულია ერთიანიდან დაწყებული პროპორციული რიცხვების უწყვეტი რიგი („მიმდევრობა“ ან გეომეტრიული პროგრესია — ი.თ.) და თუ ამ რიგის ორ წევრს გადავამრავლებთ, მაშინ ნამრავლიც ამ რიგის წევრი იქნება, თანაც, იმდენად დაშორებული უდიდესი მამრავლიდან, რამდენადაც მცირე მამრავლი დაშორებულია ერთიანიდან. ის კი დაშორებული იქნება ერთიანიდან ერთი წევრით ნაკლებად, იმასთან შედარებით, რამდენითაც დაშორებულია მისგან ორივე მამრავლი.

თუ $A,B,\Gamma,\Delta,E,Z,H,\Theta,I,K,\Lambda$ არის პროპორციული რიცხვების უწყვეტი რიგი, დაწყებული ერთიანიდან, ამგვარად, A არის ერთიანი, მაშინ დავუშვათ, ნამრავლი Δ და Θ არის რაღაც რიცხვი Φ. ავიღოთ ამ რიგის წევრი Λ, იმდენად დაშორებული Θ-დან, რამდენადაც Δ დაშორებულია ერთიანიდან. გვინდა დავამტკიცოთ, რომ Φ ტოლია Λ. რადგან $A,B,\Gamma,\Delta,E,Z,H,\Theta,I,K,\Lambda$ პროპორციული რიცხვებია და რამდგანაც Δ იმდენად დაშორებულია A-დან, როგორც Λ დაშორებულია Θ-დან, ამიტომ Δ ისე შეეფარდება A-ს, როგორც Λ შეეფარდება Δ-ს. ანუ Δ არის Δ-ჯერ რიცხვი A, ამიტომ Λ არის Δ-ჯერ რიცხვი Θ, შესაბამისად, $\Lambda = \Phi$.

ამგვარად, ცხადია, რომ Θ და Δ რიცხვების ნამრავლი არის ამ რიგის წევრი და ის დაშორებულია უდიდესი მამრავლიდან იმდენი

წევრით, რამდენითაც მცირე მამრავლი დაშორებულია ერთიანიდან. ამას გარდა, ცხადია, რომ ეს ნამრავლი დაშორებულია ერთი წევრით უფრო ნაკლები რაოდენობით, ვიდრე ორივე წევრი ერთად დაშორებულია ერთიანიდან, რადგან Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Θ არის წევრთა რაოდენობა, რომლითაც Θ დაშორებულია ერთიანიდან, ხოლო Ι,Κ,Λ წევრთა რაოდენობა ერთით ნაკლებია იმ რაოდენობაზე, რითაც Δ დაშორებულია ერთიანს, ამიტომაც Θ-სთან ერთად ისინი იძლევიან ამ უკანასკნელს.[20]

ყოველივე ეს — ნაწილობრივ დაშვებული, ნაწილობრივ დამტკიცებული, გვაძლევს საშუალებას გადავიდეთ ჩვენს ძირითად დებულებაზე.

როგორც იყო დაშვებული, ყაყაჩოს თესლის დიამეტრი არის ერთი დაქტილის მეორმოცედი და ცხადია, რომ ერთი დაქტილის დიამეტრის მქონე ბირთვი ჩაიტევს არაუმეტეს 64000 ყაყაჩოს თესლს, რადგან ის ამდენჯერ მეტია ბირთვზე, რომლის დიამეტრია ერთი დაქტილის მეორმოცედი, რადგან ნაჩვენებია, რომ ბირთვების ფარდობა მათი დიამეტრების კუბების ფარდობით განისაზღვრება.

მაგრამ ადრე გავაკეთეთ დაშვება, რომ ყაყაჩოს თესლის ტოლ მოცულობაში სილის მარცვლების რაოდენობა მირიადზე მეტი არაა, საიდანაც ცხადია, რომ სილის მარცვლების რაოდენობა ბირთვში, რომლის დიამეტრია ერთი დაქტილი, იქნება არაუმეტეს მირიადჯერ ექვსი მირიად ოთხი ათასი. ეს რიცხვი შეიცავს „მეორე" რიცხვების ექვს ერთეულს და „პირველი" ერთეულების ოთხი ათას მირიადს, ე.ი. ათ ერთეულზე ნაკლებ „მეორე" რიცხვებს.

100 დაქტილის დიამეტრის მქონე ბირთვი ტოლია ასი მირიადჯერ აღებული ერთი დაქტილის დიამეტრის მქონე ბირთვისა, რადგან ბირთვების ფარდობა დიამეტრების კუბების ფარდობის სადარია.

ამგვარად, თუ მოცემულია სილით სავსე ბირთვი, რომლის დიამეტრია ასი დაქტილი, ცხადია, რომ სილის მარცვლების რაოდენობა იქნება ნაკლები „მეორე" რიცხვების ათი ერთეულის ნამრავლისა ას მირიადზე. და რადგან „მეორე" რიცხვების ათი ერთეული არის პროპორციულ რიცხვთა რიგის, რომელიც იზრდება ათმაგი ფარდობით, მეათე წევრი, გადათვლილი ერთიანიდან, ხოლო ასი მირიადი — ამავე რიგის ერთიანიდან მეშვიდე წევრი, მათი ნამრავლი იქნება ამავე რიგის მეთექვსმეტე წევრი, რადგან დამტკიცებულია, რომ ნამრავლი დაშორებულია ერთიანს ერთი წევრით ნაკლებით, ვიდრე თითოეული ნამრავლი ერთად.

მაგრამ თექვსმეტიდან პირველი რვა წევრი, ერთიანის ჩათვლით, ეკუთვნის რიცხვებს, რომელთაც ვუწოდეთ „პირველები", ხოლო შემდეგი რვა ე.წ. „მეორეებს", თანაც, ბოლო არის ათასი მირიადი „მეორე" რიცხვებისა. აქედან ჩანს, რომ სილის მარცვლების რაოდენობა ასი დაქტილის დიამეტრის მქონე ბირთვში არის ნაკლები, ვიდრე ათასი მირიადი „მეორე" რიცხვებისა.

მირიადი დაქტილის დიამეტრის მქონე ბირთვი ტოლია ას მირიადჯერ აღებული ბირთვისა, რომლის დიამეტრია ასი დაქტილი.

ამგვარად, თუ მოცემულია სილით სავსე მირიადი დაქტილის დიამეტრის მქონე ბირთვი, ცხადია, რომ სილის მარცვლების რაოდენობა იქნება ნაკლები ათასი მირიადი მეორე რიცხვების ნამრავლისა ას მირიადზე. და რადგან მეორე რიცხვების ათასი მირიადი არის ერთიანიდან დაწყებული მეთექვსმეტე პროპორციული წევრი და ასი მირიადი არის ერთიანიდან დაწყებული ამავე რიგის მეშვიდე წევრი, ცხადია, რომ მათი ნამრავლი იქნება ამავე რიგის ერთიანიდან ოცდამეორე წევრი. მაგრამ ამ ოცდაორი წევრიდან პირველი რვა, მათ შორის ერთიანიც, ეკუთვნის რიცხვებს, რომელთაც „პირველები" ეწოდებათ; შემდეგი რვა არის „მეორე" რიცხვები, ხოლო დანარჩენი ექვსი არის ათი მირიადი „მესამე" რიცხვები.

რადგანაც ერთი სტადიუმის დიამეტრის მქონე ბირთვი ნაკლებია მირიადი დაქტილის მქონე ბირთვზე, ცხადია, რომ სილის მარცვლების რაოდენობა ერთი სტადიუმის დიამეტრის მქონე ბირთვში ნაკლებია ათ მირიად მესამე „რიცხვზე".

ასი სტადიუმის დიამეტრის მქონე ბირთვი ტოლია ას მირიადჯერ აღებული ბირთვისა, რომლის დიამეტრია ერთი სტადიუმი.

ამგვარად, თუ მოცემულია სილით სავსე ასი სტადიუმის დიამეტრის მქონე ბირთვი,

ცხადია, რომ სილის მარცვლების რაოდენობა იქნება ნაკლები ათი მირიადი „მესამე“ რიცხვის ნამრავლისა ას მირიადზე.

ათი მირიადი „მესამე“ რიცხვი ერთიანიდან არის პროპორციული რიგის ოცდამეორე წევრი, ხოლო ასი მირიადი ამავე რიგის ერთიანიდან მეშვიდე წევრი, ამიტომ მათი ნამრავლი არის ამავე რიგის ერთიანიდან ოცდამერვე წევრი. მაგრამ ამ ოცდარვა წევრიდან პირველი რვა, მათ შორის ერთიანიც, ეკუთვნის რიცხვებს, რომელთაც „პირველები“ ეწოდებათ, შემდეგი რვა არის „მეორე“ რიცხვები, შემდეგი რვა არის „მესამე“ რიცხვები, ხოლო დანარჩენი ოთხი არის „მეოთხე“ რიცხვები, თანაც ამ რიცხვებიდან უკანასკნელი არის „მეოთხე“ რიცხვის ათასი, საიდანაც გამოდის, რომ სილის მარცვლების რაოდენობა ასი სტადიუმის დიამეტრის მქონე ბირთვში არის ნაკლები „მეოთხე“ რიცხვების ათას ერთეულზე.

მირიადი სტადიუმის დიამეტრის მქონე ბირთვი ტოლია ას მირიადჯერ აღებული ბირთვისა, რომლის დიამეტრია ასი სტადიუმი. ამგვარად, თუ მოცემულია სილით სავსე მირიადი სტადიუმის დიამეტრის მქონე ბირთვი, ცხადია, რომ სილის მარცვლების რაოდენობა იქნება ნაკლები ათასი „მეოთხე“ რიცხვის ერთეულის ნამრავლისა ას მირიადზე.

ათასი „მეოთხე“ რიცხვების ერთეულისა ერთიანიდან არის პროპორციული რიგის ოცდამერვე წევრი, ხოლო ასი მირიადი ამავე რიგის ერთიანიდან მეშვიდე წევრი, ამიტომ მათი ნამრავლი არის ამავე რიგის ერთიანიდან ოცდამეთოთხმეტე წევრი. მაგრამ ამ ოცდამეთოთხმეტე წევრიდან პირველი რვა, მათ შორის ერთიანიც, ეკუთვნის რიცხვებს, რომელთაც „პირველები“ ეწოდებათ; შემდეგი რვა იწოდება „მეორე“ რიცხვებად, შემდეგი რვა ეგრეთ წოდებული „მესამე“ რიცხვებია, შემდეგი რვა იწოდება „მეოთხე“ რიცხვებად, ხოლო დანარჩენი ორი არის „მეხუთე“ რიცხვების ათი ერთეული; ამიტომაც სილის მარცვლების რაოდენობა მირიადი სტადიუმის დიამეტრის მქონე ბირთვში არის ნაკლები „მეოთხე“ რიცხვების ათ ერთეულზე.

ასი მირიადი სტადიუმის დიამეტრის მქონე ბირთვი ტოლია ას მირიადჯერ აღებული ბირთვისა, რომლის დიამეტრია მირიადი სტადიუმი.

ამგვარად, თუ მოცემულია სილით სავსე ასი მირიადი სტადიუმის დიამეტრის მქონე ბირთვი, ცხადია, რომ სილის მარცვლების რაოდენობა იქნება ნაკლები ათ „მეხუთე“ რიცხვების ერთეულის ნამრავლისა ას მირიადზე. რადგან ათი „მეხუთე“ რიცხვების ერთეულისა ერთიანიდან არის პროპორციული რიგის ოცდამეთოთხმეტე წევრი, ხოლო ასი მირიადი ამავე რიგის ერთიანიდან მეშვიდე წევრი, ამიტომ მათი ნამრავლი არის ამავე რიგის ერთიანიდან მეორმოცე წევრი. მაგრამ ამ ორმოცი წევრიდან პირველი რვა, მათ შორის ერთიანიც, ეკუთვნის რიცხვებს, რომელთაც „პირველები“ ეწოდებათ; შემდეგი რვა იწოდება „მეორე“ რიცხვებად, მათ შემდეგ რვა ეგრეთ წოდებული „მესამე“ რიცხვებია, მესამის შემდეგი რვა იწოდება „მეოთხე“ რიცხვებად, ხოლო შემდეგი რვა იწოდება „მეხუთე“ რიცხვებად, თანაც მათ შორის უკანასკნელი არის ათასი მირიადი „მეხუთე“ რიცხვებისა; ამიტომაც ცხადია, რომ სილის მარცვლების რაოდენობა ასი მირიადი სტადიუმის დიამეტრის მქონე ბირთვში არის ნაკლები „მეხუთე“ რიცხვების ათას მირიად ერთეულზე.

მირიადო მირიადი სტადიუმის დიამეტრის მქონე ბირთვი ტოლია ას მირიადჯერ აღებული ბირთვისა, რომლის დიამეტრია ასი მირიადი სტადიუმი. შესაბამისად, თუ მოცემულია სილით სავსე მირიადო მირიადი სტადიუმის დიამეტრის მქონე ბირთვი, ცხადია, რომ სილის მარცვლების რაოდენობა იქნება ნაკლები ათასი მირიადი „მეხუთე“ რიცხვების ერთეულის ნამრავლისა ას მირიადზე. რადგან ათი „მეხუთე“ რიცხვების ერთეულისა ერთიანიდან არის პროპორციული რიგის მეორმოცე წევრი, ხოლო ასი მირიადი ამავე რიგის ერთიანიდან მეშვიდე წევრი, ამიტომ მათი ნამრავლი არის ამავე რიგის ერთიანიდან ორმოცდამეექვსე წევრი.

მაგრამ ამ ორმოცდაექვსი წევრიდან პირველი რვა, მათ შორის ერთიანიც, ეკუთვნის რიცხვებს, რომელთაც „პირველები“ ეწოდებათ; შემდეგი რვა იწოდება „მეორე“ რიცხვებად, მათ შემდეგ რვა ეგრეთ წოდებული „მესამე“ რიცხვებია, მესამის შემდეგი რვა იწოდება „მეოთხე“ რიცხვებად, შემდეგი რვა იწოდება „მეხუთე“ რიცხვებად,

ხოლო დანარჩენი ექვსი არის „მეექვსე" რიცხვები, თანაც მათ შორის უკანასკნელი არის ათი მირიადი „მეექვსე" რიცხვებისა. ამიტომაც, სილის მარცვლების რაოდენობა მირიადო მირიადი სტადიუმის დიამეტრის მქონე ბირთვში არის ნაკლები „მეექვსე" რიცხვების ათ მირიად ერთეულზე.

ასი მირიადო მირიადი სტადიუმის დიამეტრის მქონე ბირთვი ტოლია ას მირიადჯერ აღებული ბირთვისა, რომლის დიამეტრია მირიადო მირიადი სტადიუმი. შესაბამისად, თუ მოცემულია სილით სავსე ასი მირიადო მირიადი სტადიუმის დიამეტრის მქონე ბირთვი, ცხადია, რომ სილის მარცვლების რაოდენობა იქნება ნაკლები ათი მირიადი „მეექვსე" რიცხვების ერთეულის ნამრავლისა ას მირიადზე. რადგან ათი მირიადი „მეექვსე" რიცხვების ერთეულისა ერთიანიდან არის პროპორციული რიგის ორმოცდამეექვსე წევრი, ხოლო ასი მირიადი ამავე რიგის ერთიანიდან მეშვიდე წევრი, ამიტომ მათი ნამრავლი არის ამავე რიგის ერთიანიდან ორმოცდამეთორმეტე წევრი. მაგრამ ამ ორმოცდათორმეტი წევრიდან პირველი რვა, მათ შორის ერთიანიც, ეკუთვნის რიცხვებს, რომელთაც „პირველები" ეწოდებათ, შემდეგ „მეორეები", „მესამეები", „მეოთხეები", „მეხუთეები" და „მეექვსეები", ხოლო დარჩენილი ოთხი რიცხვი „მეშვიდე" რიცხვებს განეკუთვნება, თანაც მათ შორის უკანასკნელი არის ათასი „მეშვიდე" რიცხვებისა. ამიტომაც, სილის მარცვლების რაოდენობა ასი მირიადო მირიადი სტადიუმის დიამეტრის მქონე ბირთვში არის ნაკლები „მეშვიდე" რიცხვების ათას ერთეულზე.

რადგან დამტკიცებულია, რომ სამყაროს ბირთვის დიამეტრი ნაკლებია ას მირიადო მირიად სტადიუმზე, ცხადი ხდება, რომ სილის მარცვლების რაოდენობა, რომელიც სამყაროში ჩაეტევა, ნაკლებია „მეშვიდე" რიცხვების ათას ერთეულზე. შესაბამისად, დამტკიცებულია, რომ სილის მარცვლების რაოდენობა, რომელიც ჩაეტევა ბირთვში, რომელიც ტოლია სამყაროს ბირთვისა, როგორც ეს წარმოუდგენია ასტრონომების დიდ ნაწილს, ნაკლებია „მეშვიდე" რიცხვების ათას ერთეულზე.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ სილის მარცვლების რაოდენობა, რომელიც ჩაეტევა ბირთვში, რომელიც უძრავი ვარსკვლავების ტოლია, ანუ არისტარქეს მიერ მიღებული უძრავი ვარსკვლავთ ცა, იქნება ნაკლები „მერვე" რიცხვების ათას მირიად ერთეულზე.

მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ დედამიწა ისე შეეფარდება ბირთვს, რომელსაც სამყარო ეწოდება, როგორც ეს უკანასკნელი შეეფარდება არისტარქეს მიერ მიღებულ უძრავ ვარსკვლავთ ცის ბირთვს, და თუ ამ ბირთვების დიამეტრები ასე არიან დაკავშირებული, მაშინ, რადგან დამტკიცებულია, რომ სამყაროს დიამეტრი ნაკლებია მირიადჯერ აღებულ დედამიწის დიამეტრზე, ცხადი ხდება, რომ უძრავი ვარსკვლავთ ცის ბირთვის დიამეტრი ნაკლებია მირიადჯერ აღებულ სამყაროს დიამეტრზე.

მაგრამ ბირთვების ფარდობა მათი დიამეტრების კუბების ფარდობით განისაზღვრება, ამიტომაც არისტარქეს მიერ მიღებული უძრავი ვარსკვლავთ ცა მირიადო მირიადჯერ აღებული მირიადი სამყაროს ბირთვზე ნაკლებია.

მაგრამ დამტკიცებულია, რომ სილის მარცვლების რაოდენობა, რომელიც სამყაროს ბირთვში ეტევა, „მეშვიდე" რიცხვების ათას ერთეულზე ნაკლებია. ამიტომაც, რომ არსებობდეს სილით სავსე, არისტარქეს მირ მიღებული, უძრავი ვარსკვლავთ ცის ბირთვი, მაშინ სილის მარცვლების რაოდენობა იქნებოდა ნაკლები, ვიდრე „მეშვიდე" რიცხვების ათასი ერთეულის ნამრავლი მირიადო მირიადჯერ მირიადი.

რადგან ათასი ერთეული „მეშვიდე" რიცხვებისა ერთიანიდან არის პროპორციული რიგის ერთიანიდან მეცამეტე წევრი, ამიტომ მათი ნამრავლი არის ამავე რიგის ერთიანიდან სამოცდამეოთხე წევრი.

მაგრამ ეს რიცხვი არის „მერვე" რიცხვების მერვე რიცხვი, ანუ ათასი მირიადი „მერვე" რიცხვი.

შესაბამისად, ცხადია, რომ სილის მარცვლების რაოდენობა, რომელიც არისტარქეს მიერ მიღებულ უძრავი ვარსკვლავთ ცის ბირთვში ეტევა, იქნება ათას მირიად „მერვე" რიცხვზე ნაკლები [20].

მეუფეო! რა თქმა უნდა, ჩემ მიერ თქმული დაუჯერებლად მოეჩვენებათ მათ, ვისაც მათემატიკა არ შეუსწავლია, მაგრამ იქნება

ჭეშმარიტი, რადგან დამტკიცებულია მათთვის, ვინც ამით იყო დაკავებული, თანაც, თუ ყურადღებით განიხილავს ყოველივე ზემოთქმულს დედამიწის, მზის, მთვარისა და მთელი სამყაროს შესახებ.

თუმცა მე ჩემი მხრიდან ვხედავ, რომ სასარგებლო იქნება, თუ ამ საგანს სხვები გამოიკვლევენ უფრო საფუძვლიანად.

ლიტერატურა

[1]. Archimedes,The Sand-Reckoner (Arenarius), ch. 1 (sects. 1-20)translated by Henry Mendell (Cal. State U., .A.);https://web.calstatela.edu/faculty/hmendel/Ancient%20Mathematics/Archimedes/SandReckoner/Ch.1/Ch1.html;

[2]. Архимед исчисление песчинок (Псаммит) – 1932 г. https://www.mathedu.ru/text/arhimed_ischislenie_peschinok_1932/p100/

[3]. Bell, A. H. (1895), "The "Cattle Problem." By Archimedies 251 B. C.", *The American Mathematical Monthly*, Mathematical Association of America, **2** (5): 140–141.

კომენტარები და დამატებები

1. არქიმედე გულისხმობს ჩვენამდე არმოღწეულ არითმეტიკული შინაარსის წიგნს — „αρχαι“. არითმეტიკა — სწავლება რიცხვების თვისებების შესახებ, ლოგისტიკა — ჩვენი გაგებით პრაქტიკული არითმეტიკა — მათემატიკა, რომელიც მისწერა ზევქსიპე ბეოტიელს.

ჩვ.წ.აღრიცხვამდე VIII საუკუნეში საბერძნეთში შემოღებულია ე.წ. ნუმერაციის მილეთური სისტემა, რომელიც ალფაბეტის 26 ასოს იყენებს და სიმარტივისათვის შემოღებული იყო კიდევ ერთი ასო „ცადე“, რომელიც შემდგომ ამოიღეს ხმარებიდან. პირველი ცხრა ასო არის ერთეულები, შემდეგი ცხრა ასო წარმოადგენს ათეულებს, ხოლო შემდეგი ცხრა — ასეულებს.

სახელი		N		ქარ	სახელი		N		ქარ	სახელი		N		ქარ
Alpha ალფა	Α	1	Ⴀ	ან	Iota იოტა	ι	10	Ⴈ	ინ	Rho რო	ρ	100	Ⴐ	რა
Beta ბეტა	Β	2	Ⴁ	ბან	Kappa კაპა	κ	20	Ⴉ	კან	Sigma სიგმა	σ	200	Ⴑ	სან
Gamma გამა	Γ	3	Ⴂ	გან	Lambda ლამბდა	λ	30	Ⴊ	ლას	Tau ტაუ	τ	300	Ⴒ	ტარ
Delta დელტა	Δ	4	Ⴃ	დონ	My მიუ	μ	40	Ⴋ	მან	Ypsilon იპსილონ	υ	400	Ⴓ	უნ
Epsilon ეფსილონ	ε	5	Ⴄ	ენ	Ny ნიუ	ν	50	Ⴌ	ნარ	Phi ფი	φ	500	Ⴔ	ფარ
Vav ვავ	ς	6	Ⴅ	ვინ	Xi ქსი	ξ	60	Ⴢ	იოტა	Chi ხი	χ	600	Ⴕ	ქი
Zeta ძეტა	ζ	7	Ⴆ	ზენ	Omikron ომიკრონ	ο	70	Ⴍ	ონი	Psi ფსი	ψ	700	Ⴖ	ღან
Heta ჰეტა	η	8	Ⴡ	ჰან	Pi პი	π	80	Ⴎ	ჰარ	Omega ომეგა	ω	800	Ⴗ	ყარ
Theta თეტა	θ	9	Ⴇ	თან	Qoppa ქოპა	q	90	Ⴏ	ჟან	Zade ცადე	ϡ	900	Ⴘ	შინ

ასოზე ზემოდან ხაზი საჭიროა რიცხვის და ტექსტისაგან გასარჩევად, მაგ. $\overline{\mu\varepsilon} = 45$; ათასების აღსანიშნავად პირველ 9 ასოს წინ ეწერება „მძიმე“, მაგ.: $\overline{,\gamma\tau\mu\gamma} = 4345$; რიცხვი 10000 აღი-

ნიშნება მთავრული ასოთი M — Μίριοι („**მირიადი**“ საინტერესოა, ქართულში ეს არის ჵ ანბანის ბოლო ასო და გამოითქმის, როგორც „**ბევრი**“); მაგალითად, რიცხვს 458545 ბერძნები წაიკითხავდნენ ასე — 45 მირიად რვა ათას ხუთას ორმოცდახუთი! მაგალითი: ევდოკიუს ასკალონელის თანახმად როგორ ხდებოდა შეკრება:

$$\begin{array}{rcr} \omega\mu\zeta.,\gamma\theta\upsilon\alpha & & 8473421 \\ \lambda.,\eta\upsilon & + & 308400 \\ \hline \omega o\eta.,\alpha\omega\kappa\alpha & & 8781821 \end{array}$$

დ'ალამბერის თანახმად, განყენებული რიცხვების შეკრებას ბერძნები აწარმოებდნენ ზუსტად ისევე, როგორც ჩვენ ვკრებთ (ათობით სისტემაში) „Sur l'Arithmetique des Grecs", 1807 წ.

რიცხვი	არსებითი სახელი			ზედსართავი სახელი		
	თარგმანი	ახსნა	ბერძნული	თარგმანი	ახსნა	ბერძნული
1	ერთეული	ეს რიცხვი არაა	ἡ μονάς	ერთიანი	ერთი რაიმე	τό ἕν
8	ოქტეტი	ერთად დაჯგუფებული რვა ერთეული	ἡ ὀκτάς	რვა	რვა რაიმე	τά ὀκτώ
10	დეკადა	ერთად დაჯგუფებული ათი ერთეული	ἡ δεκάς	ათი	ათი რაიმე	τά δέκα
100	ჰეკატონი	ერთად დაჯგუფებული ასი ერთეული	ἡ ἑκατοντάς	ასი	ასი რაიმე	τά ἑκατόν
1000	ჰილიადი	ერთად დაჯგუფებული ათასი ერთეული	ἡ χιλιάς	ათასი	ათასი რაიმე	τα χίλια
10000	მირიადი	ერთად დაჯგუფებული ათი ათასი ერთეული	ἡ μυριάς	ათი ათასი	ათი ათასი რაიმე	τά μύρια

2. არისტარქე თვლის, რომ დედამიწის ორბიტის რადიუსი გაცილებით მცირეა უძრავ ვარსკვლავთ ცის რადიუსზე. ჰელიოცენტრული სისტემით ის შესაძლოა ჩაითვალოს კოპერნიკის წინამორბედად. არისტარქეს აზრით, ადგილი აქვს პროპორციას:

$$\frac{\text{დედამიწის დიამეტრი}}{\text{სამყაროს დიამეტრი}} = \frac{\text{სამყაროს დიამეტრი}}{\text{უძრავი ვარსკვლავთ ცის დიამეტრი}}$$

3. ბერძნული სტადიუმი ტოლია 600 ბერძნული ტერფისა (ფუტი) და ყოველი ტერფი არის 16 დაქტილის ტოლი, შესაბამისად, სტადიუმში იყო 9 600 ბერძნული დაქტილი (ბერძნული დაქტილი — ცერა თითის სიგანე, დაახლოებით 19მმ = ¾ ინჩი).
4. 300 მირიადი სტადიუმი შეადგენს დაახლოებით 459916 კმ-ს, ხოლო, როგორც ცნობილია, დედამიწის რადიუსი არის 6400 კმ, შესაბამისად, გარშემოწერილობა მხოლოდ 40228 კმ-ია.
5. მზის დიამეტრი 109-ჯერ დიდია დედამიწისაზე, ხოლო ამ უკანასკნელის დიამეტრი 4-ჯერ დიდია მთვარისაზე, შესაბამისად, მზის დიამეტრი მთვარისაზე 436-ჯერ დიდია!
6. არის მოსაზრება, რომ ტექსტი „აკუპატრეს შვილი ფიდიუსი“ ანუ „Φειδίου δὲ τοῦ ἀμοῦ πατρὸς“ — ბერძნული ტექსტი შესაძლოა იკითხებოდეს შემდეგნაირად: „ფიდიუსი მამა ჩემი“ ანუ არქიმედეს მამა.
7. არისტარქემ აღმოაჩინა, რომ, როდესაც მთვარის ნახევარდისკო ჩანს, მაშინ კუთხე მზესა და მთვარეს შორის არის 87^0. მაგრამ, თუ მთვარის განათებული ნაწილი მიმართულია დედამიწისკენ, მაშინ მთვარის ცენტრის შემაერთებელი წრფეები მზისა და დედამიწის ცენტრებთან ურთიერთმართობულია. ამგვარად, სამკუთხედში, რომლის წვეროები განთავსებულია მზის, მთვარის და დედამიწის ცენტრებში, ყველა კუთხე ცნობილია; შესაბამისად, შესაძლებელია განისაზღვროს ჰიპოტენუზისა და კათეტის შეფარდება, ანუ მზის და მთვარის დედამიწასთან მანძილებს შორის ფარდობა.

8. ორბიტის 1/720 ნაწილი არის $\frac{1}{720}\cdot 360^0 = 30'$. სინამდვილეში კუთხური დიამეტრი ცვალება-დია: 19.12-1.01 პერიგეუმში 32′32", ხოლო 19.06-1.07 აპოგეაში 31′28".

9. რადგან $90^0 = 5400' = 324000''$, შესაბამისად:

$$\frac{1}{164}\cdot d = 32'55''\frac{25}{41}; \qquad \frac{1}{200}\cdot d = 27'.$$

10. როდესაც მზის ცენტრი ჰორიზონტზეა, მაშინ მონაკვეთი ΔK, როგორც მხები, მართობულია დედამიწის HΔ რადიუსის, ამიტომაც HK > ΔK. (სურ.3)

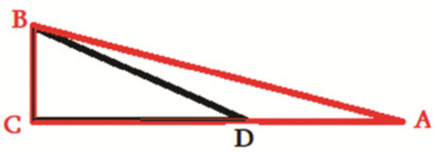
11. ΔNK და HΦK სამკუთხედებში კუთხეები $\measuredangle N$ და $\measuredangle\Phi$ მართია, ხოლო NK=ΦK, მაგრამ ΔK< HK, ამგვარად, კუთხე $\measuredangle N\Delta K$ მეტია $\measuredangle\Phi HK$ კუთხეზე, საიდანაც გამოდის, რომ კუთხე $\measuredangle\Lambda\Delta O$ მეტია $\measuredangle\Pi HP$ კუთხეზე.

12. თუ წრეწირის სიგრძე არის C, ხოლო მისი დიამეტრი არის D, მაშინ $\frac{C}{D} < \frac{22}{7}$, მაგრამ მასში ჩახაზული მრავალკუთხედის პერიმეტრი P ნაკლებია წრეწირის სიგრძეზე, ანუ P < C, შესაბამისად, $\frac{P}{D} < \frac{22}{7}$, ხოლო დამატებით D=2R, სადაც R- რადიუსია და ამიტომ $\frac{P}{R} < \frac{44}{7}$.

13. რადგან წრეში ჩახაზული 656-კუთხედის პერიმეტრის შეფარდება ამავე წრის რადიუსთან ნაკლებია 44/7, ამიტომ მისი გვერდის ფარდობა რადიუსთან $\frac{44}{656\cdot 7} = \frac{11}{1148}$. მაგრამ AB ქორ-და ნაკლებია მრავალკუთხედის გვერდზე, ფარდობა $\frac{AB}{HK} < \frac{11}{1148}$ და რადგან $\frac{11}{1148} < \frac{1}{100}$, ამი-ტომაც $\frac{AB}{HK} < \frac{1}{100}$ და, შესაბამისად, $AB < \frac{HK}{100}$ (სურ. 3).

14. ΣT წრის დიამეტრი ნაკლებია $\frac{HK}{100}$, ამიტომ HI+KΣ <$\frac{HK}{100}$, შესაბამისად, IΣ >$\frac{99}{100}HK$ და ამიტომ $\frac{HK}{\mathrm{I\Sigma}} < \frac{99}{100}$.

15. **თეორემა** (თანამედროვე ვარიანტი) . მოცემულია ორი მართკუთხა სამკუთხედი ΔABC და ΔDBC . რომელთაც ერთი BC კათეტი საერთო აქვთ. ხოლო $DB < AB$, ე.ი . $\measuredangle BAC < \measuredangle BDC$.



მაშინ სამართლიანია შემდეგი ორი უტოლობა

$$\frac{AC}{DC} < \frac{\measuredangle BDC}{\measuredangle BAC} < \frac{AB}{DB}$$

ლამაზი, მაგრამ საკმაოდ რთულად დასამტკიცებელი თეორემაა!

16. ანუ ნაკლებია $\frac{100}{20000} \div \frac{99}{20000}$?

17. რადგან $\frac{99}{20000} = \frac{1}{202+\frac{2}{99}} > \frac{1}{203}$?!

18. სიცხადისათვის არქიმედეს რიცხვთა წარმოდგენის სისტემა განვიხილოთ ათობითი სისტემის თვალსაზრისით

„პირველი“	რიცხვები	$1=10^0$	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	1-ლი ოქტადა
„მეორე“	…	$10^{1.8}$	10^9						10^{15}	მე-2 ოქტადა
„მესამე“	…	$10^{2.8}$							10^{23}	მე-3 ოქტადა
„მეოთხე“	…	$10^{3.8}$							10^{31}	მე-4 ოქტადა
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
		$10^{8\cdot 10^8}$	ოქტადური რიცხვების ოქტადა							

არქიმედეს თანახმად, რიცხვი - $10^7 = 10^3 \cdot 10^4 = 1000 \cdot 10000$ (ათასი მირიადი);

- რიცხვი - $10^{15} = 10^7 \cdot 10^8$ (ათასი მირიადი „მეორე“ რიცხვისა);
- რიცხვი - $10^{16} = 10^4 \cdot 10^4 \cdot 10^8 = 10000 \cdot 10000 \cdot 10^8$ (მირიადო მირიადი „მეორე“ რიცხვე-ბისა ანუ „მესამე“ რიცხვების ერთიანი);
- რიცხვი - $10^{23} = 10^7 \cdot 10^{16} = 10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{2\cdot 8} = 1000 \cdot 10000 \cdot 10^{2\cdot 8}$ (ათასი მირიადი „მესამე“ რიცხვებისა) და ა. შ.

პერიოდების სტრუქტურა: მეორე პერიოდის „პირველი“ რიცხვების ერთეული - $10^{8\cdot 10^8}$; შესაბამისად:

$10^{8\cdot 10^8}, 10^{8\cdot 10^8+1}, 10^{8\cdot 10^8+2}, \ldots, 10^{8\cdot 10^8+7}$, მეორე პერიოდის რიცხვების პირველი ოქტადა;

$10^{8\cdot 10^8+8}, 10^{8\cdot 10^8+9}, 10^{8\cdot 10^8+10}, \ldots, 10^{8\cdot 10^8+15}$, მეორე პერიოდის რიცხვების მეორე ოქტადა;

$10^{8\cdot 10^8+8}$ — მეორე პერიოდის რიცხვების „პირველი“ ოქტადის ეს რიცხვი არის მეორე პერი-ოდის რიცხვების მეორე ოქტადის ერთიანი;

- $10^{2\cdot 8\cdot 10^8}$ – მესამე პერიოდის რიცხვების ერთიანი;
- $10^{3\cdot 8\cdot 10^8}$ – მეოთხე პერიოდის რიცხვების ერთიანი;
- $10^{4\cdot 8\cdot 10^8}$ – მეხუთე პერიოდის რიცხვების ერთიანი;

  ....
- $10^{n\cdot 8\cdot 10^8}$ – (n+1)-ე პერიოდის რიცხვების ერთიანი;

  არქიმედე მიდის ოქტადური პერიოდის ოქტადური რიცხვის ოქტადამდე - $10^{10\cdot 8\cdot 10^8}$.

[19]. არქიმედე განიხილავს გეომეტრიულ პროგრესიას პირველი წევრით ერთიანი

$$\therefore\ 1, q^1, q^2, q^3, q^4, q^5, q^6, q^7, q^8, q^9, q^{10}, \ldots$$

$b_4 = q^3 \quad b_8 = q^7$

ცხადია, რომ $b_4 \cdot b_8 = q^{10} = b_{11} = b_{(8+3)}$ და $b_4 = b_{(3+1)}$ ანუ b_{11} დაშორებულია b_8-დან იმდენად, რამდენადაც b_4 დაშორებულია ერთიანიდან, თანაც $11 = (4+8) - 1$.

ზოგადად, $b_k = q^{k-1} = b_{(1+k-1)}$ და $b_m = q^{m-1}$ შესაბამისად:

$$b_k \cdot b_m = q^{k-1} \cdot q^{m-1} = q^{k+m-2} = b_{k+m-1} = b_{m+(k-1)}$$

წევრი b_k დაშორებულია ერთიანიდან $k-1$ წევრით, ხოლო b_{k+m-1} წევრი დაშორებულია ერ-თიანს $k+m-2$ წევრით; რადგან b_m წევრი დაშორებულია ერთიანს $m-1$ წევრით, მაშინ b_{k+m-1} დაშორებულია b_m წევრს $k+m-2-(m-1) = k-1$ წევრით.

მეორე თვისება ცხადი ხდება, თუ დახედავთ ინდექსს $k+m-1 = (k+m)-1$.

[20]. სიცხადისთვის გადმოვიყვანოთ არქიმედეს გამოთვლები ჩვენთვის ნაცნობ ფორმატში.

დიამეტრი	ბირთვი	მოცულობა	სილის მარცვლების რაოდენობა	
$\frac{1}{40}$ დაქტილი	1 ყაყაჩოს თესლის ხელა		$\leq 10^4$	მირიადი
1 დაქტილი	6 მირიად 4 ათასი ყაყაჩოს თესლი	$\leq 40^3$ $= 64000$	$\leq 10^4 \cdot 64 \cdot 10^4$ $\leq 10 \cdot 10^8$	„მეორე“ რიცხვების ათი ერთეული
100 დაქტილი	ასი ათასი ცალი 1 დაქტილის მქონე ბირთვი	100^3 $= 100$ $\cdot 10000$	$\leq 10^2 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 10^8$ $= 10^7 \cdot 10^8 = 10^{15}$	„მეორე“ რიცხვების ათასი მირიადი ერთეული
მირიადი დაქტილი სტადიუმი<9600 დაქტილი ანუ $\leq 10^4$	ასი მირიადი 100 დაქტილის მქონე ბირთვი	100^3 $= 100$ $\cdot 10000$	$\leq 10^2 \cdot 10^4 \cdot 10^{15}$ $= 10^{21}$ $= 10 \cdot 10^4 \cdot 10^{2\cdot 8}$	„მესამე“ რიცხვების ათი მირიადი ერთეული
100 სტადიუმი	ასი მირიადი 1 სტადიუმის მქონე ბირთვი		$\leq 10^2 \cdot 10^4 \cdot 10^{21}$ $= 10^{27} = 10^3 \cdot 10^{3\cdot 8}$	„მეოთხე“ რიცხვები ს ათასი ერთეული

მირიადი სტადიუმი 10^4	ასი მირიადი 100 სტადიუმის მქონე ბირთვი		$\leq 10^2 \cdot 10^4 \cdot 10^{27} = 10^{33} = 10 \cdot 10^{4 \cdot 8}$	„მეხუთე“ რიცხვები ს ათი ერთეული
ასი მირიადი სტადიუმი	ასი მირიადი მირიადი სტადიუმის მქონე ბირთვი		$\leq 10^2 \cdot 10^4 \cdot 10^{33} = 10^{39} = 10^7 \cdot 10^{4 \cdot 8}$	„მეხუთე“ რიცხვები ს ათასი მირიადი ერთეული
მირიადო მირიადი სტადიუმი	ასი მირიადი 100 მირიადი სტადიუმის მქონე ბირთვი		$\leq 10^2 \cdot 10^4 \cdot 10^{39} = 10^{45} = 10 \cdot 10^4 \cdot 10^{5 \cdot 8}$	„მეექვსე“ რიცხვები ს ათი მირიადი ერთეული
ასი მირიადო მირიადი სტადიუმი	ასი მირიადი მირიადო მირიადი სტადიუმის მქონე ბირთვი		$\leq 10^2 \cdot 10^4 \cdot 10^{45} = 10^{51} = 10^3 \cdot 10^{6 \cdot 8}$	„მეშვიდე“ რიცხვები ს ათასი ერთეული
სამყარო < ასი მირიადო მირიადი სტადიუმი			$\leq 10^{51}$	
უძრავი ვარსკვ-ლავთ ცა < მირიად სამყაროს ბირთვზე	უძრავი ვარსკვ-ლავთ ცის ბირთვი ნაკლებია $(10^4)^3 = 10^{12}$-ჯერ აღებულ სამყაროს ბირთვზე		$\leq 10^{12} \cdot 10^{51} = 10^{63} = 10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{7 \cdot 8}$	„მერვე“ რიცხვების ათასი მირიადი ერთეული

ჩვენამდე მოღწეული არქიმედეს წიგნების ჩამონათვალი:

I. “ε’ πιπέδών ισορροπικών, κέντρα βαρών” – “De aequiponderantibus” – „ბრტყელი ფიგურე-ბის წონასწორობისა და სიმძიმის ცენტრის შესახებ“ – 2 წიგნი;

II. “τετρναγώνίμος τάς όροογονίον τόμας” – “Quadratura parabolis” – „პარაბოლის კვადრა-ტურა“;

III. “περι σφαιρας και κνλινδρον, α, β” - “De Sphaera et Cilindro” – „ბირთვისა და ცილინდრის შესახებ“ – 2 წიგნი;

IV. “περι έλικών” - “De lineis spiralibus” – „სპირალების შესახებ“;

V. “περι κωνοειδέων και σχηματων σφαιρειδέων” - “De conoidibus et sphaeroibius” – „კონო-იდებისა და სფეროიდების შესახებ“;

VI. “κνκλον μέτρησις” - “Circuli dimensio” – „წრის გაზომვა“;

VII. ”ψαμμιτς” - “De arenae numero” – „სილის მარცვლების დათვლა“;

VIII. “περι όχουμένων” - “De insidentibus in fluido ” – „მცურავი სხეულების შესახებ“;

IX. “Περὶ μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος” – “მექანიკური თეორემების მეთოდი” ხან კი ცნობილია როგორც “έφοδικόν” - „მეთოდები“;

X. “στομαχος” - “ Ostomachion” – არქიმედეს ყუთი ან არქიმედეს კუბო.

XI. “λημμάτα” – “Lemmata” – „ლემები“ (15 ლემა წრის შესახებ) ავტორობას ადასტურებს აბუ-ჰასან საბიტ იბნ ქურა ალ- ჰარანი (836 -901) არაბი ასტრონომი, მატემატიკოსი და მექანიკოსი;

XII. არქიმედეს ამოცანა მსხვილფეხა რქოსანი პირუტყვის შესახებ აღმოჩენილია 1773 წელს, ამოხსნილია 1880 წელს.

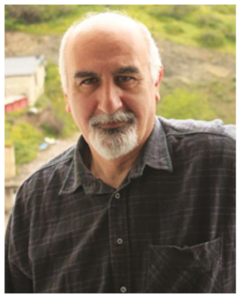
XIII. არქიმედეს პალიმფსესტი – აღმოჩენილია 1906 წელს.

ბოლოთქმა

არქიმედეს ნაშრომები მსოფლიო აზროვნების საგანძურია და ისინი არა მარტო საინტერესო, არამედ ძალზე ჭკუის სასწავლებელია. მიუხედავად იმისა, რომ თანამედროვე თვალსაზრისით რამდენიმე შედეგი მოძველებული და არაზუსტია, მკითხველისათვის ეს ოცდაორი საუკუნის წინ დაწერილი ნაშრომი ნათლად აჩვენებს, რომ მკაცრ და თანმიმდევრულ მსჯელობას დრო ვერაფერს დააკლებს. ნაშრომში მათემატიკური მსჯელობის ასეთი მარგალიტებია: ნატურალური რიცხვების დასახელებისა და ჩაწერის არქიმედეს ალგორითმი,[18] გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა თვისებები,[19] ბირთვის მოცულობისა (წრის ფართობის) და არქიმედეს ფორმულები, π-რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა და მისი შეფასებები (რომელიც დღემდე გამოიყენება), ფაქიზი გეომეტრიული ფაქტები და შეფასებები; მაგალითად თეორემა.[15]

ნაშრომი გვიჩვენებს, რომ იცვლება და ზუსტდება მხოლოდ საწყისები და ექსპერიმენტული მასალა. ამაში თქვენ თვითონ დარწმუნდებით ნაშრომის ყურადღებით წაკითხვისას: დედამიწის გარშემოწერილობა,[4] უძრავი ვარსკვლავთ ცა, სამყარო (დედამიწის ორბიტა მზის გარშემო ან პირიქით?)[5] და მისი სიდიდე, საოცარი პროპორცია;[2] მზის დამზერის კუთხე და ცდების სერიები და მოწყობილობები ამ კუთხის გასაზომად და იმ დროისათვის გასაოცარი სიზუსტე, სილის მარცვლის და ყაყაჩოს თესლის სიდიდის დადგენა — ეს ყველაფერი საუკუნეების განმავლობაში ზუსტდებოდა და კვლავაც ზუსტდება!

ტექსტი ინგლისური და რუსული ენებიდან თარგმნა
ილია თავხელიძემ



ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
ასოცირებული პროფესორი
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა
ფაკულტეტი, აკადემიკოს ილია ვეკუას პრემიის ლაურეატი;
1984 წ. დაჯილდოებულია უკრაინის მათემატიკოსთა 2009 წლის
ყრილობის, აკადემიკოს ნიკოლოზ ბოგოლიუბოვის
მემორიალური ოქროს მედლით.

AMS 2010 Mathematics Subject Classifications: 00B60; 01A75.
Keywords and phrases: Translation of Archimedes work,

მარტივ რიცხვთა შესახებ ევკლიდეს თეორემის სხვადასხვა დამტკიცება

თეიმურაზ ვეფხვაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი; ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი; მათემატიკურ განათლებაში სამეცნიერო-კვლევითი ინსტიტუტის დირექტორი

მათემატიკის განვითარების ისტორიას, ძირითადად, ოთხ პერიოდად ყოფენ: მათემატიკის ჩასახვის პერიოდი, რომელიც იწყება უძველესი დროიდან და გრძელდება ძველი წელთაღრიცხვის VII საუკუნემდე; ელემენტარული მათემატიკის პერიოდი, რომელიც იწყება ძველი წელთაღრიცხვის VII საუკუნიდან და XVII საუკუნემდე გრძელდება; XVII საუკუნიდან იწყება III პერიოდი — ცვლად სიდიდეთა მათემატიკის პერიოდი, რომელიც დაკავშირებულია დეკარტეს, ნიუტონისა და ლაიბნიცის შრომებთან — დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის შემოღებასთან; პასკალის, ფერმას აღმოჩენასთან — რიცხვთა თეორიის, ალბათობის თეორიის შექმნასთან. არაევკლიდური გეომეტრიის აღმოჩენიდან იწყება მათემატიკის განვითარების ე.წ. თანამედროვე პერიოდი.

მათემატიკის მეცნიერებად ჩამოყალიბების პროცესი მათემატიკის განვითარების II პერიოდიდან იწყება; მათემატიკური ცოდნის ძირითადი მიღწევა დამტკიცების შესახებ ცოდნის წარმოშობა და განვითარება იყო. მათემატიკის მეცნიერებად ჩამოყალიბების საქმეში დიდი როლი ითამაშა ბერძენმა მათემატიკოსმა ევკლიდემ. ძველი წელთაღრიცხვის VII საუკუნისთვის ბერძნებს გეომეტრიული ფაქტების დიდი მასალა დაუგროვდათ. ამასთანავე, იყენებდნენ დამტკიცებათა მრავალფეროვან მეთოდებსაც. საჭირო გახდა მთელი ამ დაგროვილი მასალის ლოგიკური დალაგება, რაც ბევრმა ბერძენმა მეცნიერმა სცადა. მათგან ჩვენამდე მოაღწია ევკლიდეს თხზულებამ, რომელიც 13 წიგნისგან შედგებოდა და „საწყისების" სახელწოდებითაა ცნობილი. ევკლიდე ძველი წელთაღრიცხვის 330-275 წლებში ცხოვრობდა. მნიშვნელოვანია აღნიშნული თხზულების ის ნაწილი, რომელიც გეომეტრიას ეხებოდა. აქ მათემატიკის აღნიშნული ნაწილი დაუმტკიცებლად ჩამოყალიბებული მათემატიკური დებულებებისა (აქსიომების) და მათზე დაყრდნობით დამტკიცებული თეორემების სახითაა ჩამოყალიბებული. ევკლიდეს აქსიომატიკის სრული გამოკვლევა და ხარვეზების გასწორება დაასრულა დავით ჰილბერტმა (1899 წ.).

„საწყისების" VII, VIII და IX წიგნები მთლიანად რიცხვთა თეორიას ეხებოდა. რიცხვების სახით მხოლოდ ნატურალური რიცხვებია წარმოდგენილი. განხილულია პროპორციულობისა და გაყოფადობის თეორიები, აგებულია ლუწი სრულყოფილი რიცხვები, დამტკიცებულია პროგრესიების ზოგიერთი ფორმულა; წარმოდგენილია ორი ნატურა-

ლური რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფის პოვნის ალგორითმი; დამტკიცებულია თეორემა მარტივ რიცხვთა სიმრავლის უსასრულობის შესახებ. დამტკიცების დროს გამოყენებულია არაპირდაპირი ხერხი — საწინააღმდეგოს დაშვებით დამტკიცების ხერხი. მარტივ რიცხვთა სიმრავლის უსასრულობის შესახებ თეორემის დამტკიცების აღნიშნული ხერხი დღემდე ითვლება ყველაზე ბუნებრივ და საინტერესო ხერხად. თუმცა არსებობს სხვა საინტერესო დამტკიცებები, რომლებიც მათემატიკის სხვადასხვა მიმართულების გამოყენების მნიშვნელობაზე მიგვითითებს.

ევკლიდეს დამტკიცება

ვამტკიცებთ, რომ მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულო სიმრავლეა. დავუშვათ საწინააღმდეგო — აღნიშნული წინადადება მცდარია. ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს მარტივ რიცხვთა მხოლოდ სასრული რაოდენობა. მაშასადამე, შესაძლებელია ყველა მარტივი რიცხვის მითითება; ვთქვათ, მარტივი რიცხვებია $p_1, p_2, \ldots, p_n$. მათგან განსხვავებული ყველა სხვა რიცხვი, რომელიც 1-ზე მეტია, შედგენილი რიცხვი იქნება. ყოველი მათგანი უნდა გაიყოს $p_1, p_2, \ldots, p_n$ რიცხვებიდან ერთ-ერთზე მაინც. ახლა ავაგებთ ისეთ A რიცხვს, რომელიც მეტი იქნება $p_1, p_2, \ldots, p_n$ რიცხვებიდან თითოეულზე, მაგრამ, მიუხედავად ამისა, არცერთ მათგანზე არ გაიყოფა. ეს რიცხვია:

$$A = p_1, p_2, \ldots, p_n + 1$$

A რიცხვი მეტია $p_1, p_2, \ldots, p_n$ რიცხვებიდან თითოეულზე, ამიტომ შედგენილი რიცხვია, მაგრამ არ იყოფა არცერთ მარტივ რიცხვზე — თითოეულზე გაყოფისას ნაშთში მიიღება 1. ამრიგად, დაშვებამ, რომ მარტივი რიცხვების სასრული რაოდენობა არსებობს, წინააღმდეგობამდე მიგვიყვანა. ამიტომ ვასკვნით, რომ ეს დაშვება მცდარია. თეორემა დამტკიცებულია.

რიხარდ კურანტისა და ჰერბერტ რობინსის ცნობილ სახელმძღვანელოში (იხ. [1]) მითითებულია, რომ ეს „არაპირდაპირი დამტკიცება" შეიძლება ისე შეიცვალოს, რომ მარტივ რიცხვთა უსასრულო მიმდევრობის აგების მეთოდამდე მივიდეთ; დავუშვათ, რომ რომელიმე, მაგალითად, $P_1 = 2$ მარტივი რიცხვიდან გამომდინარე, ვიპოვეთ n მარტივი რიცხვი: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. მაშინ $p_1, p_2, \ldots, p_n + 1$ რიცხვი ან მარტივია, ან გამყოფად შეიცავს მარტივ რიცხვს, რომელიც განსხვავებულია უკვე ნაპოვნი მარტივი რიცხვებისგან. ასეთი გამყოფი ყოველთვის მოიძებნება, ამიტომ ორივე დასახელებულ შემთხვევაში ვღებულობთ ახალ მარტივ რიცხვს. ეს პროცესი კი შეიძლება გავაგრძელოთ და, მაშასადამე, მივიღებთ მარტივ რიცხვთა მიმდევრობას, რომელიც ბოლო არ ექნება.

ევკლიდეს თეორემის დამტკიცების ანალოგიურად შეიძლება დავასაბუთოთ დებულებები, რომლებიდანაც მარტივ რიცხვთა სიმრავლის უსასრულობა მიიღება.

დებულება 1. არ არსებობს $3n+2$ $(n=1,2,\ldots)$ სახის უდიდესი მარტივი რიცხვი.

დამტკიცება. განვიხილოთ რიცხვი:

$$A = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots p + 2,$$

სადაც p არის $3n+2$ სახის მარტივი რიცხვი. ცხადია, A რიცხვიც არის $3n+2$ სახის. ის იყოფა მარტივ რიცხვზე, რომელიც p რიცხვზე მეტია და არის $3n+2$ სახის. არ შეიძლება A რიცხვის მარტივ გამყოფებს შორის მხოლოდ $3n+1$ სახის მარტივი რიცხვები იყოს. მაშასადამე, ნებისმიერი $3n+2$ სახის მარტივი p რიცხვისთვის არსებობს იმავე სახის p-ზე მეტი მარტივი რიცხვი.

დებულება 2. არსებობს უსასრულო სიმრავლე მარტივი რიცხვებისა, რომლებიც ჩაიწერება $4k+3$ სახით; ანალოგიურად, არსებობს უსასრულო სიმრავლე მარტივი რიცხვებისა, რომლებიც ჩაიწერება $6k+5$ სახით $(k=1,2\ldots)$.

დამტკიცება. პირველ შემთხვევაში განვიხილავთ რიცხვს:

$A = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots p + 3$, სადაც P – $4n+3$ სახის მარტივი რიცხვია. A რიცხვი p-ზე მეტი მარტივი რიცხვია ($4k+3$ სახის) ან შედგენილი რიცხვია, რომელიც აუცილებლად იყოფა p-ზე მეტ მარტივ რიცხვზე, რომელიც არის $4k+3$ სახის.

მეორე შემთხვევაში ვიხილავთ რიცხვს: $B = 6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots p + 5$. p არის $6k+5$ სახის მარტივი რიცხვი. B რიცხვი არის $6k+5$ სახის, ის მარტივი რიცხვია, რომელიც მეტია p-ზე, ან იყოფა $(6k+5)$ სახის მარტივ რიცხვზე, რომელიც მეტია p-ზე.

აღნიშნული დებულებები დირიხლეს ცნობილი თეორიების კერძო შემთხვევებია — არითმეტიკული პროგრესია, რომლის წევრები ნატურალური რიცხვებია, პირველი წევრი თანამარტივია სხვაობასთან, შეიცავს მარტივ რიცხვთა უსასრულო რაოდენობას.

შემდეგი დებულებაც მარტივ რიცხვთა სიმრავლის უსასრულობას ამტკიცებს.

დებულება 3. თუ n ნატურალური რიცხვი 2-ზე მეტია, მაშინ n-სა და $n!$-ს შორის ერთი მაინც მარტივი რიცხვია.

დამტკიცება. ვთქვათ, p მარტივი რიცხვი არის $n!-1$ რიცხვის გამყოფი. რადგან $p \leq n!-1$, ამიტომ $p<n!$ ცხადია, $n!$ არ იყოფა p რიცხვზე, ამიტომ $p>n$. მაშასადამე, $n<p<n!$ ყოველი n ნატურალური რიცხვისთვის დავასახელეთ მასზე მეტი მარტივი რიცხვი.

ეილერის ფუნქცია. ეილერისა და ფერმას თეორემები

ნატურალური რიცხვების რაოდენობას, რომელიც არ აღემატება n-ს და თანამარტივია n-თან, აღვნიშნავთ $\varphi(n)$-ით. φ რიცხვითი ფუნქციაა, განსაზღვრულია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე, მას **ეილერის ფუნქცია** ეწოდება.

მაგალითები: $\varphi(1)=1$, $\varphi(2)=1$, $\varphi(6)=2$, $\varphi(5)=4$, $\varphi(12)=4$.

ნებისმიერ რიცხვით f ფუნქციას ეწოდება მულტიპლიკაციური ფუნქცია, თუ ნებისმიერი ნატურალური ურთიერთმარტივი a და b რიცხვებისთვის ჭეშმარიტია ტოლობა: $f(ab)=f(a)f(b)$. ეილერის φ ფუნქცია მულტიპლიკაციური ფუნქციის ერთ-ერთი მაგალითია; თუ a და b ურთიერთმარტივი რიცხვებია, მაშინ $\varphi(ab)=\varphi(a)\,\varphi(b)$.

ეილერის φ ფუნქციის აღნიშნული თვისების გამოყენებით მიიღება ამ ფუნქციის გამოსათვლელი ფორმულა. თუ $n=\prod_{p|n} p^{\alpha}$ არის n ნატურალური რიცხვის კანონიკური დაშლა მარტივი რიცხვების ნამრავლის სახით, მაშინ:

$$\varphi(n)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

მაგალითი:

$$\varphi(30)=30\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=$$

$$=30\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=8.$$

რიცხვთა თეორიის მნიშვნელოვანი თეორემებია ეილერისა და ფერმას თეორემები.

ეილერის თეორემა. თუ მთელი რიცხვი a თანამარტივია m ნატურალურ რიცხვთან, მაშინ გვაქვს:

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1(\mathrm{mod}\, m).$$

თუ m მარტივი რიცხვია, $m=p$, მაშინ $\varphi(p)=p-1$ და ეილერის თეორემიდან მიიღება ფერმას თეორემა:

თუ m ნატურალური რიცხვი არ იყოფა p მარტივ რიცხვზე, მაშინ გვაქვს:

$$a^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p).$$

ფერმას თეორემა შეიძლება ასეც ჩამოვაყალიბოთ:

თუ p მარტივი რიცხვია, a — ნებისმიერი მთელი რიცხვი, მაშინ

$$a^{p} \equiv a(\mathrm{mod}\, p)$$

ეილერის ფუნქციისა და ფერმას თეორემის გამოყენებით შეიძლება დავამტკიცოთ თეორემა მარტივ რიცხვთა უსასრულობის შესახებ.

დებულება 4. მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულო სიმრავლეა (ეილერის ფუნქციის გამოყენება).

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, მარტივ რიცხვთა სიმრავლე სასრული სიმრავლეა და $p_i\,(i=1,2\ldots,k)$ — ყველა მარტივი რიცხვია. განვიხილოთ რიცხვი $a=\prod_{i=1}^{k} p_i$. გამოვიყენოთ ეილერის ფუნქციის თვისებები: $\varphi(1)=p-1$, $\varphi(a)=\prod_{i=1}^{k}\varphi(p_i)$; მაშასადამე, $\varphi(a)=\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)$.

ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი, რომელიც მეტია 1-ზე და ნაკლებია a-ზე, იყოფა ერთ-ერთ მარტივ რიცხვზე. მარტივი რიცხვები კი მხოლოდ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ რიცხვებია; მაშასადამე, $\varphi(a)=1$, ამრიგად, $\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)=1$, მივიღეთ წინააღმდეგობა. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს ევკლიდეს თეორემას.

დებულება 5 (დირიხლეს თეორემის კერძო შემთხვევა, ფერმას თეორემის გამოყენება). არითმეტიკული მიმდევრობა:

$$4n+1 \;\; (n=0,1,2,\ldots)$$

შეიცავს მარტივ რიცხვთა უსასრულო რაოდენობას.

დამტკიცება. ვთქვათ, n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, $n>1$. მაშინ, ცხადია, $(n!)^2+1$ კენტი რიცხვია და, მაშასადამე, იყოფა ერთ-ერთ მარტივ p რიცხვზე. ეს რიცხვი შეიძლება იყოს $4k+1$ ან $4k+3$ სახის. ვთქვათ, $p=4k+3$. ნებისმიერი ნატურალური a რიცხვისა და კენტი m რიცხვისთვის გვაქვს:

$(a+1)\,|\,(a^m+1)$, ანუ a^m+1 იყოფა $(a+1)$-ზე.

მაშასადამე:

$$\big((\mathrm{n}!)^2+1\big|(\mathrm{n}!)^{2(2k+1)}+1\big).$$

ცხადია:

$$2(2k+1)=4k+2=p-1.$$

პირობის თანახმად:

$$p\,|\,(n!)^2+1,$$

მაშასადამე:

$$p\,|\,(n!)^{p-1}+1.$$

ამრიგად:

$$p\,|\,(n!)^p+n! \qquad (1)$$

ფერმას თეორემის თანახმად:

$$p\,|\,(n!)^p-n! \qquad (2)$$

(1) და (2) პირობებიდან მიიღება:

$$p\,|\,2(n!),$$

რაც შეუძლებელია, რადგან p კენტი მარტივი რიცხვია და მეტია n-ზე. მაშასადამე, p აუცილებლად არის $4k+1$ სახის მარტივი რიცხვი. ამრიგად, დავამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისთვის არსებობს მარტივი რიცხვი, რომელიც მეტია n-ზე და არის $4k+1$ სახის.

ფერმას რიცხვები: პიერ ფერმას (1607-1665) სახელით არის ცნობილი რიცხვები

$$2+1,\ 2^2+1,\ 2^4+1,\ 2^8+1,\ 2^{16}+1,\ 2^{32}+1,\ \ldots$$

(ხარისხის მაჩვენებელი 2-ის ხარისხებია). ფერმამ გამოთქვა ვარაუდი, რომ ეს რიცხვები მარტივი რიცხვებია. პირველი ხუთი რიცხვი, მართლაც, მარტივი რიცხვია. თუმცა ლეონარდ ეილერმა (1707-1783) დაამტკიცა, რომ მეექვსე რიცხვი შედგენილი რიცხვია; $2^{32}+1$ იყოფა 641-ზე. ფერმას რიცხვებს შორის კიდევ ბევრი შედგენილი რიცხვია, თუმცა ახალი მარტივი რიცხვი მათ შორის ჯერჯერობით ნაპოვნი არ არის. ცნობილმა მათემატიკოსმა გოლდბახმა (1690-1764) შენიშნა, რომ ფერმას რიცხვების გამოყენებით შეიძლება ევკლიდეს თეორემის დამტკიცება.

დებულება 6. ფერმას ორი ნებისმიერი რიცხვი ურთიერთმარტივია.

დამტკიცება. თუ ფერმას რიცხვებში მეორე შესაკრებად (+1)-ის ნაცვლად ავიღებთ (—1)-ს, მაშინ მიღებული რიცხვები დაიშლება მამრავლებად. მაგალითად:

$$2^8-1=(2^4+1)\,(2^4-1).$$

შეიძლება გავაგრძელოთ დაშლა, მივიღებთ:

$$2^8-1=(2^4+1)\,(2^2+1)\,(2+1)\,(2-1).$$

ანალოგიურად,

$$2^{16}-1=(2^8+1)\,(2^4+1)\,(2^2+1)\,(2+1)\,(2-1).$$

საზოგადოდ, ფერმას პირველი k რიცხვის ნამრავლი 2-ით ნაკლებია ფერმას შემდეგ რიცხვზე:

$$\left(2^{2^{k+1}}+1\right)-2=2^{2^{k+1}}-1=$$
$$=(1+2)(1+2^2)(1+2^4)\ldots(1+2^{2^k}).$$

აქედან ჩანს, რომ ნებისმიერი ფერმას ორი რიცხვი ურთიერთმარტივია. მართლაც, ვთქვათ, d არის ფერმას რომელიმე რიცხვის გამყოფი. მაშინ d იქნება ფერმას ნებისმიერი შემდეგი რიცხვისა და 2-ის სხვაობის გამყოფი. რადგან $\mathrm{d}\neq 2$, ამიტომ d არ იქნება ფერმას ამ რიცხვის გამყოფი.

ამრიგად, ფერმას ნებისმიერი ორი რიცხვი ურთიერთმარტივია, მაშასადამე, მათ მარტივ მამრავლებად დაშლაში სხვადასხვა მარტივი რიცხვები მონაწილეობს — ესე იგი, მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულო სიმრავლეა.

ჰარმონიული მწკრივი (ეილერის დამტკიცება). ჰარმონიული მწკრივი ეწოდება მწკრივს:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

ამ მწკრივის ზოგადი წევრი არის $1/n$, ცხადია, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, თუმცა მოცემული მწკრივი განშლადია.

გამოვიყენოთ ეს ფაქტი და დავამტკიცოთ, რომ მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულო სიმრავლეა. დავუშვათ საწინააღმდეგო — მარტივ რიცხვთა სიმრავლე სასრული სიმრავლეა და $p_1, p_2, \ldots, p_k$ სასრული მიმდევრობით ყველა მარტივი რიცხვი მოიცემა. ნებისმიერი p_i მარტივი რიცხვისთვის $(i = 1,2\ldots k)$ განვიხილოთ მწკრივი:

$$1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \frac{1}{p_i^3} + \cdots \quad (\mathrm{i} = 1,2 \ldots \mathrm{k}). \qquad (1)$$

თითოეული ეს მწკრივი კრებადია, რადგან წარმოადგენს უსასრულოდ კლებად გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის მნიშვნელი ნაკლებია 1-ზე $\left(\frac{1}{p_i} < 1\right)$.

თუ (1) ფორმულით წარმოდგენილ კრებად მწკრივებს გავამრავლებთ, მივიღებთ კვლავ კრებად მწკრივს, მაგრამ, ცხადია, მიღებული მწკრივის ზოგადი წევრი იქნება შემდეგი სახის:

$$\frac{1}{p_1^{s_1}\, p_2^{s_2} \ldots p_k^{s_k}}.$$

არითმეტიკის ძირითადი თეორემის თანახმად, მივიღებთ, რომ მიღებული მწკრივი $1/n$ სახის რიცხვებისგან შედგება — მაშასადამე, ჰარმონიული მწკრივია. მაგრამ ჰარმონიული მწკრივი განშლადი მწკრივია. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

ეილერის მიერ არის დამტკიცებული თეორემა — არა მხოლოდ ჰარმონიული მწკრივი, არამედ მწკრივი:

$$\sum_p \frac{1}{p},$$

სადაც შეჯამება გავრცელებულია მარტივ რიცხვებზე, განშლადია (იხ., მაგ., [2]).

ცნობილია ევკლიდეს თეორემის სხვა დამტკიცებებიც (იხ. მაგ., [3]). ბევრი ცნობილი მათემატიკოსი ცდილობდა წარმოედგინა დამტკიცების ახალი გზა. მათგან საინტერესოა „ტოპოლოგიური დამტკიცება“. ეს დამტკიცება ეკუთვნის ცნობილ ამერიკელ მათემატიკოსს, ისრაელისა და ამერიკის შეერთებული შტატების აკადემიების წევრ ჰაილერ ფიურსტენბერგს. აღნიშნულ დამტკიცებას მან ნიუ იორკს უნივერსიტეტში სტუდენტობის დროს მიაგნო.

ტოპოლოგიური დამტკიცება

მთელ რიცხვთა Z სიმრავლეზე შემოვიღოთ ტოპოლოგია — ღია სიმრავლე ვუწოდოთ სიმრავლეს, რომელიც უსასრულო არითმეტიკული პროგრესიების გაერთიანებაა. ტოპოლოგიური სივრცის აქსიომების შემოწმება ადვილად ხერხდება.

განვიხილოთ სიმრავლე:

$$A_p = \{\mathrm{tp} \mid \mathrm{t} \in \mathrm{Z}\}.$$

ცხადია, ეს სიმრავლე ღია სიმრავლეა, როგორც არითმეტიკული პროგრესია, რომლის სხვაობა არის p: ამასთანავე, A_p ჩაკეტილი სიმრავლეც არის, რადგან მისი დამატებითი სიმრავლე ღია სიმრავლეების გაერთიანებაა. ეს ღია სიმრავლეებია:

$$A_{p,t} = \{\mathrm{tp} + \mathrm{i} \mid \mathrm{t} \in \mathrm{Z}\}, \quad i = 1,2,\ldots p-1.$$

თუ დავუშვებთ, რომ მარტივ რიცხვთა სიმრავლე სასრულია, მაშინ სასრული რაოდენობის ჩაკეტილ სიმრავლეთა გაერთიანება ჩაკეტილი სიმრავლეა.

$$\mathrm{B} = \bigcup_p \mathrm{A}_p$$

ჩაკეტილი სიმრავლეა.

ნებისმიერი რიცხვი, რომელიც განსხვავებულია 1-ისა და (-1)-ისგან რომელიღაც მარტივი რიცხვის ჯერადია და, მაშასადამე, ეკუთვნის B სიმრავლეს. ამრიგად:

$$\mathrm{B} = \mathrm{Z} \backslash \{-1; 1\}.$$

მაშასადამე, $\{-1;1\}$ ღია სიმრავლეა (ჩაკეტილი სიმრავლის დამატებითი სიმრავლე).

ეს ფაქტი ეწინააღმდეგება ღია სიმრავლის განმარტებას. მივიღეთ წინააღმდეგობა — მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულო სიმრავლეა.

ლიტერატურა

1. რ. კურანტი, ჰ. რობინსი. რა არის მათემატიკა, გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი, 1965.
2. ა. ვალფიში. რიცხვთა თეორია, თბილისი, 1947.
3. А. Эвнин. Девятнадцать доказательств теоремы Евклида, Квант, 2001, №1.

ფუნქციათა კომპოზიცია

რუსუდან მესხია

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასისტენტ-პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

განხილულია ფუნქციათა კომპოზიციის სწავლებასთან დაკავშირებული საკითხები. ყურადღება გამახვილებულია ფუნქციათა კომპოზიციის თვისებებზე, განსაზღვრის არისა და მნიშვნელობათა სიმრავლის დადგენაზე, ფუნქციათა კომპოზიციის შექცეული ფუნქციის პოვნაზე, ფუნქციის იტერაციასთან დაკავშირებულ საკითხებზე. მოყვანილია, ჩვენი აზრით, საინტერესო მაგალითები, რომლებიც ამ თემის შესწავლისათვის მნიშვნელოვანია და მათი ამოხსნა წარმოაჩენს ფუნქციათა კომპოზიციის ბევრ ყურადსაღებ თვისებას.

ფუნქციათა კომპოზიციის განსაზღვრებამდე განვიხილოთ ასახვათა კომპოზიციის ცნება.

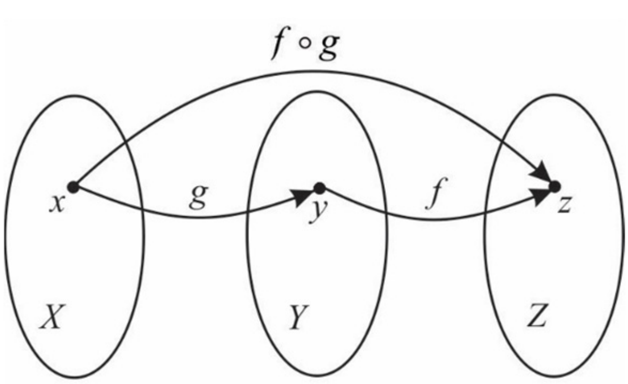
ვთქვათ, g ასახვა X სიმრავლის ყოველ x ელემენტს შეუსაბამებს ერთადერთ $y=g(x)$ ელემენტს Y სიმრავლიდან, ანუ $g:X\to Y$, ხოლო f ასახვა Y სიმრავლეს Z სიმრავლეში ასახავს: $f:Y\to Z$ ისე, რომ ნებისმიერ $y\in Y$ ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი $z=f(y)$ ელემენტი Z სიმრავლიდან. მაშინ შეგვიძლია განვიხილოთ f და g ასახვათა კომპოზიცია, რომელიც აღინიშნება $f\circ g$ სიმბოლოთი და არის ასახვა შემდეგი სახის

$$f\circ g:X\to Z$$

და

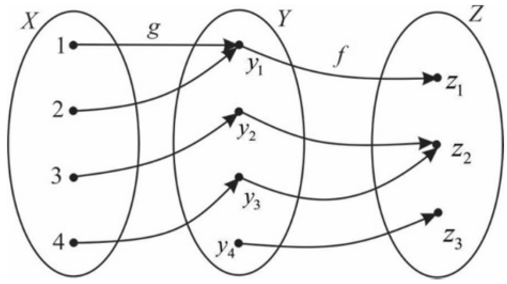
$$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=f(y)=z$$

(იხ. ნახ. 1).



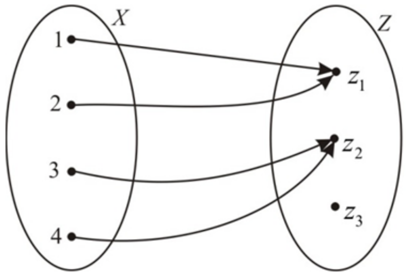
ნახ. 1

მაგალითი 1. ვთქვათ, g და f ასახვები მოცემულია შემდეგი სახით:



ნახ. 2

შევადგინოთ $f \circ g$ ასახვა, $f \circ g : X \to Z$ (ნახ. 3).



ნახ. 3

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(y_1) = z_1,$$
$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(y_1) = z_1,$$
$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(y_2) = z_2,$$
$$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(y_3) = z_2,$$
$$(f \circ g)(X) = \{z_1; z_2\} \subset Z, \quad (f)(Y) = \{z_1; z_2; z_3\} = Z.$$

მაშასადამე :

$$(f \circ g)(X) \neq f(Y).$$

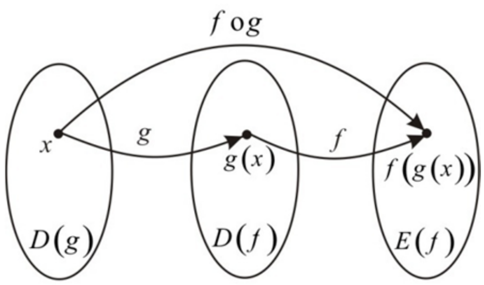
განვიხილოთ ფუნქციათა კომპოზიციის ცნება XII კლასის სასკოლო სახელმძღვანელოს მიხედვით (იხ. [1, გვ. 196]).

ვთქვათ, მოცემულია f და g ფუნქციები. f ფუნქციის განსაზღვრის არეს აღვნიშნავთ $D(f)$-ით, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლეს $E(f)$-ით. ვიგულისხმოთ, რომ:

$$E(g) \subset D(f).$$

f და g ფუნქციების კომპოზიცია $f \circ g$ არის ფუნქცია, რომელიც მოიცემა ფორმულით:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad x \in D(g).$$



ვთქვათ, $E(f)\subset D(g)$, მაშინ შეგვიძლია განვიხილოთ g და f ფუნქციების კომპოზიცია $g\circ f$ - შემდეგი სახით:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)),\quad x\in D(f).$$

მოვიყვანოთ ფუნქციათა კომპოზიციის რამდენიმე თვისება.

ვთქვათ, მოცემულია f, g და h ფუნქციები, ვიგულისხმოთ, რომ $E(h)\subset D(g)$, $E(g)\subset D(f)$, მაშინ სამართლიანია ტოლობები:

1. $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$;

მართლაც, $((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))=f(g(h(x)))$, $x\in D(h)$,

ხოლო :

$$(f\circ(g\circ h))(x)=f((g\circ h)(x))=f(g(h(x))),\ x\in D(h).$$

ამრიგად, ფუნქციათა კომპოზიციას აქვს ასოციაციურობის თვისება.

2. $(g+h)\circ f=g\circ f+h\circ f$, $E(f)\subset D(g)\cap D(h)$;

$((g+h)\circ f)(x)=(g+h)(f(x))=g(f(x))+h(f(x))=(g\circ f)(x)+(h\circ f)(x)$;

მაშასადამე,

$$(g+h)\circ f=g\circ f+h\circ f.$$

შევნიშნოთ, რომ, საზოგადოდ :

$$f\circ(g+h)\neq f\circ g+h\circ f.$$

მართლაც :

$$(f\circ(g+h))(x)=f((g+h)(x))=f(g(x)+h(x)).$$

ნებისმიერი f ფუნქციისთვის :

$$f(g(x)+h(x))\neq f(g(x))+f(h(x)).$$

ამრიგად :

$$f\circ(g+h)\neq f\circ g+f\circ h.$$

3. ვთქვათ, I არის იგივური ფუნქცია, ანუ $I(x)=x$, მაშინ

$$I\circ f=f\circ I=f;$$
$$(I\circ f)(x)=I(f(x))=f(x),\ x\in D(f);$$
$$(f\circ I)(x)=f(I(x))=f(x),\ x\in D(f).$$

4. ვთქვათ, f ფუნქციას გააჩნია შექცეული ფუნქცია f^{-1}, მაშინ :

$$f^{-1}\circ f=I \text{ და } f\circ f^{-1}=I;$$
$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=x,\ x\in D(f);$$
$$(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=x,\ x\in E(f).$$

უნდა აღვნიშნოთ, რომ, საზოგადოდ, $f\circ g\neq g\circ f$.

5. თუ f და g ფუნქციებს გააჩნია შექცეული ფუნქციები, მაშინ :

$$\left(f\circ g\right)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}\ .$$

(იხ. [2, გვ. 74]).

f ფუნქციის კომპოზიციას ამავე f ფუნქციასთან ეწოდება f ფუნქციის იტერაცია. ამრიგად, $f\circ f$ ფუნქცია არის f -ის იტერაცია [1, გვ. 197].

მაგალითი 2. მოცემულია $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-5x+6}$ და $g\left(x\right)=\left|x-2\right|$ ფუნქციები. შევადგინოთ ფუნქციათა კომპოზიცია $f\circ g$ და $g\circ f$. ვიპოვოთ მათი განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე და ავაგოთ გრაფიკები.

ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ

$$D\left(f\right)=\left\{x\in R\middle|\ x^2-5x+6\ge 0\right\}=\left(-\infty;2\right]\cup\left[3;+\infty\right),$$
$$E\left(f\right)=\left[0;+\infty\right),\quad D\left(g\right)=R,\quad E\left(g\right)=\left[0;+\infty\right).$$

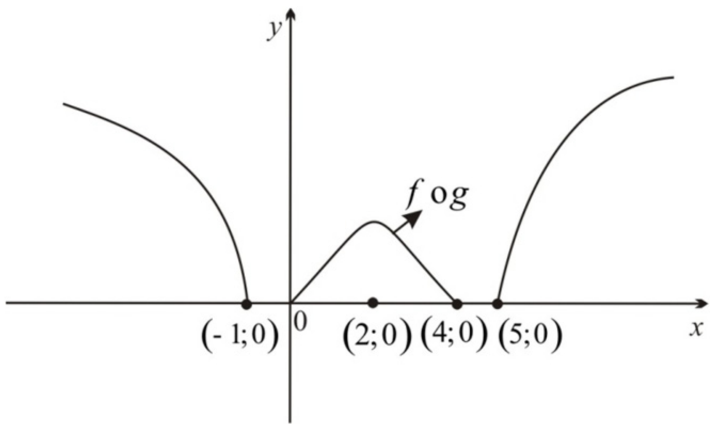
შევადგინოთ $f\circ g$ კომპოზიცია:

$$\left(f\circ g\right)\left(x\right)=\sqrt{\left|x-2\right|^2-5\left|x-2\right|+6}=\begin{cases}\sqrt{x^2-9x+20}\,, & x\ge 2,\\ \sqrt{x^2+x}\,, & x<2,\end{cases}$$

$$\begin{aligned}D\left(f\circ g\right)&=\left\{x\in R\middle|\ x-2\ge 3,\ x\ge 2\ \text{ან}\ x-2\le 2,\ x\ge 2\right\}\\&\cup\left\{x\in R\middle|\ x\le -1,\ x\le 2\ \text{ან}\ x\ge 0,\ x\le 2\right\}\\&=\left[2;4\right]\cup\left[5;+\infty\right)\cup\left[0;2\right]\cup\left(-\infty;-1\right]=\left(-\infty;-1\right]\cup\left[0;4\right]\cup\left[5;+\infty\right),\end{aligned}$$

$$E\left(f\circ g\right)=\left[0;+\infty\right).$$

ავაგოთ $f\circ g$ ფუნქციის გრაფიკი (იხ. ნახ. 4) .



ნახ. 4

შევადგინოთ $g\circ f$ კომპოზიცია:

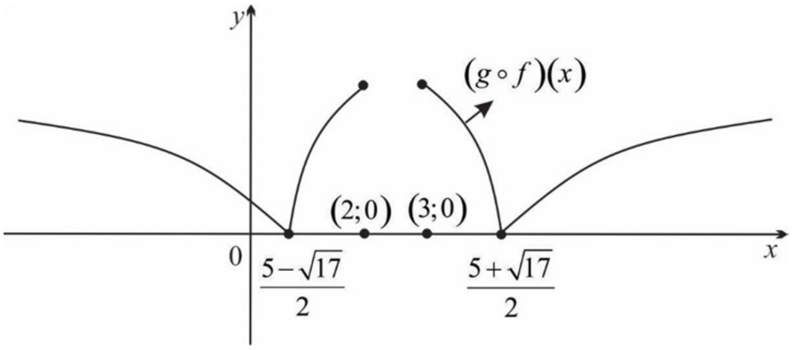
$$\left(g\circ f\right)\left(x\right)=g\left(f\left(x\right)\right)=\left|\sqrt{x^2-5x+6}-2\right|,$$

$$D\left(g\circ f\right)=D\left(f\right)=\left(-\infty;2\right]\cup\left[3;+\infty\right),\quad E\left(g\circ f\right)=\left[0;+\infty\right).$$

ადვილად დავადგენთ, რომ :

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-5x+6}-2, & x\in\left(-\infty;\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{5+\sqrt{17}}{2};+\infty\right),\\ 2-\sqrt{x^2-5x+6}, & x\in\left(\dfrac{5-\sqrt{17}}{2};2\right]\cup\left[3;\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right].\end{cases}$$

ავაგოთ $g\circ f$ ფუნქციის გრაფიკი (იხ. ნახ. 5).



ნახ. 5

განხილული მაგალითიდან ჩანს, რომ, საზოგადოდ :

$$(f\circ g)(x)\neq(g\circ f)(x).$$

თუ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია შექცეული ფუნქცია f^{-1}, მაშინ :

$$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=\left(f^{-1}\circ f\right)(x),\quad x\in D(f)\cap D\left(f^{-1}\right).$$

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 3. მოცემულია $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ ფუნქცია. ვიპოვოთ ფუნქციათა კომპოზიცია $f^{-1}\circ f$ და $f\circ f^{-1}$.

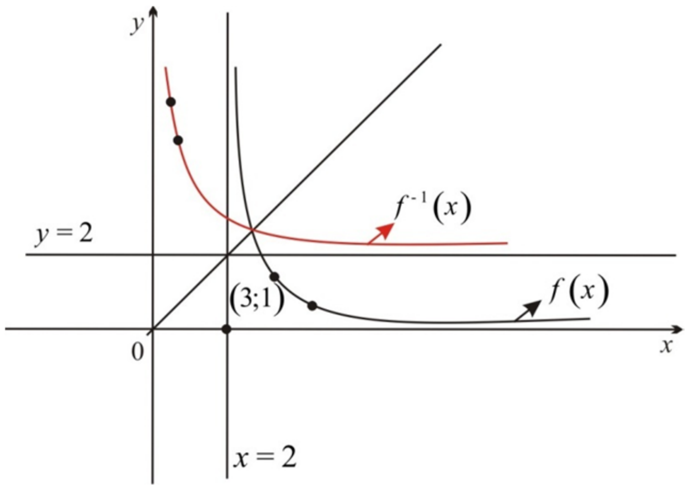
ამოხსნა. $f(x)$ ფუნქცია კლებადია მთელ განსაზღვრის არეზე ანუ $(2;+\infty)$ შუალედზე. ამიტომ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია შექცეული ფუნქცია $f^{-1}(x)$,

$$D\left(f^{-1}\right)=E(f)=(0;+\infty).$$

ვიპოვოთ $f^{-1}(x)$ ფუნქცია. ამისათვის ამოვხსნათ $x=f(y)$ განტოლება y-ის მიმართ, გვექნება:

$$x=\frac{1}{\sqrt{y-2}},\quad x^2=\frac{1}{y-2},\quad y=\frac{1}{x^2}+2,\quad x\in(0;+\infty).$$

ამრიგად, $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x^2}+2$, $x>0$ (იხ. ნახ. 6).



ნახ. 6

შევადგინოთ $f^{-1}\circ f$ და $f\circ f^{-1}$ ფუნქციათა კომპოზიცია:

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left(f(x)\right)=\frac{1}{f^{2}(x)}+2=x-2+2=x,\quad x\in D(f),$$

$$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left(f^{-1}(x)\right)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^{2}}+2-2}}=x,\quad x>0.$$

ამრიგად, მივიღეთ, რომ :

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=x,\quad x\in D(f)\cap D\left(f^{-1}\right)=D(f).$$

ყურადღება მივაქციოთ იმ ფაქტს, რომ :

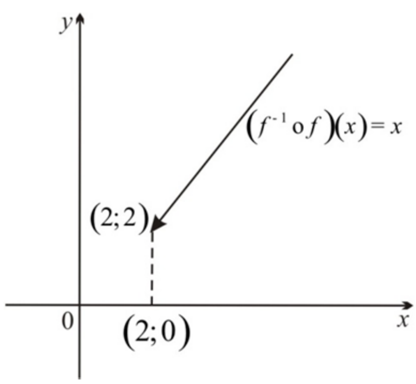
$$D\left(f^{-1}\circ f\right)\neq D\left(f\circ f^{-1}\right),$$

ამიტომ $f^{-1}\circ f$ და $f\circ f^{-1}$ ფუნქციები არ არის ტოლი ფუნქციები, ისინი ერთმანეთს ემთხვევა, როცა $x\in D(f)\cap D\left(f^{-1}\right)$ (იხ. ნახ. 7 და ნახ. 8).

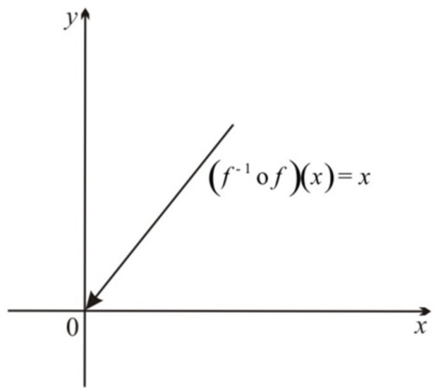
ვაჩვენოთ, რომ შეიძლება f და g ფუნქციების შერჩევა ისე, რომ :

$$f\circ g=g\circ f$$

და g ფუნქცია არ იყოს f -ის შექცეული ფუნქცია.



ნახ. 7



ნახ. 8

ვთქვათ, f და g წრფივი ფუნქციებია:

$$f(x)=ax+b,\quad a\neq 0 \text{ და } g(x)=cx+d,\quad c\neq 0.$$

$$D(f)=D(g)=R,\quad E(f)=E(g)=R,$$

$$(f\circ g)(x)=a(cx+d)+b=acx+ad+b,$$

$$(g\circ f)(x)=c(ax+b)+d=acx+cb+d.$$

იმისათვის, რომ შესრულდეს ტოლობა:

$$f\circ g=g\circ f,$$

აუცილებელია და საკმარისი, რომ :

$$ad+b=bc+d,\quad d(a-1)=b(c-1).$$

ა) ვთქვათ, $a\neq 1$, მაშინ $d=\dfrac{b(c-1)}{a-1}$.

ამრიგად,

$$f(x)=ax+b \text{ და } g(x)=cx+\frac{b(c-1)}{a-1},\ a\neq 1$$

ფუნქციებისთვის სრულდება ტოლობა:

$$(f\circ g)(x)=(g\circ f)x=acx+\frac{(ac-1)b}{a-1},\quad x\in R;$$

ბ) ვთქვათ, $a=1$, მაშინ თუ $c=1$, d და b ნებისმიერია:

$$f(x)=x+b,\qquad g(x)=x+d.$$

მაგალითი 4. მოცემულია $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ ფუნქცია. ვიპოვოთ f ფუნქციის იტერაციები.

ამოხსნა. ვიპოვოთ f ფუნქციის იტერაცია:

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\sqrt{16-f^2(x)}=\sqrt{16-16+x^2}=|x|,\quad -4\leq x\leq 4.$$

f ფუნქციის მეორე იტერაცია:

$$(f\circ(f\circ f))(x)=\sqrt{16-x^2}.$$

ამრიგად, მივიღეთ, რომ:

$$(\overbrace{f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f}^{2k})(x)=|x|,\quad -4\leq x\leq 4,$$

$$(\overbrace{f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f}^{2k+1})(x)=f(x),$$

სადაც k ნატურალური რიცხვია.

შევნიშნოთ, რომ $f(f(x))=|x|=x$, $0\leq x\leq 4$.

$f(x)=\sqrt{16-x^2}$, $0\leq x\leq 4$ ფუნქციას გააჩნია შექცეული ფუნქცია

$$f^{-1}(x)=\sqrt{16-x^2}=f(x),\ 0\leq x\leq 4.$$

საზოგადოდ, თუ f ფუნქციას გააჩნია შექცეული ფუნქცია, მაშინ $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ განტოლება ტოლფასია $f^{-1}\left(x\right)=f\left(x\right)$ განტოლების, $x\in D\left(f\right)$.

განხილულ მაგალითში $f\left(x\right)=\sqrt{16-x^2}$ ფუნქციის შეზღუდვას $0\le x\le 4$ შუალედში გააჩნია შექცეული ფუნქცია $f^{-1}\left(x\right)=f\left(x\right)$ და $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა $[0;4]$ სეგმენტი.

მაგალითი 5. ვთქვათ, $f\left(x\right)=\left|2-2|x|\right|-1$. დავადგინოთ რამდენი ამონახსნი აქვს $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ განტოლებას (იხ. [1, გვ. 205]) და ვიპოვოთ ამონახსნები.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ მითითება, რომელიც მოცემულია XII კლასის სახელმძღვანელოში და ამოვხსნათ ეს ამოცანა გრაფიკული ხერხით.

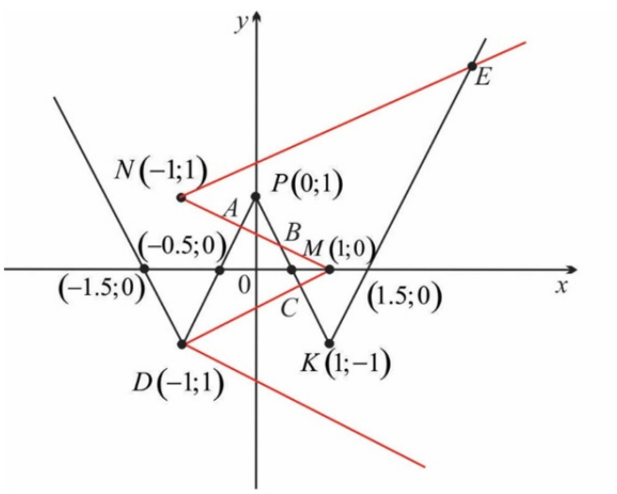
ვთქვათ, x_0 არის მოცემული განტოლების ამონახსნი, ანუ :

$$f\left(f\left(x_0\right)\right)=x_0 .$$

ვთქვათ, $y_0=f\left(x_0\right)$, მაშინ $f\left(y_0\right)=x_0$. ე. ი. $\left(x_0;y_0\right)$ წერტილი ერთდროულად ეკუთვნის $y=f\left(x\right)$ და $x=f\left(y\right)$ ფუნქციების გრაფიკებს; მაშასადამე, $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ განტოლების ამონახსნთა რაოდენობა ემთხვევა $y=f\left(x\right)$ და $x=f\left(y\right)$ ფუნქციათა გრაფიკების გადაკვეთის წერტილების რაოდენობას, ხოლო გადაკვეთის წერტილების აბსცისები წარმოადგენს ამ განტოლების ამონახსნებს.

$y=f\left(x\right)=\left|2-2|x|\right|-1$ ფუნქცია ლუწია, ამიტომ საკმარისია ავაგოთ $y=|2-2x|-1$ ფუნქციის გრაფიკი, როცა $x\ge 0$ და შევავსოთ გრაფიკი სიმეტრიულობის გათვალისწინებით OY ღერძის მიმართ (იხ. ნახ. 9).

$$y=|2-2x|-1=\begin{cases}2x-3, & x\ge 1,\\ 1-2x, & 0\le x\le 1,\end{cases}$$



ნახ. 9

ავაგოთ $x=f\left(y\right)$ ფუნქციის გრაფიკი $y=f\left(x\right)$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით (ნახ. 9-ზე $x=f\left(y\right)$ ფუნქციის გრაფიკი წითელი ფერით არის გამოსახული).

როგორც ნახ. 9-დან ჩანს , $y=f(x)$ და $x=f(y)$ ფუნქციების გრაფიკები იკვეთება ხუთ წერტილში, ესენია A , B , C , D და E წერტილები, ე. ი. $f(f(x))=x$ განტოლებას აქვს ხუთი ამონახსნი. ამონახსნების პოვნისთვის დაგვჭირდება DP, MN, DM, PK, KE და NE წრფეების განტოლებები:

$$DP: \quad \frac{x}{-0.5}+\frac{y}{1}=1, \; DM: \quad \frac{x}{1}+\frac{y}{-0.5}=1,$$

$$MN: \quad \frac{x}{1}+\frac{y}{0.5}=1, \; PK: \quad \frac{x}{0.5}+\frac{y}{1}=1,$$

$$KE: \quad y=2x-3, \; NE: \quad x=2y-3.$$

$A=DP\cap NM$, ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} -2x+y=1 \\ x+2y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\dfrac{1}{5} \\ y=\dfrac{3}{5} \end{cases},$$

ე. ი. $A\left(-\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right)$.

$$B=MN\cap PK, \begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases}. \; B\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right).$$

$$C=DM\cap PK, \begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+y=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 5x=3, \quad x=\dfrac{3}{5}, \\ y=-\dfrac{1}{5}, \end{cases} \; C\left(\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right).$$

$$E=NE\cap KE, \begin{cases} y=2x-3 \\ x=2y-3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}, \; C(3;3).$$

$$D=DP\cap DM, \; D(-1;-1).$$

მაშასადამე, $f(f(x))=x$ განტოლების ამონახსნებია:

$$x=-\frac{1}{5}, \quad x=\frac{1}{3}, \quad x=\frac{3}{5}, \quad x=3, \quad x=-1.$$

გრაფიკული წარმოდგენის გარეშე $f(f(x))=x$ განტოლების ამოხსნა ბევრად უფრო შრომატევადი იქნებოდა, რადგან ამ განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$\left|2-2\left\|2-2|x|\right|-1\right|-1=x \; .$$

მაგალითი 6. მოცემულია $f(x)=\log_2(4-2x)$ ფუნქცია. ვიპოვოთ f ფუნქციის იტერაცია, მისი განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე და $f(f(x))=x$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე.

ამოხსნა. f ფუნქციის იტერაციას აქვს შემდეგი სახე:

$$f(f(x))=\log_2(4-2\log_2(4-2x)).$$

$$D(f\circ f)=\left\{x\in R\left|\ \begin{cases}4-2x>0\\ 4-2\log_2(4-2x)>0\end{cases},\ \begin{cases}x<2\\ 4-2x<4\end{cases}\right.\right\}=(0;2).$$

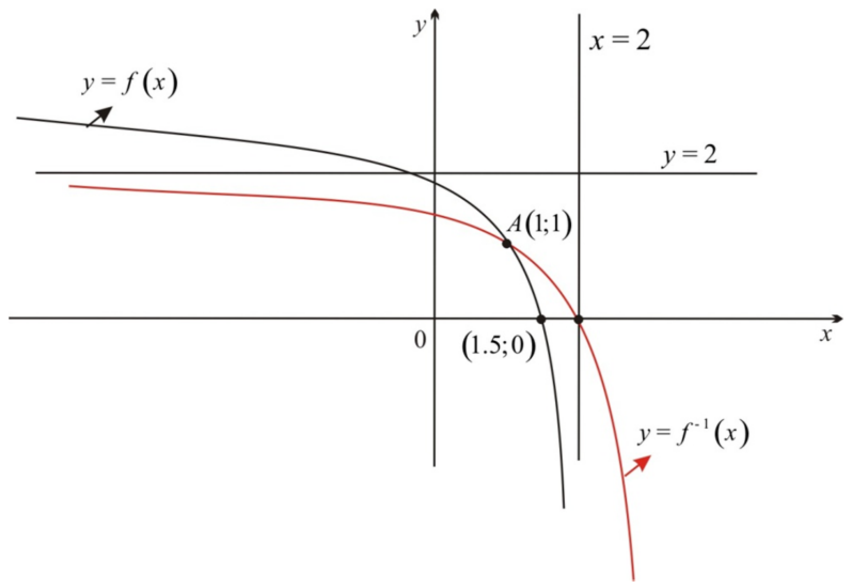
$$E(f\circ f)=(-\infty;+\infty).$$

$f(x)=\log_2(4-2x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეს $D(f)=(-\infty;2)$. f არის ურთიერთცალსახა ფუნქცია და მას გააჩნია შექცეული ფუნქცია f^{-1},

$$D(f^{-1})=E(f)=(-\infty;+\infty);\ E(f^{-1})=(-\infty;2).$$

$f(f(x))=x$ განტოლება ტოლფასია $f^{-1}(x)=f(x)$, $x\in D(f)\cap D(f^{-1})$ განტოლების.

ვიპოვოთ $f(x)=\log_2(4-2x)$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია, ამისათვის ამოვხსნათ $x=f(y)$ განტოლება, გვექნება: $x=\log_2(4-2y)$, $4-2x=2^x$, $y=2-2^{x-1}$. მაშასადამე: $f^{-1}(x)=2-2^{x-1}$, $D(f^{-1})=(-\infty;+\infty)$, $E(f^{-1})=D(f)=(-\infty;2)$. ავაგოთ $f(x)$ და $f^{-1}(x)$ ფუნქციების გრაფიკები და ამოვხსნათ გრაფიკულად $f(x)=f^{-1}(x)$ განტოლება (იხ. ნახ. 10).



ნახ. 10

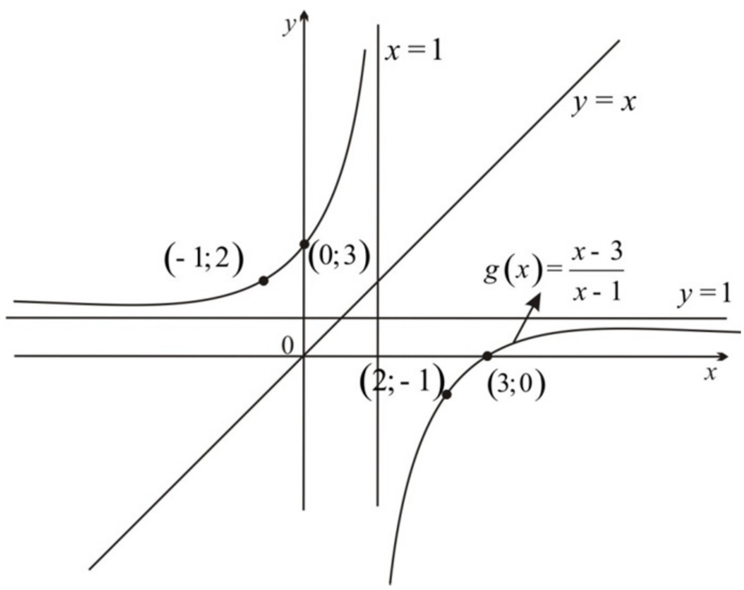
$y=f(x)$ და $y=f^{-1}(x)$ ფუნქციების გრაფიკები, მხოლოდ ერთ $A(1;1)$ წერტილში იკვეთება, ამიტომ $f(f(x))=x$ ანუ $\log_2(4-2\log_2(4-2x))=x$ განტოლებას აქვს მხოლოდ ერთი ამონახსნი და ეს ამონახსნი $x=1$.

განვიხილოთ ფუნქციათა კომპოზიციის შექცეული ფუნქციის პოვნის საკითხი.

მაგალითი 7. მოცემულია $f(x)=3^x$ და $g\left(\frac{x}{x+1}\right)=2x+3$ ფუნქციები. ვიპოვოთ $f\circ g$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია, ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ამოხსნა. $f(x)=3^x$ და $g\left(\frac{x}{x+1}\right)=2x+3$ ფუნქციებს გააჩნია შექცეული ფუნქციები. ცხადია, რომ $f^{-1}(x)=\log_3 x$; ვიპოვოთ $g\left(\frac{x}{x+1}\right)=2x+3$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია.

ვთქვათ, $t=\frac{x}{x+1}$, $x=\frac{t}{1-t}$ და $g(t)=2\frac{t}{1-t}+3=\frac{t-3}{t-1}$, ე. ი. $g(x)=\frac{x-3}{x-1}$; $D(g)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, $E(g)=D(g)$ (იხ. ნახ. 11).



ნახ. 11

$g(x)$ ფუნქციას გააჩნია შექცეული ფუნქცია და ადვილად დავადგენთ, რომ $g^{-1}(x)=g(x)=\frac{x-3}{x-1}$; $f^{-1}(x)$ და $g^{-1}(x)$ ფუნქციები არსებობს, ამიტომ იარსებებს $(f\circ g)^{-1}$ ფუნქცია და

$$(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}.$$

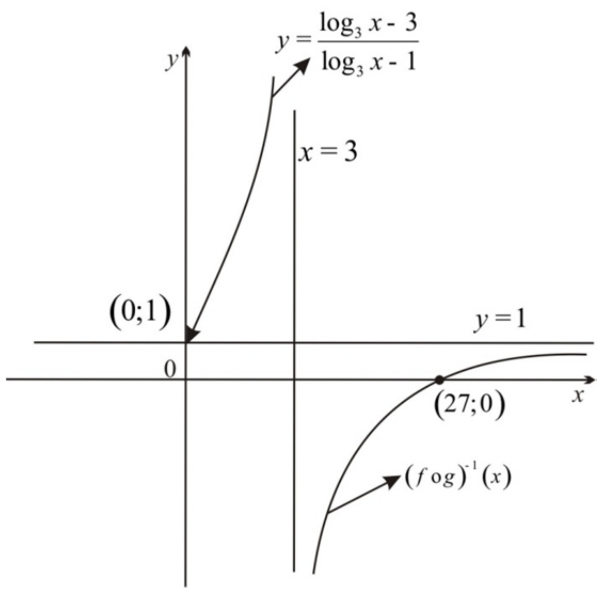
ამრიგად,

$$(f\circ g)^{-1}(x)=g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)=g^{-1}(\log_3 x)=\frac{\log_3 x-3}{\log_3 x-1},$$

$$D\left((f\circ g)^{-1}\right)=(0;3)\cup(3;+\infty),$$

$$E\left((f\circ g)^{-1}\right)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$$

(იხ. ნახ. 12).



ნახ. 12

შევნიშნოთ, რომ

$$f\left(g\left(x\right)\right)=3^{\frac{x-3}{x-1}},$$

$$D\left(f\circ g\right)=\left(-\infty;1\right)\cup\left(1;+\infty\right),\ E\left(f\circ g\right)=\left(0;3\right)\cup\left(3;+\infty\right).$$

$\left(f\circ g\right)\left(x\right)$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია შეგვიძლია ვიპოვოთ $x=3^{\frac{y-3}{y-1}}$ განტოლებიდან y -ის ამოხსნით, გვექნება:

$$\log_3 x=\frac{y-3}{y-1},$$

$$y\log_3 x-y=\log_3 x-3,$$

$$y\left(\log_3 x-1\right)=\log_3 x-3,$$

როცა $\log_3 x\neq 1,\ x\neq 3$, მაშინ $y=\dfrac{\log_3 x-3}{\log_3 x-1}$. ამრიგად :

$$\left(f\circ g\right)^{-1}\left(x\right)=\frac{\log_3 x-3}{\log_3 x-1},$$

$$D\left(\left(f\circ g\right)^{-1}\right)=\left(0;3\right)\cup\left(3;+\infty\right),\ E\left(\left(f\circ g\right)^{-1}\right)=\left(-\infty;1\right)\cup\left(1;+\infty\right).$$

ჩატარებული გამოთვლებით დავრწმუნდით

$$\left(f\circ g\right)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$$

ფორმულის სამართლიანობაში.

ლიტერატურა

[1] გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ., მათემატიკა, XII კლასის სახელმძღვანელო. თბილისი, 2008.

[2] მესხია რ., შექცეული ფუნქცია. მათემატიკა, სამეცნიერო პოპულარული ჟურნალი N 5, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, 2018.

ავტორის ელექტრონული მისამართი: rusudan.meskhia@tsu.ge

ცნობილ მათემატიკოსებთან დაკავშირებული სახალისო ამოცანები

ლია შენგელია

პედაგოგიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ა(ა)იპ მოსწავლე-ახალგაზრდობის ეროვნული სასახლის საგნობრივი მიმართულებების ხელმძღვანელი

პითაგორა *(ძვ. წ. აღ. 580-500) იყო იონიელი (ბერძენი) მათემატიკოსი და ფილოსოფოსი, მისტიკური, რელიგიური და სამეცნიერო საზოგადოება — „პითაგორელების" დამფუძნებელი, ყველაზე უკეთ ცნობილია „პითაგორას თეორემით", რომელიც მის სახელს ატარებს.*

1. **ძველებური ბერძნული ამოცანა:** ცნობილ მათემატიკოსს, პითაგორას ერთხელ ჰკითხეს, რამდენი მოსწავლე დადის შენს სკოლაში შენს საუბრებზე დასასწრებადო? მან უპასუხა: ჩემი მოსწავლეების ნახევარი სწავლობს მათემატიკას, მეოთხედი — მუსიკას, მეშვიდედი ნაწილი არაფერს არ აკეთებს, ჩუმად არიან. ამათ გარდა, კიდევ 3 ქალი დადის. რამდენი მოსწავლე დადიოდა პითაგორას სკოლაში?

ევკლიდე ალექსანდრიელი *(ძვ. წ.აღ-ით 325-265 წლები) — ძველბერძენი მათემატიკოსი, ავტორი ჩვენამდე მოღწეული პირველი ტრაქტატებისა მათემატიკაში; მოიხსენიებენ, როგორც „გეომეტრიის მამას".*

თავის 13-ტომიან ნაშრომში „საწყისები" ევკლიდემ თავი მოუყარა ბერძნული მათემატიკის სამასწლიანი განვითარების შედეგებს და შექმნა შემდგომი მათემატიკური კვლევის მყარი საფუძველი. მიუხედავად იმისა, რომ „საწყისები" დაწერილია შორეულ წარსულში, ამჟამინდელი სასკოლო გეომეტრიის პროგრამა თითქმის ამ წიგნიდანაა ნასესხები. ის აგებულია მკაცრ ლოგიკურ მსჯელობებზე, რომლებიც დამყარებულია თეორემებზე, განსაზღვრებებზე, პოსტულატებსა და აქსიომებზე.

ეგვიპტის მეფე პტოლემეოსმა (პტოლემე I), რომელსაც დიდი სურვილი ჰქონდა შეესწავლა გეომეტრია, მიიწვია ევკლიდე და მოითხოვა მისგან, რომ მარტივი გზით, სწრაფად ესწავლებინა (აეხსნა) მისთვის ამ მეცნიერების უმნიშვნელოვანესი კანონები, რაზეც გაოცებულმა ევკლიდემ მოუგო: „- ო, დიდო მეფეო, გეომეტრიაში არ არსებობს სამეფო გზები". მასვე ეკუთვნის სიტყვები: „ბუნების კანონები მხოლოდ და მხოლოდ ღვთის მათემატიკური აზრებია".

ევკლიდეს ალგორითმი. *ალგორითმი არის იმ მოქმედებების ერთობლიობა, რომელთა განსაზღვრული თანმიმდევრობით შესრულება ამოხსნის დასმულ ამოცანას. უძვე-*

ლესი დროიდან მოყოლებული, ერთ-ერთ ყველაზე ცნობილ ალგორითმად ითვლება ევკლიდეს ალგორითმი, რომელიც პოულობს ორი რიცხვის უდიდეს საერთო გამყოფს.

მოცემულია a და b რიცხვები, სადაც $a>b$. სრულდება შემდეგი მოქმედებები: a გავყოთ b-ზე, მივიღებთ რაღაც განაყოფს და ნაშთს, r-ს, შემდეგ b გავყოთ r-ზე, მივიღებთ ახალ ნაშთს, შემდეგ r გავყოთ ამ ახალ ნაშთზე და ა.შ. ყოველ ბიჯზე გამყოფი გავყოთ ნაშთზე. ალგორითმი დასრულდება, როცა ნაშთი მიიღება ნული. ბოლო არანულოვანი ნაშთი იქნება უსგ. მაგალითად, ვიპოვოთ უსგ (35, 20):

35:20=1 (ნაშთი 15), 20:15=1 (ნაშთი 5),
15:5=3 (ნაშთი 0), ე.ი. უსგ(35,20)=5.

2. **(შეკითხვა თამაშის — „რა? სად? როდის?“ არქივიდან):** გვითხარით ქართულად, სამი სიტყვით, როგორ მთავრდება დიდი ევკლიდეს მათემატიკური განხილვები?

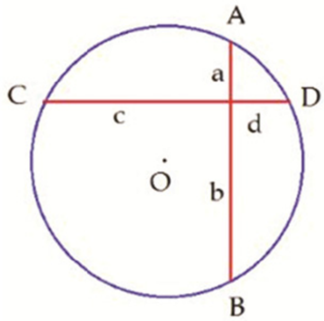
3. შავიზღვისპირეთში მდებარე 2-მა კერძო სასტუმრომ — „მედეამ“ და „პოსეიდონმა“ სეზონის დაწყების წინ ერთად შეცვალეს სასტუმროს ავეჯი. „მედეამ“ შეიძინა 108 საწოლი და 72 გარდერობი, ხოლო „პოსეიდონმა“ — 128 საწოლი და 64 გარდერობი. ეს ავეჯი თანაბრად განაწილდა მათი სასტუმროების ოთახებში. განსაზღვრეთ, რამდენი ნომერი აქვს თითოეულ სასტუმროს? თუ თქვენ მეგობრებთან ერთად (სულ 8 ადამიანი) დააპირებთ წასვლას დასასვენებლად, ამ სასტუმროებიდან რომელზე შეაჩერებდით არჩევანს?

არქიმედე *(ძვ. წ.აღ. 287-212) — ძველი ბერძენი მეცნიერი, მათემატიკოსი და მექანიკოსი; დაიბადა და ცხოვრების დიდი ნაწილი გაატარა კუნძულ სიცილიაზე მდებარე ქალაქ სირაკუზაში, სადაც რომაელთა მიერ ქალაქის აღების დროს დაიღუპა.*

არქიმედეს მრავალრიცხოვანმა აღმოჩენებმა განაპირობა მრავალი ლეგენდის შეთხზვა. ლეგენდარული წარმოშობა აქვს ამაც ფრაზასაც: „მომეცით საყრდენი წერტილი და მე დავძრავ დედამიწას!“ და შეძახილსაც „ევრიკა!“.

4. **არქიმედეს ამოცანა:** R რადიუსის მქონე წრის AB და CD ქორდები პერპენდიკულარულია და გადაკვეთის წერტილით იყოფიან a, b, c, d მონაკვეთებად. დაამტკიცეთ, რომ ამ მონაკვეთების სიგრძეთა კვადრატები არის ამ წრეწირისთვის მუდმივი სიდიდე, მისი დიამეტრის კვადრატი, ანუ

$$a^2+b^2+c^2+d^2=4R^2.$$



დიოფანტე ალექსანდრიელი *(ძვ. წ. II საუკუნე) — ძველი ბერძენი (ალექსანდრიელი) მათემატიკოსი. დიოფანტეს „ალგებრის მამას“ უწოდებენ. იგი იყო პირველი მათემატიკოსი, რომელმაც სისტემატურად დაიწყო უცნობი სიდიდეების სიმბოლოებით გამოსახვა.*

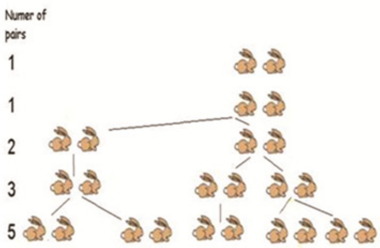
5. **დიოფანტეს ამოცანა:** იპოვეთ ისეთი 3 რიცხვი, რომელთა წყვილ-წყვილად შეკრებისას ჯამში მივიღებთ 20-ს, 30-ს, 40-ს.

6. ძველი ბერძენი მათემატიკოსის — **დიოფანტე ალექსანდრიელის** საფლავზე ასეთი ეპიტაფიაა: „გამვლელო! ამ ქვის ქვეშ განისვენებს სიბერეში გარდაცვლილი დიოფანტე ალექსანდრიელის ნეშტი. მეექვსედი ნაწილი მისი ცხოვრებისა ბავშვობის ხანას ეკავა, მეთორმეტედი ნაწილი — მოზარდობის პერიოდს, მეშვიდედი ნაწილი — ახალგაზრდობას, რის შემდგომაც დაქორწინდა. ქორწინებიდან 5 წელიწადი გავიდა, როცა მას ვაჟი შეეძინა, რომელმაც დიოფანტეს ასაკის ნახევარი იცოცხლა მხოლოდ. ამის შემდეგ დიოფანტემ კიდევ 4 წელი იცოცხლა და გარდაიცვალა. გამოიცანი, რამდენი წლის ასაკში გარდაიცვალა დიოფანტე?“.

ლეონარდო ფიბონაჩი */ლეონარდო პიზელი (დაახლ. 1170–1250) – იტალიელი მათემატიკოსი; მოგზაურობდა აღმოსავლეთში, სადაც გაეცნო არაბული მათემატიკის მიღწევებს; ხელი შეუწყო მათ გადაცემას დასავლეთში.*

1202 წელს გამოცემულ წიგნში „liber abacci“ მან ჩამოაყალიბა ამოცანა ბოცვრების გამრავლების შესახებ, რომელმაც სათავე დაუდო დღეს ფიბონაჩის სახელით ცნობილ რიცხვებს.

7. ფიბონაჩის ამოცანა. ერთი წყვილი ახალდაბადებული დედალ-მამალი ბოცვერი მოათავსეს შემოღობილ ადგილზე. ცნობილია, რომ ყოველი წყვილი ერთი თვის განმავლობაში (მეორე თვიდან დაწყებული) კიდევ ერთ წყვილს წარმოშობს. რამდენი ბოცვერი იქნება ერთი წლის შემდეგ? (იგულისხმება, რომ ბოცვრები არ იღუპებიან).



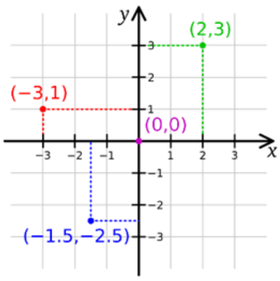
ნიკოლო ტარტალია *(1499 — 1557) — იტალიელი თვითნასწავლი მათემატიკოსი და ინჟინერი. პირველმა აღმოაჩინა მეთოდი კუბური განტოლების ფესვების მოსაძებნად.*

8. ტარტალიას ამოცანა: მამის ანდერძის მიხედვით, მისი 17 ცხენი სამ ვაჟს უნდა გაენაწილებინა 1\2 : 1\3 : 1\9 შეფარდებით. როგორ უნდა მოახერხონ შვილებმა მამის ანდერძის შესრულება?

რენე დეკარტი *(1596–1650) – ფრანგი ფილოსოფოსი, მათემატიკოსი და მეცნიერი. საყოველთაოდ აღიარებული, როგორც თანამედროვე ფილოსოფიის ფუძემდებელი და „თანამედროვე მათემატიკის მამა“. დეკარტმა შექმნა ანალიზური გეომეტრიის საფუძვლები, შემოიღო ცვლადი სიდიდის ცნება, დაამუშავა კოორდინატთა მეთოდი და აგრეთვე, დაამყარა კავშირი ალგებრასა და გეომეტრიას შორის.*

„ვაზროვნებ, მაშასადამე ვარსებობ“.
„მათემატიკა არის ხელოვნება, რომლის ხერხების გამოყენებითაც მცირდება ადამიანის შრომა“.
„არ დანებდე. მე ყველა შეცდომა დავუშვი, რაც შეიძლებოდა დამეშვა, მაგრამ არ დავნებებულვარ“.

(დეკარტი)



კოორდინატთა სისტემის შემოღება რენე დეკარტის მიერ იყო რევოლუციური მათემატიკის ისტორიაში, რადგან პირველად გახდა შესაძლებელი ევკლიდეს გეომეტრიისა და ალგებრის სისტემური დაკავშირება. დეკარტის კოორდინატთა სისტემის გამოყენებით ნებისმიერი გეომეტრიული ფიგურის ფორმა შეიძლება ჩაწერილ იქნეს დეკარტის განტოლების მეშვეობით, რომელიც წარმოადგენს ალგებრულ განტოლებას და აკავშირებს გეომეტრიული ფიგურის კოორდინატებს.

9. ააგეთ $y = \frac{1}{x}$, $x^2 + y^2 = 9$, $y = |-2x|$, $x = -3|\sin y|$ ფორმულებით მოცემული ფუნქციების გრაფიკები ცალ-ცალკე საკოორდინატო სისტემებზე და წაიკითხეთ მიღებული წირებით შედგენილი სიტყვა (მინიშნება არის მარჯვნივ მოცემულ ფოტოზე).

10. **(შეკითხვა თამაშის — „რა? სად? როდის?“ არქივიდან):** *ვინ შემოიღო ალგებრაში ტრადიცია, რომლის მიხედვით ცნობილი რიცხვები აღინიშნება ლათინური ანბანის პირველი ასოებით, ხოლო უცნობი — ანბანის ბოლო ასოებით?*

ბლეზ პასკალი *(1623—1662)— ფრანგი მათემატიკოსი, ფიზიკოსი, ლიტერატორი, ფილოსოფოსი, მორალისტი, კიბერნეტიკოსი, ალბათობის თეორიის ერთ-ერთი ფუძემდებელი; ჰიდროსტატიკის, როგორც მეცნიერების ერთ-ერთი დამაარსებელი.*

„მთელი ჩვენი ღირსება აზროვნებაა. სწორედ აზრი გვამაღლებს ჩვენ და არა დრო და სივრცე, რომლებშიც ჩაკარგულნი ვართ, როგორც ქრთილის მარცვლები“ (ბლეზ პასკალი).

11. **(შეკითხვა თამაშის — „რა? სად? როდის?“ არქივიდან)** დაასრულეთ ბლეზ პასკალის აზრი: „ადამიანებს უჭირთ სიმართლეს მიანიჭონ ძალაუფლება, ამიტომ ...“

პასკალის სამკუთხედი მათემატიკის არა ერთსა და ორ დარგში პოულობს გამოყენებას ნატურალური რიცხვებისგან შედგენილი ერთი ძალზე მარტივი, მაგრამ, ამავე დროს, საინტერესო და მნიშვნელოვანი ცხრილი, რომელიც პირველად ბლეზ პასკალმა განიხილა. ამიტომ მას პასკალის სამკუთხედს უწოდებენ (თავად პასკალი მას არითმეტიკულ სამკუთხედს უწოდებდა).

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 200 252 200 120 45 10 1

და ა.შ. უსასრულოდ

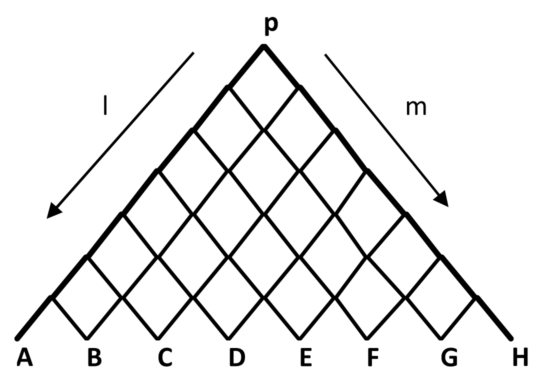
ამ უსასრულო სამკუთხედის წვეროსა და გვერდებზე ერთიანებია, ხოლო სხვა რიცხვები წარმოადგენენ მის ზემოთ მდებარე ორი რიცხვის ჯამს.

რითია ეს სამკუთხედი შესანიშნავი? ჩამოვთვალოთ მისი რამდენიმე თვისება.

(შევთანხმდეთ, რომ პასკალის სამკუთხედში სტრიქონების ნუმერაცია არა 1-ით, არამედ 0-ით დავიწყოთ):

- პასკალის სამკუთხედის n-ური სტრიქონის რიცხვები გვიჩვენებენ, თუ 0, 1, 2, ... ელემენტის შემცველი რამდენი ქვესიმრავლე აქვს n-ელემენტიან სიმრავლეს;
- პასკალის სამკუთხედის n-ური სტრიქონის რიცხვები წარმოადგენს $(1+x)^n$ მრავალწევრის კოეფიციენტებს (x ცვლადის ზრდად ან კლებად ხარისხებად დალაგების შემთხვევაში);
- პასკალის სამკუთხედის n-ურ სტრიქონში n+1 რიცხვია;
- პასკალის სამკუთხედის n-ური სტრიქონის რიცხვების ჯამი 2^n-ს უდრის;
- პასკალის სამკუთხედის ყოველი სტრიქონი სიმეტრიულია, ე.ი. სტრიქონის თავიდან და ბოლოდან ტოლად დაშორებული რიცხვები ერთმანეთის ტოლია.

12. მოცემულია გზათა ქსელი, რომელიც სათავეს P პუნქტში იღებს (იხ. ნახაზი). ამ პუნქტიდან გამოვიდა 2^7 მგზავრი. ნახევარი l მიმართულებით წავიდა, ნახევარი — m მიმართულებით. ყოველ შემდეგ პუნქტში მისვლისას მგზავრები კვლავ იყოფიან — ნახევარი l მიმართულებით მიდის, ნახევარი — m მიმართულებით. რამდენი მგზავრი მივა A, B, C, ..., H პუნქტებში სათანადოდ?



ისააკ ნიუტონი (1643 — 1727) — ინგლისელი ფიზიკოსი, მათემატიკოსი, ასტრონომი, თეოლოგი, ალქიმიკოსი და ფილოსოფოსი, უამრავი თეორიისა თუ კანონის ავტორი.

ნიუტონის ამოცანები:

13. ორი ფოსტალიონი, A და B, რომელთა შორის მანძილი 59 მილია,[1] დილით გაემართა ერთმანეთის შესახვედრად. A გადის 2 სთ-ში 7 მილს, ხოლო B — 3 სთ-ში 8 მილს. ამასთან, B გამოვიდა A-ზე 1 სთ-ით გვიან. რა მანძილს გაივლის A B-სთან შეხვედრამდე?

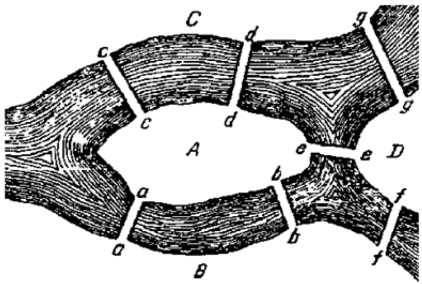
14. მინდორში ბალახი იზრდება ერთნაირად (ერთნაირი სიხშირით და სისწრაფით). ცნობილია, რომ 70 ძროხა ამ ბალახს ჭამს 24 დღეში, ხოლო 30 ძროხა — 60 დღეში. რამდენი ძროხა შეჭამს ამ ბალახს 96 დღეში? (შენიშვნა: გაითვალისწინეთ, რომ ბალახი მუდმივად იზრდება და ძროხები თანაბრად ჭამენ).

ლეონარდ ეილერი *(1707 –1783) – შვეიცარიელი მათემატიკოსი, მექანიკოსი და ფიზიკოსი.*

ლეონარდ ეილერის სახელთანაა დაკავშირებული გრაფთა თეორიის[2] ჩამოყალიბება. გრაფთა თეორიაში პირველი ნაშრომი მან 1736 წელს პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის სამეცნიერო ჟურნალში გამოაქვეყნა. ეს ნაშრომი იწყებოდა კენიგსბერგის ხიდების[3] ცნობილი ამოცანის განხილვით.

15. **ეილერის ამოცანა:** მამამ გადაწყვიტა თავისი ქონება შვილებისთვის თანაბრად გაენაწილებინა და მათ დაუტოვა ასეთი ანდერძი: „უფროსმა შვილმა უნდა მიიღოს 1000 მანეთი და დარჩენილი თანხის 1/8 ნაწილი, მომდევნომ — 2000 მანეთი და დარჩენილი თანხის 1/8 ნაწილი, მესამემ — 3000 მანეთი და დარჩენილი თანხის 1/8 ნაწილი და ა.შ.“. განსაზღვრეთ შვილების რაოდენობა და მამის მიერ დატოვებული თანხის რაოდენობა.

16. **კენიგსბერგის ხიდები:** შესაძლებელია თუ არა რიგ-რიგობით შემოვიაროთ ქალაქ კენიგსბერგის შვიდივე ხიდი, რომელიც აკავშირებს ქალაქის რაიონებს და კუნძულებს მდინარე პრეგოლზე, ისე, რომ, თითოეულ ხიდზე გავიაროთ მხოლოდ ერთხელ?



სიმეონ დენი პუასონი *(1781 — 1840) — ფრანგი მათემატიკოსი და ფიზიკოსი.*

როდესაც პუასონი ჯერ კიდევ საკმაოდ ახალგაზრდა იყო და არ ჰქონდა გადაწყვეტილი, რა პროფესია უნდა აერჩია, ახლობელმა მას აჩვენა რამდენიმე ამოცანა, რომლებსაც თვითონ ვერ ხსნიდა. პუასონმა საათზე ნაკლებ დროში ამოხსნა ყველა ამოცანა, მაგრამ განსა-

[1] მილი (ინგლ. Mile – ათასი ორმაგი რომაული ნაბიჯის ტოლი) – სიგრძის საზომი ერთეული, რომელიც გავრცელდა ერთეულთა ნაციონალურ არამეტრულ სისტემებში და რომელსაც ახლა უმთავრესად საზღვაო საქმეში იყენებენ. 1 კმ ეკვივალენტურია 0.6214 მილის.

[2] **გრაფთა თეორია —** დისკრეტული მათემატიკის ნაწილი, რომელიც შეისწავლის წვეროების (წერტილების) და წიბოებისაგან (წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთებისგან) შემდგარ სტრუქტურას – გრაფებს.

[3] ქალაქ კენიგსბერგის (დღევანდელი კალინინგრადის) მაცხოვრებლებში პოპულარული იყო ერთ-ერთი ასეთი გასართობი: კვირაობით, ქალაქში სეირნობისას ისინი ცდილობდნენ ქალაქის შვიდივე ხიდი გადაეკვეთათ მხოლოდ ერთხელ და დაბრუნებულიყვნენ საწყის ადგილზე.

კუთრებით მოეწონა ამოცანა 2 ჭურჭლის შესახებ.

„ამ ამოცანამ გადაწყვიტა ჩემი მომავალი ბედი, მე გადავწყვიტე, რომ გავმხდარიყავი მათემატიკოსი“ — ამბობდა იგი მოგვიანებით.

17. **პუასონის ამოცანა:** ერთ კაცს აქვს 12 პინტი[4] ღვინო და სურს მისი ნახევარი აჩუქოს ახლობელს, მაგრამ მას არ აქვს 6 პინტი მოცულობის ჭურჭელი. მას აქვს ორი ჭურჭელი: ერთი 8 პინტი, ხოლო მეორე — 5 პინტი ტევადობის. როგორ უნდა გადმოასხას 8 პინტი ტევადობის ჭურჭელში 6 პინტი ღვინო?

იოჰან პეტერ გუსტავ ლეჟენ დირიხლე

(1805–1859) – *გერმანელი მათემატიკოსი, რომელმაც მნიშვნელოვანი წვლილი შეიტანა მათემატიკური ანალიზის, ფუნქციების თეორიისა და რიცხვთა თეორიის განვითარებაში.*

*მათემატიკაში არსებობს ისეთი „პრინციპები“, რომლებიც ერთი შეხედვით საკმაოდ მარტივი და ცხადია, თუმცა ამ პრინციპების საფუძველზე, მათემატიკოსები ახერხებენ არა მხოლოდ ელემენტარული, არამედ საკმაოდ რთული ამოცანების ამოხსნას და ლამაზი თეორემების დამტკიცებას. ერთ-ერთი ასეთი პრინციპია **„დირიხლეს პრინციპი“**.*

დირიხლეს ცნობილი პრინციპის მიხედვით, შეუძლებელია 9 გალიაში 10 მტრედის ისე განაწილება, რომ ერთ გალიაში მაინც 1-ზე მეტი მტრედი არ იყოს (ზოგადად, თუ n ცალი მტრედი არის მოსათავსებელი m ცალ გალიაში და $m<n$, მაშინ რომელიმე გალიაში აუცილებლად მოხვდება ორი მტრედი მაინც).

18. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი 8 ადამიანიდან ორი აუცილებლად არის დაბადებული კვირის ერთსა და იმავე დღეს.

19. დაამტკიცეთ, რომ, თუ შვიდი ფერის საღებავი იქნა გამოყენებული 50 მოტოციკლის შესაღებად, მაშინ, სულ მცირე, 8 მოტოციკლი მაინც იქნება შეღებილი ერთ ფერად.

20. **(შეკითხვა თამაშის — „რა? სად? როდის?“ არქივიდან)** გერმანელ მათემატიკოსს, გუსტავ დირიხლეს არ უყვარდა ბევრი საუბარი. ერთხელ მან თავის სიმამრს ასეთი, მსოფლიოში ყველაზე მოკლე ტელეგრამა (დეპეშა) გაუგზავნა: „2+1=3“. რა მოვლენის შესახებ „წერდა“ დირიხლე?

*ინგლისელი მწერლის, **ლუის კეროლის** (1832–1898) მიერ 100-ზე მეტი წლის წინ დაწერილი ზღაპრები „ალისა საოცრებათა ქვეყანაში“ და „ალისა სარკის მიღმა“, რომლებიც სავსეა მათემატიკური ილუზიებით, მსოფლიო შედევრებად მიიჩნევა და შესულია იმ წიგნთა რიცხვში, რომელიც ყველა განათლებულმა ადამიანმა ცხოვრებაში ერთხელ მაინც უნდა წაიკითხოს. ლუის კეროლი მათემატიკოს ჩარლზ ლუდვიჯ დოჯსონის ლიტერატურული ფსევდონიმია.*

ინგლისის დედოფალი ვიქტორია თურმე ისე მოიხიბლა „ალისათი“, რომ უბრძანებია იმავე ავტორის მომდევნო წიგნიც მიერთმიათ მისთვის. მას ოქსფორდიდან მაშინვე აახლეს ჩარლზ დოჯსონის მონოგრაფია, რომელმაც, ცხადაია, დედოფალს მოლოდინი „გაუცრუა“.

ლუის კეროლის ამოცანები:

21. ადა, ალისა და მეიბლი წავიდნენ სასეირნოდ თეთრი, მწვანე და ლურჯი კაბებით. მათი ფეხსაცმლებიც არის ერთ-ერთი აღნიშნული ფერის. მხოლოდ ალისას ეცვა ერთი და იმავე ფერის კაბა და ფეხსაცმელი, ხოლო ადას არც კაბა და არც ფეხსაცმელი არ ეცვა თეთრი ფერის. მეიბლის მწვანე ფეხსაცმელი ეცვა. დაადგინეთ თითოეული გოგონას კაბის ფერი.

22. მატარებელი, რომლის სიგრძეა 18 მ, მგზავრს ჩაუვლის 9 წმ-ში. რამდენ წამში გაივლის მატარებელი 36 მ სიგრძის ხიდს?

23. ბნელ ოთახში ყუთში არის ხელთათმანები: 10 წყვილი თეთრი, 5 წყვილი შავი და

[4] პინტი — სითხის მოცულობის საზომი ძველებური ერთეული, 1 პინტი = 0,568 ლ.

7 წყვილი ლურჯი. რამდენი ცალი ხელთათმანი უნდა ამოვიღოთ ყუთიდან, რომ მათ შორის აუცილებლად იყოს 1 წყვილი თეთრი ხელთათმანი (გაითვალისწინეთ, რომ მარჯვენა და მარცხენა ხელთათმანი განსხვავდება ერთმანეთისგან)?

24. თაგვი სოროდან დაშორებულია 20 ნაბიჯით. კატას თაგვამდე აშორებს 5 ნახტომი. იმ დროში, რასაც კატა ანდომებს 1 ნახტომს, თაგვი გადის 3 ნაბიჯს. კატის 1 ნახტომი თაგვის 10 ნაბიჯის ტოლია. შეასწრებს თუ არა თაგვი კატას სოროში?

კარლ ფრიდრიხ გაუსი *(1777–1855) – გერმანელი მათემატიკოსი, ასტრონომი, გეოდეზისტი და ფიზიკოსი.*

ჯერ კიდევ სიცოცხლის პერიოდში გაუსი „მათემატიკოსთა პრინცის“ ტიტულით იყო დაჯილდოებული.

გადმოცემის თანახმად, სკოლაში მათემატიკის ერთ-ერთ გაკვეთილზე, მასწავლებელმა ბავშვებს დაავალა გამოეთვალათ რიცხვთა ჯამი 1-დან 100-მდე. პატარა გაუსმა შეამჩნია, რომ სხვადასხვა ბოლოდან აღებული ყველა წყვილის ჯამი ერთნაირია: 1+100=101, 2+99=101 და ა.შ. ასეთი წყვილი კი სულ 50-ია. ასეთი მსჯელობით მან ძალიან სწრაფად მიიღო საბოლოო შედეგი – 50×101 = =5050, რითაც მასწავლებლის გაოცება გამოიწვია.

„მათემატიკა მეცნიერებათა დედოფალია, არითმეტიკა კი – მათემატიკის დედოფალი“ (გაუსი).

გაუსის ფორმულა აღდგომის თარიღის გამოსათვლელად. *აღდგომის თარიღი მოძრავია და დამოკიდებულია ქვემოთ ჩამოთვლილ ფაქტორებზე:*

- *აღდგომის დღესასწაული ყოველთვის არის გაზაფხულის ბუნიობის (21 მარტი – ძველი სტილით, 3 აპრილი – ახალი სტილით) შემდგომ პერიოდში;*
- *მთვარის აღვსების (სავსემთვარეობის) შემდგომ;*
- *პირველ კვირა დღეს;*
- *არ უნდა ემთხვეოდეს ებრაელთა პასექს.*

აღდგომის თარიღის გამოსათვლელად გაუსი გვთავაზობს ასეთ ფორმულებს:

a=YEAR mod 4 (მიმდინარე წლის 4-ზე გაყოფის ნაშთი)

b=YEAR mod 7 (მიმდინარე წლის 7-ზე გაყოფის ნაშთი)

c =YEAR mod 19 (მიმდინარე წლის 19-ზე გაყოფის ნაშთი)

d=(19c+15) mod 30 ((19c+15) გამოსახულების 30-ზე გაყოფის ნაშთი)

e=(2a+4b+6d+6) mod 7 ((2a+4b+6d+6) გამოსახულების 7-ზე გაყოფის ნაშთი) აღდგომის თარიღი (ძველი სტილით) A= 22+d+e.

რადგან ძველი სტილით აღდგომა არის მარტში ან აპრილში, თუ A<31, აღდგომა იქნება A მარტს, თუ A>31, მაშინ (A-31) აპრილს.

მაგალითად, გამოვთვალოთ აღდგომის თარიღი 2021 წლისთვის:

a=2021 mod 4 =1, b=2021 mod 7 = 5,

c=2021 mod 19 = 7

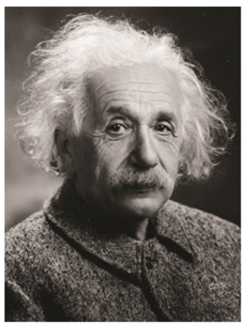
*d=(19c+15) mod 30=(19*7+15) mod 30 = 28,*

*e=(2a+4b+6d+6) mod 7=(2*1+4*5+6*28+6) mod 7 = 0*

A = 22+d+e = 22+28+0 = 50

რადგან 50>31, 2021 წელს აღდგომა (ძველი სტილით) არის 50-31=19 აპრილს. ახალი სტილით – 2 მაისს.

25. *შეცვალეთ გაუსის ფორმულა ისე, რომ ის ითვლიდეს აღდგომის თარიღს ახალი სტილით (გაითვალისწინეთ, რომ ძველ და ახალ სტილს შორის განსხვავება 13 დღეა და აღდგომა ახალი სტილით არის აპრილში ან მაისში) და გამოთვალეთ აღდგომის თარიღები 2020-2030 წლებისთვის (შენიშვნა: შეგიძლიათ ისარგებლოთ პროგრამა MS Excel და შესაბამისი ფორმულების გამოყენებით შექმნათ ცხრილი).*



ალბერტ აინშტაინი (1879–1955) *– გერმანელი ფიზიკოსი, საყოველთაოდ მიჩნეულია XX საუკუნის უდიდეს მეცნიერად. მან წამოაყენა ფარდობითობის თეორია, დიდი წვლილი აქვს შეტანილი კვანტური მექანიკის, სტატისტი-*

კური მექანიკისა და კოსმოლოგიის განვითარებაში. 1921 წელს მიენიჭა ნობელის პრემია ფიზიკაში.

„ყველა მეცნიერებას შორის განსაკუთრებული პატივისცემით სარგებლობს მათემატიკა; ამის ერთადერთი საფუძველია ის გარემოება, რომ მისი დებულებები არის აბსოლუტურად სარწმუნო და სანდო“.

„მარტივი მათემატიკა იგივეა, რაც უაზრო ლექსი“.

„თუ ფორმულების ენაზე A – ცხოვრებაში წარმატებაა, მაშინ A= x + y + z, სადაც x – სამუშაოა, y – თამაში და z – ენაზე კბილის დაჭერის შესაძლებლობა“.

„გენიალურობა სიმარტივეშია“.

(ალბერტ აინშტაინი)

სანამ უდიდესი მეცნიერი გახდებოდა, ჯერ კიდევ ბავშვმა, აინშტაინმა ერთი უჩვეულო ამოცანა შეადგინა. ის მიიჩნევდა, რომ დედამიწის მოსახლეობის 98 % ვერ შეძლებდა მის ამოხსნას. სცადეთ, იქნებ თქვენ სწორედ იმ 2 %-ში ხართ, ვისაც შეუძლია ამ ამოცანის ამოხსნა.

26. ერთ ქუჩაზე ხუთი სხვადასხვა ფერის სახლი დგას. თითოეულ სახლში განსხვავებული ეროვნების ადამიანი ცხოვრობს. ხუთივე სხვადასხვა სასმელს სვამს, ეწევა განსხვავებულ სიგარეტს და ჰყავს სხვადასხვა ცხოველი.

მაშ ასე, კითხვა: რა ეროვნების ადამიანს ჰყავს თევზი?

მინიშნებები:

1. ბრიტანელი ცხოვრობს წითელ სახლში.
2. შვედს ჰყავს ძაღლები.
3. დანიელის საყვარელი სასმელია ჩაი.
4. მწვანე სახლი თეთრი სახლის მარცხნივ დგას.
5. მწვანე სახლის პატრონს უყვარს ყავა.
6. ადამიანს, რომელიც ეწევა Pall Mall-ს, ჰყავს ფრინველები.
7. ყვითელი სახლის პატრონი ეწევა Dumhill-ს.
8. ადამიანს, რომელიც შუა სახლში ცხოვრობს, უყვარს რძე.
9. ნორვეგიელი ცხოვრობს პირველ სახლში.
10. ადამიანი, რომელიც ეწევა Blend-ს, ცხოვრობს იმ ადამიანის გვერდით, რომელსაც კატები ჰყავს.
11. ადამიანი, რომელსაც ცხენები ჰყავს, ცხოვრობს იმ ადამიანის გვერდით, რომელიც ეწევა Dumhill-ს.
12. ადამიანი, რომელიც ეწევა Blue Master-ს, უყვარს ლუდი.
13. გერმანელი ეწევა Prince-ს.
14. ნორვეგიელის სახლი ლურჯი სახლის გვერდით მდებარეობს.
15. ადამიანს, რომელიც ეწევა Blend-ს, ჰყავს მეზობელი, რომელსაც უყვარს წყალი.

პასუხები და მითითებები:

1. 28

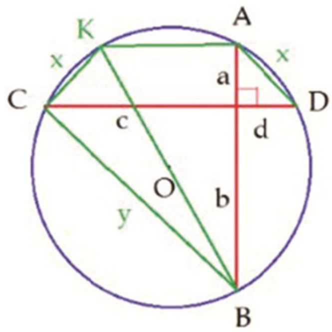
მითითება: $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}x+3=x$, $x=28$.

2. „რისი დამტკიცებაც გვინდოდა“.

3. 36 და 32 ნომერი. „პოსეიდონი“.

მითითება: უსგ(108,72)=36. ე.ი. „მედეაში“ არის 36 ნომერი. 108:36=3 საწოლი თითოეულ ნომერში. უსგ(128,64)=32 ნომერია „პოსეიდონში“. 128:32=4 საწოლი თითოეულში. 8 ადამიანისთვის უფრო მოსახერხებელია სასტუმრო „პოსეიდონი“.

4. არსებობს რამდენიმე (6) დამტკიცება. ჩვენ მოვიყვანთ თავად არქიმედეს დამტკიცებას:



აღვნიშნოთ AD=x, CB=y.

პითაგორას თეორემის თანახმად,

$x^2=a^2+d^2$ (1) და $y^2=b^2+c^2$ (2)

გავავლოთ CD-ს პარალელური AK ქორდა. BK=2R (რადგან ∠KAB=90°).

CKAD ტოლფერდა ტრაპეციაა, რადგან წრეშია ჩახაზული. CK=AD=x. ∠KCB=90° (როგორც დიამეტრზე დაყრდნობილი კუთხე). პითაგორას თეორემის თანახმად, KCB სამკუთხედიდან გვექნება: $x^2+y^2=4R^2$. (1) და (2). ტოლობების ჩასმით მივიღებთ: $a^2+b^2+c^2+d^2=4R^2$.

5. ეს რიცხვებია: 5, 15, 25.

6. 84 წელი.

მითითება: x-ით აღვნიშნოთ დიოფანტეს ასაკი, მაშინ x/6 — მისი ბავშვობა იყო, x/12 — მოზარდობა, x/7 — ახალგაზრდობა და ქორწინება, + 5 წელი — შეეძინა შვილი, შვილმა იცოცხლა x/2 წელი. დიოფანტემ შვილის შემდეგ კიდევ 4 წელი იცოცხლა. გვექნება: $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$, საიდანაც, x=84.

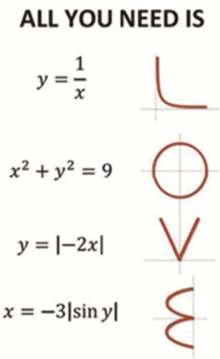
7. პასუხი: 233 წყვილი.

მითითება: წყვილთა რაოდენობის ცვლილება ასე მიმდინარეობს: დასაწყისში არის მხოლოდ ერთი ახალშობილი წყვილი (1); პირველი თვის ბოლოს კვლავ ბოცვრების ერთი წყვილია, რომლებიც შეწყვილდება; მეორე თვის ბოლოს წყვილი წარმოშობს ახალ წყვილს და კვლავ შეწყვილდება (2); მესამე თვის ბოლოს პირველი წყვილი წარმოშობს კიდევ ერთ ახალ წყვილს და შეწყვილდება, მეორე წყვილი კი მხოლოდ შეწყვილდება (3); მეოთხე თვის ბოლოს პირველი წყვილი წარმოშობს ერთ ახალ წყვილს და კვლავ შეწყვილდება, მეორე წყვილი წარმოშობს ახალ წყვილს და შეწყვილდება, მესამე წყვილი მხოლოდ შეწყვილდება (5). შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ ბოცვრების წყვილების რაოდენობა 12 თვის განმავლობაში იქნება: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, … როგორც ვხედავთ $F_1=1$, $F_2=2$, $F_3=1+1=2$, $F_4=1+2=3$, ე.ი. $Fn=Fn-1+Fn-2$, n≥ 2. ფიბონაჩის ყოველი რიცხვი ტოლია წინა ორი რიცხვის ჯამისა.

8. 2, 6 და 9 ცხენი.

მითითება: თავად ტარტალიამ შემოგვთავაზა შემდეგი ამოხსნა: არსებული ცხენების გაყოფისთვის საჭიროა კიდევ ერთი ცხენის დროებით სესხება, რის შემდეგაც მათი საერთო რაოდენობა იქნება 18. ამ რიცხვის დაყოფა აღნიშნული შეფარდებით მოგვცემს 2, 6 და 9 ცხენს, რაც ჯამში შეადგენს 17-ს. ქონების გაყოფის შემდეგ ნასესხებ ცხენს დაუბრუნებენ მესაკუთრეს. შესაძლებელია ამ თავსატეხის სხვაგვარად გადაწყვეტაც: საკმარისისა 1/2: 1/3:1/9 თანაფარდობა გაამრავლოთ 18-ზე და მიიღებთ იმავე შედეგს.

9.



10. რენე დეკარტი.

11. „...მათ ძალაუფლებას მიანიჭეს სიმართლე“.

12. 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

13. 35 მილს.

მითითება: A-ს სიჩქარეა $3\frac{1}{2}$ მილი/სთ, B-სი კი — $2\frac{2}{3}$ მილი/სთ. B-ს გამოსვლამდე A გაივლის $3\frac{1}{2}$ მილს და მათ შორის მანძილი დარჩება $59-3\frac{1}{2}=55\frac{1}{2}$ მილი. ისინი ერთმანეთს უახლოვდებიან $3\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}=6\frac{1}{6}$ მილი/სთ-ში სიჩქარით და ერთმანეთს შეხვდებიან $55\frac{1}{2}:6\frac{1}{6}=9$ სთ-ში. ამ დროისთვის A გაივლის $(1+9)\cdot 3\frac{1}{2}=35$ მილს.

14. 20 ძროხა.

მითითება: აღვნიშნოთ ბალახის ნაზრდი დღე-ღამეში y-ით, 24 დღეში ნაზრდი იქნება 24y. თუ მთელ მარაგს ჩავთვლით 1 მთელად, მაშინ 24 დღეში ძროხები ჭამენ 1+24y. დღე-ღამეში 70 ძროხა ჭამს $\frac{1+24y}{24}$, ხოლო 1 ძროხა — $\frac{1+24y}{24\cdot 70}$. ანალოგიურად, იმ პირობიდან, რომ 30 ძროხა ჭამს ბალახს 60 დღე-ღამეში, მივიღებთ, რომ 1 ძროხა 1 დღე-ღამეში ჭამს $\frac{1+60y}{30\cdot 60}$, ე.ი. $\frac{1+24y}{24\cdot 70}=\frac{1+60y}{30\cdot 60}$, საიდანაც $y=\frac{1}{480}$. ახლა გავიგოთ, თავიდან არსებული ბალახის რა ნაწილს ჭამს 1 ძროხა დღე-ღამეში;

$$\frac{1+24y}{24\cdot 70}=\frac{1+24\cdot\frac{1}{480}}{24\cdot 70}=\frac{1}{1600}$$

თუ x არის ძროხების რაოდენობა, რომლებიც 96 დღეში შეჭამენ ამ ბალახს, მაშინ:

$$\frac{1+96\cdot\frac{1}{480}}{96x}=\frac{1}{1600}$$

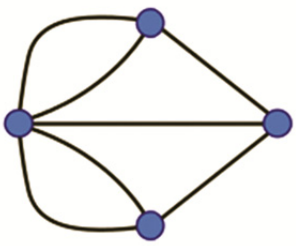
აქედან, x=20.

15. 7 შვილი; ნაანდერძევი თანხაა 49000 მანეთი.

მითითება: რადგან ყველა შვილმა მიიღო ერთნაირი თანხა, ამიტომ ყოველი ახალი დარჩენილი თანხის 1/8 იყო 1000 მანეთით ნაკლები წინა დარჩენილი თანხის 1/8-ზე, ე.ი. მთელი ახალი ნაშთი (დარჩენილი თანხა) 8000 მანეთით ნაკლებია წინა ნაშთზე. რადგან, პირობის თანახმად, მთელი ნაანდერძევი თანხა განაწილდა, უმცროსი შვილი ანდერძის მიხედვით მიიღებდა რამდენიმე ათას მანეთს, მაგრამ ნაშთი აღარ დარჩებოდა. ე.ი. წინა ნაშთი იყო 8000 მანეთი. ამ თანხისგან წინა შვილმა მიიღო 1/8 ნაწილი, რომელიც 1000 მანეთს შეადგენდა და დარჩენილი 7000 მანეთი კი მიიღო უმცროსმა შვილმა, რომელიც, ამგვარად, აღმოჩნდა მე-7 შვილი. ე.ი. შვილების რაოდენობაა 7, ნაანდერძევი თანხისა კი –7000 x 7=49000.

16. შეუძლებელია.

მითითება: ეილერმა პრობლემის გადასაჭრელად ხმელეთის ყველა ცალკეული ნაწილი (A, B, C, D) ჩათვალა წვეროებად, ხოლო ამ ნაწილების შემაერთებელი ხიდები (a, b, c, d, e, f, g) – წიბოებად და მიიღო ნახაზზე მოცემული სახის გრაფი. გრაფთა თეორიის ტერმინებით ამოცანის შეკითხვა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ასე: შესაძლებელია თუ არა მოცემული გრაფის ყველა წიბოს ისე შემოვლა, რომ თითოეულ წიბოზე გავიაროთ მხოლოდ ერთხელ? სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, – შესაძლებელია თუ არა ამ გრაფის დახაზვა ფურცლიდან ფანქრის აუღებლად (ხელის ერთი მოსმით) ისე, რომ თითოეულ წიბოზე ფანქარი გავატაროთ მხოლოდ ერთხელ?



ამ ამოცანის განხილვისას ეილერი შემდეგ დასკვნებამდე მივიდა:

- გრაფის კენტი წვეროების რაოდენობა (წვეროები, რომლებშიც წიბოების კენტი რაოდენობა იყრის თავს) უნდა იყოს ლუწი. არ არსებობდეს გრაფი კენტი წვეროების კენტი რაოდენობით.
- თუ გრაფის ყველა წვერო ლუწია, მაშინ ასეთი გრაფის დახაზვა შესაძლებელია ხელის ერთი მოსმით. ამასთან, შესაძლებელია დახაზვა დავიწყოთ გრაფის ნებისმიერი წვეროდან და დავასრულოთ იმავე წვეროზე.
- თუ გრაფს ზუსტად ორი წვერო აქვს კენტი, მაშინ ამ გრაფის დახაზვა შესაძლებელია ხელის ერთი მოსმით, ოღონდ, დახაზვა უნდა დავიწყოთ ერთი კენტი წვეროდან და დავასრულოთ მეორე კენტ წვეროში.
- შეუძლებელია ორზე მეტი კენტი წვეროს მქონე გრაფის დახაზვა ხელის ერთი მოსმით.

კენიგსბერგის ხიდების გრაფს ოთხივე წვერო აქვს კენტი, შესაბამისად, შეუძლებელია ყველა ხიდის გავლა რომელიმე მათგანის ორჯერ გადაკვეთის გარეშე.

17. გადასხმის პროცესი მოცემულია ცხრილში:

12	5	8	შენიშვნა
12	0	0	საწყისი მდგომარეობა
4	0	8	გაავსებს 8-პინტიან ჭურჭელს
4	5	3	8-პინტიანიდან გადაასხამს 5-პინტიანში
9	0	3	5-პინტიანს ასხამს ისევ 12-პინტიანში
9	3	0	8-პინტიანიდან 3 პინტს ასხამს 5-პინტიანში
1	3	8	შეავსებს 8-პინტიან ჭურჭელს
1	5	6	8-პინტიანიდან შეავსებს 5-პინტიან ჭურჭელს

18. კვირაში შვიდი დღეა, ამიტომ 8 ადამიანის განაწილება კვირის შვიდ დღეზე, დირიხლეს პრინციპის თანახმად, ნიშნავს რომ ერთსა და იმავე დღეს ორი ადამიანი მაინც იქნება დაბადებული.

19. უარეს შემთხვევაში, ანუ, თუ ცდილობენ მოტოციკლების შეღებვას სხვადასხვა ფერით, გვექნება თითოეული ფერით შეღებილი 7 მოტოციკლი და რადგან 7x7=49, 50-ე მოტოციკლი იქნება რომელიმე ფერის მოტოციკლეტებში მე-8.

20. დირიხლე სიმამრს ატყობინებდა შვილის (ვაჟის) შეძენის შესახებ.

21. ადას – მწვანე, ალისას – თეთრი, მეიბლის – ლურჯი.

22. 27 წმ-ში.

23. 35 ცალი ხელთათმანი.

24. შეასწრებს.
მითითება: კატას სორომდე სჭირდება 7 ნახტომი. კატის 7 ნახტომში თაგვი გააკეთებს 21 ნაბიჯს და დაიმალება სოროში.

25. პირველ ცხრილში მოცემულია აღდგომის თარიღები 2020 წლიდან 2030 წლამდე, მეორეში კი ჩანს შესაბამისი ფორმულები:

	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030
c	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
b	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0
a	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
d	9	28	17	6	25	14	3	22	11	0	19
e	6	0	3	6	6	2	5	6	1	4	5
A	19	32	24	16	35	20	12	32	16	8	28
აღდგომა	19 აპრილი	2 მაისი	24 აპრილი	16 აპრილი	5 მაისი	20 აპრილი	12 აპრილი	2 მაისი	16 აპრილი	8 აპრილი	28 აპრილი

	2020	2021
c	=MOD(C3;19)	=MOD(D3;19)
b	=MOD(C3;7)	=MOD(D3;7)
a	=MOD(C3;4)	=MOD(D3;4)
d	=MOD(19*C4+15; 30)	=MOD(19*D4+15; 30)
e	=MOD(2*C6+4*C5+6*C7+6;7)	=MOD(2*D6+4*D5+6*D7+6;7)
A	=4+C7+C8	=4+D7+D8
აღდგომა	=IF(C9<=30;C9;C9-30)&" "&IF(C9<=30;"აპრილი";"მაისი")	=IF(D9<=30;D9;D9-30)&" "&IF(D9<=30;"აპრილი";"მაისი")

26. *თევზი ჰყავს გერმანელს.*
ამოხსნა: მინიშნებებიდან ვიცით, რომ ნორვეგიელი ცხოვრობს პირველ სახლში, ლურჯი სახლის გვერდით. ლურჯ სახლში კი ცხოვრობს ადამიანი, რომელსაც ჰყავს ცხენი. ის, ვინც ცენტრში ცხოვრობს, სვამს რძეს.

ნორვეგიელი ვერ იცხოვრებს წითელ და ლურჯ სახლებში, იქ ინგლისელი და ის ადამიანი ცხოვრობს, ვისაც ცხენი ჰყავს. თეთრსა და მწვანეშიც არ ცხოვრობს, რადგან მარჯვნივ თეთრი სახლი დგას, ნორვეგიელისგან მარჯვნივ კი – ლურჯი. ე.ი. ის ყვითელ სახლში ცხოვრობს და უყვარს პიცა.

მწვანე სახლი თეთრისგან მარცხნივ დგას, ე.ი. მისი ნომერია 3 ან 4. თუმცა, მესამეში – საშუალოში – ასევე სვამენ რძეს, მწვანეში კი – ყავას, ე.ი. მწვანე სახლის ნომერია 4, თეთრის – 5, წითლის კი – 3. აქ ინგლისელი ცხოვრობს. ყავას მე-4 სახლში სვამენ.

ნათქვამია, რომ გერმანელს უყვარს ბლითები, ე.ი. ის არ მიირთმევს ბრინჯს და არ სვამს ლუდს. ასევე არ სვამს რძეს და ჩაის, ამას ინგლისელი და ფრანგი აკეთებენ. ე.ი. გერმანელი სვამს წყალს ან ყავას.

ნორვეგიელი ვერ დალევს ლუდს (რადგან სხვა საკვებს მიირთმევს), ყავას (რადგან მწვანე სახლში არ ცხოვრობს), ჩაის (არაა ფრანგი). ე.ი. ნორვეგიელი სვამს წყალს, გერმანელი კი – ყავას და ცხოვრობს მწვანე სახლში. და თუ წყალს ნორვეგიელი სვამს, მის მეზობელს ვაშლი უყვარს (მინიშნებებიდან).

თუ შვედს ჰყავს ძაღლი, მას შეუძლია იცხოვროს მეორე სახლში (სადაც ცხენებია), ე.ი. შვედი მე-5 სახლში ცხოვრობს (თეთრში). მეორე სახლში კი ცხოვრობს ფრანგი, რომელიც სვამს ჩაის.

თუ ყველის მოყვარული, რომელსაც ჰყავს ფრინველი, შვედი არ არის, ე.ი. – ინგლისელია. შესაბამისად, შვედი მიირთმევს ბრინჯს და სვამს ლუდს.

დაგვრჩა ბოლო მინიშნება: ის, რომელიც ჭამს ვაშლს, ცხოვრობს იმის გვერდით, რომელსაც ჰყავს კატა. ვაშლს ჭამს ფრანგი (მეორე სახლი). მარჯვნივ მისგან – ინგლისელი, რომელსაც ჰყავს ფრინველები, ე.ი. მეორე მეზობელი ფრანგი (მარცხნივ), კატა კი ნორვეგიელს ჰყავს.

ლიტერატურა:

1. Научно-популярный физико-математический журнал "Квант". "Квант" для младших школьников. http://kvant.mccme.ru/rub/8.htm
2. ავთანდილ ბენდუქიძე. მათემატიკა. სერიოზული და სახალისო. თბილისი, 1988.
3. Шарыгин И.Ф., Шевкин А.В. Задачи на смекалку. Москва. 1995
4. თამაშის — „რა, სად, როდის" შეკითხვების ბაზა. http://moazrovne.net https://db.chgk.info/search/questions

ავტორის ელექტრონული მისამართი: *liashengelia@gmail.com*

ნორჩი ქართველი მათემატიკოსები საერთაშორისო ოლიმპიადებში

გიორგი ჭელიძე

ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების ლიდერი,
ასოცირებული პროფესორი,
ქუთაისის საერთაშორისო უნივერსიტეტი

გივი ნადიბაიძე

ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების თანალიდერი,
ასისტენტ-პროფესორი,
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

61-ე საერთაშორისო ოლიმპიადა მათემატიკაში პანდემიის გამო ჩატარდა დისტანციურად 2020 წლის 20-28 სექტემბრის პერიოდში. საორგანიზაციო კომიტეტი მუშაობდა რუსეთის ქალაქ სანკტ-პეტერბურგში ბრიტანელი მათემატიკოსის – ჯეფ სმიტის ხელმძღვანელობით. ასპარეზობაში მონაწილეობა მიიღო 105-მა ქვეყანამ და გუნდები, ტრადიციულად, 6-6 მოსწავლისაგან შედგებოდა. საქართველოს ნაკრებს წარმოადგენდნენ: ნიკოლოზ ბირკაძე (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი), თეიმურაზ თოლორაია (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი), ლუკა მუშკუდიანი (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი), ანა ონოფრიშვილი (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი), ზაურ ბოკელავაძე (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი) და მიხეილ კვინიკაძე (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი).

საქართველოს მოსწავლეთა ნაკრები გუნდი მათემატიკის საერთაშორისო ოლიმპიადებში მონაწილეობს 1993 წლიდან. 2020 წლის ოლიმპიადაზე საქართველო ოცდამერვედ მონაწილეობდა და ქართველმა მოსწავლეებმა ამჯერადაც გამორჩეულ წარმატებებს მიაღწიეს. გუნდის ექვსივე წევრმა დაიმსახურა ჯილდო: 1 ოქრო (ნიკოლოზ ბირკაძე, თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი), 2 ვერცხლი (თეიმურაზ თოლორაია, კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი; ლუკა მუშკუდიანი, თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი); 2 ბრინჯაო (ანა ონოფრიშვილი, თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი, ზაურ ბოკელავაძე, თბილისის

კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი) და 1 სიგელი (მიხეილ კვინიკაძე, თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი). ჩვენმა გუნდმა ჯამური რეიტინგით მსოფლიოს 105 ქვეყნის გუნდებს შორის მე-18 ადგილი დაიკავა.

ქვემოთ დიაგრამაზე ნაჩვენებია 2020 წლის მონაწილეთა შედეგები:

Contestant [♀♂]	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Total	Rank		Award
								Abs.	Rel.	
Team results	**42**	**21**	**11**	**39**	**33**	**3**	**149**	**18**	**83.65%**	**G, S, S, B, B, HM**
Nikoloz Birkadze	7	7	7	7	7	1	36	4	99.51%	Gold medal
Teimurazi Toloraia	7	7	0	7	7	1	29	59	90.57%	Silver medal
Luka Mushkudiani	7	7	0	7	7	1	29	59	90.57%	Silver medal
Ana Onoprishvili	7	0	4	7	5	0	23	162	73.82%	Bronze medal
Zauri Bokelavadze	7	0	0	7	7	0	21	206	66.67%	Bronze medal
Mikheili Kvinikadze	7	0	0	4	0	0	11	371	39.84%	Honourable mention

Leader: ***George Chelidze***
Deputy leader: ***Givi Nadibaidze***

განსაკუთრებით უნდა აღინიშნოს ნიკოლოზ ბირკაძის წარმატება, რომელმაც წინა წლების განმავლობაში მოპოვებული ვერცხლის მედლების შემდეგ ოქროს მედალი დაიმსახურა და მოსწავლეთა საერთო რეიტინგულ სიაში 36 ქულით დაიკავა მე-4 პოზიციის შესაბამისი ადგილი. აქვე დავამატებთ, რომ ნიკოლოზმა იმავე წელს ინფორმატიკის საერთაშორისო ოლიმპიადაზეც ოქროს მედალი დაიმსახურა. მათემატიკასა და ინფორმატიკაში ერთდროულად ოქროს მედლები საქართველოს ისტორიაში ჯერჯერობით ერთადერთი შემთხვევაა და ასევე მსოფლიოს ისტორიაში იშვიათ შემთხვევას წარმოადგენს.

საქართველოს ოლიმპიური ნაკრების ფორმირება მოხდა ორი შესარჩევი ტურის შედეგის საფუძველზე. შესარჩევ წერებს ადმინისტრირებას უწევდა შოთა რუსთაველის სახელობის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი. მკაცრად რეგლამენტირებულ 2-ტურიან წერით გამოცდებში მონაწილეობის უფლება კი მოიპოვეს რესპუბლიკური სასკოლო მათემატიკური ოლიმპიადის ტურების შედეგებზე დაყრდნობით გამოვლენილმა საუკეთესო მოსწავლეებმა. შესარჩევი წერების საფუძველზე დაკომპლექტდა 6-მოსწავლიანი ნაკრები.

შოთა რუსთაველის სახელობის ეროვნული სამეცნიერო ფონდიდან ამ პროცესს ადმინისტრირებას უწევდა ქალბატონი მაკა ქაჯაია, ხოლო განათლების, მეცნიერებისა და კულტურის სამინისტროდან პროცესს კურირებდა ქალბატონი ნინო ცანდიშვილი. ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების დაკომპლექტების შემდეგ ერთთვიანი საწვრთნელი მეცადინეობები ჩატარდა კომაროვის სკოლაში ყოველდღიური 6-საათიანი მეცადინეობებით. მოსწავლეებს უტარდებოდათ სატრენინგო წერები საერთაშორისო ოლიმპიადების პირობების გათვალისწინებით.

საერთაშორისო ოლიმპიადის წერები ჩატარდა სან-დიეგოს უნივერსიტეტის სასწავლო ბაზისათვის განკუთვნილ აუდიტორიებში, რომლებიც აღჭურვილი იყო სამეთვალყურეო ვიდეოკამერებით და წერის პროცესში დაკვირვებას აწარმოებდა საორგანიზაციო კომიტეტი. წერების დასრულების შემდეგ მათ გადაეგზავნა დასკანერებული ნამუშევრები. გვინდა მადლობა გადავუხადოთ სან-დიეგოს უნივერსიტეტის წარმომადგენლობას საქართველოში ამ დახმარებისთვის. წერების მიმდინარეობას საორგანიზაციო კომიტეტთან შეთანხმებით მონიტორინგს უწევდა ბატონი პეტრე ბაბილუა.

გუნდის ლიდერის, თანალიდერის და ასისტენტის გარდა, მოსწავლეთა მომზადებაში ასევე მონაწილეობდნენ გამოცდილი ყოფილი ოლიმპიელები: ალექსანდრე საათაშვილი, საბა ლეფსვერიძე და ვანო გოქაძე.

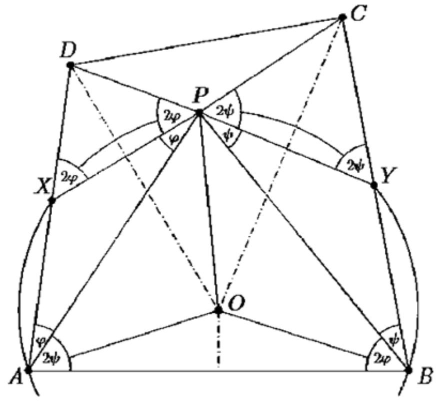
ქვემოთ მოვიყვანთ იმ ამოცანებს, რომლებიც მიეცათ მოსწავლეებს წერებზე:

ამოცანა 1. მოცემულია ამოზნექილი $ABCD$ ოთხკუთხედი. P წერტილი არის $ABCD$ -ს შიგა წერტილი. მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$\angle PAD:\angle PBA:\angle DPA = 1:2:3 = \angle CBP:\angle BAP:\angle BPC.$$

დაამტკიცეთ, რომ $\angle ADP$-ს შიგა კუთხის ბისექტრისა, $\angle PCB$-ს შიგა კუთხის ბისექტრისა და AB გვერდის შუამართობები ერთ წერტილში იკვეთება.

ამოხსნა: ვთქვათ, $\varphi = \angle PAD$ და $\psi = \angle CBP$. პირობის თანახმად: $\angle PBA = 2\varphi$, $\angle DPA = 3\varphi$, $\angle BAP = 2\psi$ და $\angle BPC = 3\psi$. ვთქვათ, X არის ისეთი წერტილი AD სეგმენტზე, რომ $\angle XPA = \varphi$. მაშინ გვექნება:



$$\angle PXD = \angle PAX + \angle XPA = 2\varphi = \angle DPA - \angle XPA = \angle DPX.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ სამკუთხედი DPX ტოლფერდაა, სადაც $DX = DP$ და, ამრიგად, $\angle ADP$ შიგა კუთხის ბისექტრისა ემთხვევა XP სეგმენტის შუამართობს. ანალოგიურად, თუ Y არის BC სეგმენტის ისეთი წერტილი, რომ $\angle BPY = \psi$, მაშინ $\angle PCB$ შიგა კუთხის ბისექტრისა ემთხვევა PY სეგმენტის შუამართობს. ამრიგად, უნდა დავამტკიცოთ, რომ XP, PY და AB სეგმენტების შუამართობები ერთ წერტილში იკვეთება.

შევნიშნოთ, რომ:

$$\angle AXP = 180^{\circ} - \angle PXD = 180^{\circ} - 2\varphi = 180^{\circ} - \angle PBA.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ოთხკუთხედი$AXPB$ ციკლურია, ამრიგად X ძევს APB სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირზე. ანალოგიურად, Y ძევს APB სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირზე. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ XP , PY და AB სეგმენტების შუამართობები იკვეთებიან $ABYPX$-ზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრზე. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

ამოცანა 2. მოცემულია ნამდვილი რიცხვები a, b, c, d ისეთი, რომ $a \geq b \geq c \geq d > 0$ და $a + b + c + d = 1$. დაამტკიცეთ უტოლობა

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

ამოხსნა. შეწონილი AM-GM უტოლობის თანახმად :

$$a^a b^b c^c d^d \leq a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c + d \cdot d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

ამრიგად, საკმარისია დავამტკიცოთ უტოლობა:

$$(a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < 1 = (a + b + c + d)^3.$$

გვაქვს:

$$(a + b + c + d)^3 \ > a^2(a + 3b + 3c + 3d) + b^2(3a + b + 3c + 3d) + c^2(3a + 3b + c + 3d) +$$

$$+d^2(3a + 3b + 3c + d) \geq (a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამოცანა 3. მოცემულია $4n$ ცალი ქვა, რომელთა მასები, შესაბამისად, არის $1,2,3, \dots ,4n$. თითოეული ქვა შეღებილია მოცემული n ფერიდან ერთ-ერთი ფერით ისე, რომ თითოეული ფერით შეღებილია ზუსტად 4 ქვა. დაამტკიცეთ, რომ ეს ქვები შეგვიძლია დავყოთ ორ ჯგუფად ისე, რომ შესრულდეს შემდეგი ორი პირობა:

- თითოეულ ჯგუფში ქვების ჯამური მასა ერთმანეთის ტოლია.
- თითოეულ ჯგუფში თითოეული ფერის ქვა არის მხოლოდ ორი.

ამოხსნა. დავაწყვილოთ ქვები ისე, რომ თითოეული წყვილის ჯამური მასა იყოს $4n + 1$. განვიხილოთ სიმრავლე S, რომლის ელემენტებია ეს $2n$ ცალი წყვილი, ანუ:

$$S = \{(k, 4n + 1 - k): k = 1, 2, \dots ,2n\}.$$

ამოცანის ამოსახსნელად საკმარისია დავყოთ S სიმრავლე ისე, რომ თითოეული ნაწილი შეიცავდეს n წყვილს და ყოველი ფერის ორ ქვას.

ავაგოთ მულტიგრაფი G (ანუ მარყუჟები და მულტიწიბო დასაშვებია) შემდეგნაირად: განვიხილოთ n ცალი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ფერის წვერო და S სიმრავლის ყოველი წყვილისთვის დავამატოთ წიბო, რომელიც აერთებს იმ ფერის წვეროებს, რა ფერის ქვებიც ამ წყვილშია. ცხადია, ასეთნაირად აგებულ გრაფის ყოველი წვეროს ხარისხი 4-ის ტოლია და სასურველი დაყოფა S სიმრავლისა განხორციელდება, თუ შევძლებთ G გრაფის წიბოების შეღებვას ორ ფერად, ვთქვათ, შავად და თეთრად ისე, რომ ყოველ წვეროში თავს იყრიდეს 2 შავი და 2 თეთრი ფერის წიბო. ვაჩვენოთ, რომ ზემოთ აღწერილ შეღებვას შევძლებთ G გრაფის ყოველი ბმული G' კომპონენტისთვის და, ცხადია, ეს მოგვცემს G გრაფის წიბოების სასურველ შეღებვას.

ვინაიდან G' -ის ყოველი წვეროს ხარისხი ლუწია, ამიტომ არსებობს ეილერის ციკლი C, ანუ ისეთი გზა, რომელიც G'-ის ყველა წიბოს დაფარავს, მაგრამ მის თითოეულ წიბოს მხოლოდ ერთხელ გაივლის. ვინაიდან ყოველი წვეროს ხარისხი 4-ია, ამიტომ C-ს წიბოების რაოდენობა 2-ჯერ მეტია G'-ის წვეროების რაოდენობაზე, ე.ი. ლუწია. ამრიგად, C ციკლის შესრულებისას თუ რიგრიგობით შევღებავთ შავად და თეთრად წიბოებს, მივიღებთ G'-ის სასურველ შეღებვას. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

ამოცანა 4. $n > 1$ არის მთელი რიცხვი. მოცემულია n^2 საბაგიროს სადგური მთის აღმართზე ისე, რომ არცერთი ორი სადგური ერთ სიმაღლეზე არ მდებარეობს. მთაზე ფუნქციონირებს საბაგირო გზის ორი კომპანია, A და B, თითოეულ კომპანიას გააჩნია k კაბინა; თითოეული კაბინა ახორციელებს მგზავრების გადაყვანას რომელიღაც სადგურიდან მასზე უფრო მაღლა მდებარე სადგურზე (გადაჯდომის გარეშე). A კომპანიის k კაბინა იწყებს მარშრუტს k განსხვავებული საწყისი სადგურიდან და ამთავრებს მარშრუტს k განსხვავებულ სადგურში, ამასთან, კაბინა, რომელიც იწყებს მარშრუტს უფრო მაღალი სადგურიდან, ამთავრებს მარშრუტს უფრო მაღალ სადგურში. იგივე პირობა სრულდება B კომპანიისათვის.

ვიტყვით, რომ ორი სადგური დაკავშირებულია კომპანიით, თუ შესაძლებელია მარშრუტის დაწყება ქვედა სადგურიდან და მარშრუტის დამთავრება ზედა სადგურზე, ამავე კომპანიის ერთი ან რამდენიმე კაბინის გამოყენებით (სხვა გადაადგილება სადგურებს შორის აკრძალულია). იპოვეთ უმცირესი k ისეთი, რომ აუცილებლად მოიძებნება ორი სადგური, რომელიც დაკავშირებული იქნება ორივე კომპანიით.

ამოხსნა: გადავნომროთ სადგურები რიცხვებით, $1,2,\dots,n^2$, ქვემოდან ზემოთ.

ვაჩვენოთ, რომ, თუ $k < n^2 - n + 1$, მაშინ შესაძლებელია არ არსებობდეს ორი სადგური, რომლებიც ორივე კომპანიით არიან დაკავშირებული. ცხადია, რომ საკმარისია ვაჩვენოთ ეს როცა $k = n^2 - n$.

ვთქვათ, A კომპანია აკავშირებს შემდეგ სადგურებს $(i, i+1)$, სადაც $n \nmid i$. მაშინ წყვილი (i, j) დაკავშირებულია A კომპანიით, თუ $\left\lceil \frac{i}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{j}{n} \right\rceil$.

ვთქვათ, B კომპანია აკავშირებს შემდეგ სადგურებს $(i, i+n)$ $1 \le i \le n^2 - n$. მაშინ წყვილი (i, j) დაკავშირებულია B კომპანიით, თუ $i \equiv j (mod\ n)$. ცხადია, არცერთი (i, j) წყვილი არ აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილ ორივე პირობას ერთდროულად, ე.ი. ასეთი ორი სადგური არ არსებობს.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ, როცა $k = n^2 - n + 1$ მაშინ არსებობს ორი სადგური, რომელიც დაკავშირებულია ერთმანეთთან ორივე კომპანიით. განვსაზღვროთ A-*ჯაჭვი,* როგორც $a_1 < a_2 < \dots < a_t$ სადგურთა მაქსიმალური მიმდევრობა, სადაც ყოველი $1 \le i \le t - 1$-თვის A კომპანია აკავშირებს a_i და a_{i+1} სადგურებს. თუ რომელიმე სადგურიდან A კომპანიის კაბინა არც შედის და არც გამოდის, მაშინ ეს სადგურიც მივანიჭოთ A-ჯაჭვს. განვსაზღვროთ B-*ჯაჭვი* ანალოგიურად. ცხადია, ყოველი სადგური შეიძლება იყოს მხოლოდ ერთ A-ჯაჭვში, ასევე მხოლოდ ერთ B-ჯაჭვში (შესაძლოა ერთი წერტილისგან შემდგარ ჯაჭვში). ყოველ სადგურს შევუსაბამოთ A-ჯაჭვის და B-ჯაჭვის წყვილი, რომლებსაც ის ეკუთვნის.

ვინაიდან ყოველი კაბინა ამთავრებს მარშრუტს k განსხვავებულ სადგურში, ამიტომ გვაქვს $n^2 - k = n - 1$ სადგური, რომელშიც მარშრუტი არ მთავრდება. ეს ნიშნავს, რომ გვაქვს $n - 1$ ცალი A-ჯაჭვში. ანალოგიურად ვღებულობთ, რომ გვაქვს $n - 1$ ცალი B-ჯაჭვი. ეს კი ნიშნავს, რომ გვაქვს $(n-1)^2$ წყვილი A და B-ჯაჭვების. ამრიგად, ორი სადგური n^2 სადგურიდან ეკუთვნის ერთსა და იმავე წყვილს, რაც ნიშნავს, რომ ისინი დაკავშირებულნი არიან როგორც A, ასევე B-კომპანიებით. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

პასუხი: $k = n^2 - n + 1$.

ამოცანა 5. მოცემულია n ცალი ბარათი $n > 1$. თითოეულ ბარათზე წერია მთელი დადებითი რიცხვი. აღმოჩნდა, რომ ყოველ ორ ბარათზე დაწერილი რიცხვების საშუალო არითმეტიკული ტოლია ერთ ან რამდენიმე ბარათზე დაწერილი რიცხვების საშუალო გეომეტრიულის. n-ის რომელი მნიშვნელობისთვის გამომდინარეობს, რომ ბარათზე დაწერილი ყველა რიცხვი ერთმანეთის ტოლია?

ამოხსნა. ცხადია, რომ ამოცანის პირობა ძალაში დარჩება, თუ ყველა რიცხვს გავყოფთ რაღაც რიცხვზე. ამრიგად, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

არცერთი მარტივი რიცხვი არ ყოფს ყველა რიცხვს. ასევე შევნიშნოთ, რომ, თუ რომელიღაც რიცხვი ლუწია და რომელიღაც კენტი, მაშინ მათი საშუალო არითმეტიკული რაციონალური რიცხვი იქნება, ხოლო საშუალო გეომეტრიული ან მთელი, ან ირაციონალური, ანუ ამოცანის პირობა ვერ შესრულდება. ამრიგად, ყველა რიცხვი კენტია.

ვაჩვენოთ, რომ ბარათზე დაწერილი ყველა რიცხვი ერთმანეთის ტოლია. ვთქვათ, გვხვდება განსხვავებული რიცხვები $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ და ვთქვათ რომელიღაც მარტივი p ყოფს $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_m$. განვიხილოთ $x = \frac{a_{i-1}+a_i}{2}$, რომელიც ტოლია რომელიღაც s წევრის საშუალო გეომეტრიულის. შევნიშნოთ ერთი მაინც ამ s წევრიდან უნდა იყოს x -ზე მეტი და ამიგად ის იყოფა p -ზე. ეს ნიშნავს, რომ x-იც იყოფა p-ზე და ე.ი. a_{i-1}-იც იყოფა p-ზე. ინდუქციის გამოყენებით მივიღებთ, რომ ყველა a_j იყოფა p-ზე. ეს კი ჩვენს დაშვებას ეწინააღმდეგება. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

პასუხი: $n > 1$

ამოცანა 6. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს დადებითი კონსტანტა c, რომლისთვისაც მართებულია შემდეგი წინადადება:

ვთქვათ, S არის სიბრტყეზე მოცემული $n > 1$ წერტილთა სიმრავლე ისეთი, რომ ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი არანაკლებია 1-ზე. მაშინ არსებობს l წრფე, რომელიც S სიმრავლეს ყოფს ისე, რომ მანძილი S სიმრავლის ნებისმიერი წერტილიდან l წრფემდე არანაკლებია $cn^{-1/3}$. (l წრფე ყოფს S სიმრავლეს, თუ იგი კვეთს რაიმე მონაკვეთს, რომლის ბოლოები ეკუთვნის S სიმრავლეს).

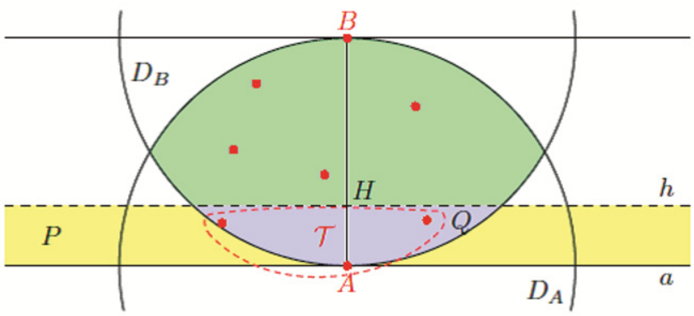
შენიშვნა. უფრო სუსტი შეფასება, სადაც $cn^{-1/3}$ შეცვლილია $cn^{-\alpha}$-თი, შეიძლება შეფასდეს ქულით, რომელიც დამოკიდებული იქნება $\alpha > 1/3$ კონსტანტას სიდიდეზე.

ამოხსნა: ვაჩვენოთ, რომ ამოცანაში მოცემული წინადადება სრულდება $c = 1/8$-თვის. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\delta = \frac{1}{8}n^{-1/3}$. ყოველი l წრფისთვის და ყოველი X წერტილისთვის X_l-ით აღვნიშნოთ X-ის პროექცია l-ზე. ანალოგიური აღნიშვნა გამოვიყენოთ წერტილთა სიმრავლის პროექციისთვის.

ცხადია, რომ თუ არსებობს l წრფე ისეთი, რომ S_l-ის ორ მეზობელ წერტილს შორის მანძილი მეტია ან ტოლი 2δ-ზე, მაშინ იმ მონაკვეთის შუამართობი, რომლის ბოლოებსაც ეს მეზობელი წეტილი წარმოადგენს, იქნება საძიებელი წრფე. ამრიგად დავუშვათ, რომ ასეთი ორი მეზობელი წერტილი არ არსებობს ნებისმიერ წრფეზე პროექციისას.

ამოვარჩიოთ A და B წერტილები S სიმრავლიდან, რომელთა შორის მანძილი $M = AB$ მაქსიმალურია, ანუ AB იყოს S-ის დიამეტრი. ამოცანის პირობის თანახმად, $M \geq 1$. აღვნიშნოთ AB წრფე l-ით. ცხადია, S სიმრავლე მოთავსებულია ორი, D_A და D_B დისკის თანაკვეთაში, ცენტრებით, შესაბამისად, A და B წერტილებში და რადიუსით M. ამრიგად, S_l პროექცია მოქცეულია A და B წერტილებს შორის. ის ამ სეგმენტს ყოფს $n-1$ ნაწილად და თითოეული ნაწილის სიგრძე ნაკლებია, ვიდრე 2δ. ამრიგად,

$$M < 2\delta n. \tag{1}$$



AB სეგმენტზე ავარჩიოთ წერტილი H ისე, რომ $AH = 1/2$. ვთქვათ, P არის ზოლი, რომელიც მოქცეულია AB-ს პერპენდიკულარულ a და b წრფეებს შორის, რომლებიც, შესაბამისად, A და H წერტილებზე გადიან. ვიგულისხმოთ, რომ a და b წრფეებიც ეკუთვნიან P ზოლს.

ვთქვათ, $T = P \cap S$ და $t = |T|$. დაშვების ძალით AH შეიცავს S_l სიმრავლის $\left\lceil \frac{1}{2} : (2\delta) \right\rceil$ წერტილს მაინც, ამიტომ:

$$t \geq \frac{1}{4\delta} \tag{2}$$

შევნიშნოთ, რომ T მოთავსებულია $Q = P \cap D_B$. ცხადია Q -ს პროექცია Q_a არის მონაკვეთი სიგრძით:

$$2\sqrt{M^2 - \left(M - \frac{1}{2}\right)^2} < 2\sqrt{M}.$$

მეორე მხრივ, ყოველი ორი X და Y წერტილებისთვის T სიმრავლიდან $XY \geq 1$ და

$X_lY_l \leq 1/2$, ამიტომ $X_aY_a = \sqrt{XY^2 - X_lY_l^2} \geq \sqrt{3}/2$. ამრიგად T_a-პროექციის ყველა t წერტილი მოთავსებულია სეგმენტში, რომლის სიგრძე ნაკლებია ვიდრე $2\sqrt{M}$ და დაშორებულნი არიან არანაკლებ $\sqrt{3}/2$ მანძილით. აქედან ვღებულობთ შეფასებას: $2\sqrt{M} > (t-1)\sqrt{3}/2$, ანუ

$$t < 1 + \frac{4\sqrt{M}}{\sqrt{3}} < 4\sqrt{M}, \tag{3}$$

ზემოთ მიღებული (1), (2) და (3) უტოლობების ძალით გვაქვს:

$$\frac{1}{4\delta} \leq t < 4\sqrt{M} < 4\sqrt{2n\delta}$$

და ამრიგად $512n\delta^3 > 1$, რაც $\delta = \frac{1}{8}n^{-1/3}$ ტოლობის გათვალისწინებით მცდარია. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

ავტორების ელექტრონული მისამართები:
giorgi.chelidze@kiu.edu.ge
givi.nadibaidze@tsu.ge

წინა ნომრის ამოცანების ამოხსნები

ამოცანა 1

ვთქვათ, P მთელკოეფიციენტებიანი ალგებრული მრავალწევრია და $N(P)=card\{k\in Z; P(k)=\pm 1\}$ (Z მთელ რიცხვთა სიმრავლეა). აჩვენეთ, რომ $N(P)\le 2+\deg P$, სადაც $\deg P$ წარმოადგენს P მრავალწევრის ხარისხს.

ამოხსნა: შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$N_+(P)=card\{k\in Z; P(k)=+1\},$$

$$N_-(P)=card\{k\in Z; P(k)=-1\}.$$

ვაჩვენოთ, რომ $N_+(P)\le 2$ ან $N_-(P)\le 2$. წინააღმდეგ შემთხვევაში იარსებებს ერთმანეთისაგან განსხვავებული მთელი a,b,c,d,e,g რიცხვები ისეთი, რომ:

$$P(a)=P(b)=P(c)=-1 \text{ და } P(d)=P(e)=P(g)=1.$$

აღნიშნული ტოლობები შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$P(x)=Q(x)(x-a)(x-b)(x-c)-1=R(x)(x-d)(x-e)(x-g)+1$$

სახით, სადაც $Q(x)$ და $R(x)$ მთელკოეფიციენტებიანი პოლინომებია. საბოლოოდ გვექნება შემდეგი:

$$Q(x)(x-a)(x-b)(x-c)=R(x)(x-d)(x-e)(x-g)+2$$

ტოლობა. თუ x ცვლადს მივცემთ, შესაბამისად, მნიშვნელობებს a,b და c-ს, მაშინ დავადგენთ, რომ რიცხვი 2 უნაშთოდ იყოფა $a-d,a-e,a-g$ რიცხვებზე და ამიტომ:

$$a-d,a-e,a-g\in\{1,-1,2,-2\}.$$

ანალოგიური გზით ვაჩვენებთ, რომ:

$$b-d,b-e,b-g\in\{1,-1,2,-2\} \text{ და } c-d,c-e,c-g\in\{1,-1,2,-2\}.$$

სიმეტრიის გამო შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $a<b<c$ და $g<e<d$. გვექნება შემდეგი მკაცრი უტოლობები $a-d<b-d<e-d<c-e<c-g$. თუ განვიხილავთ ამ რიცხვების შესაძლო სხვაობებს, მათ შორის ხუთი განსხვავებული რიცხვი გვექნება, რომლებიც ეკუთვნიან $\{1,-1,-2,2\}$ სიმრავლეს, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, გვაქვს $N_+(P)\le 2$ ან $N_-(P)\le 2$. საბოლოოდ გვექნება $N(P)\le \deg P+2$.

ამოცანა 2

მოცემულია მიმდევრობა: $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+[\sqrt{a_n}]$ ($[x]$-ით აღნიშნულია x რიცხვის მთელი ნაწილი). აჩვენეთ, რომ a_n წარმოადგენს რაიმე ნატურალური რიცხვის კვადრატს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა n-ს აქვს სახე 2^k+k-2.

ამოხსნა: ვთქვათ, $n_k=2^k+k-2$. ინდუქციის მეთოდით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $a_{n_k}=(2^{k-1})^2$ და თუ $n_{k-1}<m<n_k$, მაშინ a_m რიცხვი არ იქნება სრული კვადრატი. $k=1$ შემთხვევისათვის დებულება სამართლიანია. i-ს მიმართ ინდუქციით (როცა $0\le i\le 2^{k-1}$) შეგვიძლია ვაჩვენოთ შემდეგი ფორმულების სამართლიანობა:

$$a_{n_k+2i}=(2^{k-1}+i-1)^2+2^k-1,\ a_{n_k+2i+1}=(2^{k-1}+i)^2+2^{k-1}-i.$$

თუ ავიღებთ $i=2^{k-1}$, მივიღებთ $a_{n_{k+1}}=(2^k)^2$. თუ ავიღებთ i-ს პირობით $0<i<2^{k-1}$, შესაბამისი a_{n_k+2i} და a_{n_k+2i+1} რიცხვები მკაცრად მოთავსებული იქნება ორ მომდევნო ნატურალური რიცხვის კვადრატებს შორის და ის ვერ იქნება რაიმე ნატურალური რიცხვის კვადრატი.

ამოცანა 3

ვთქვათ, $a_1, a_2, \ldots$ ნატურალურ რიცხვთა მკაცრად ზრდადი მიმდევრობაა. ვთქვათ, ყოველი ნატურალური k რიცხვისათვის u_k აღნიშნავს მოცემული მიმდევრობის პირველი k წევრის უმცირეს საერთო ჯერადს. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $n>1$ ნატურალური რიცხვისათვის:

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\ldots+\frac{1}{u_n}\le 2.$$

ვთქვათ, v_k აღნიშნავს a_k და a_{k+1} რიცხვების უმცირეს საერთო ჯერადს, ხოლო w_k a_k და a_{k+1} რიცხვების უდიდეს საერთო გამყოფს. გვექნება:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_k}\le\frac{1}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{v_k}=\frac{1}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{w_k}{a_k a_{k+1}}\le\frac{1}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}$$

$$=\frac{1}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=\frac{2}{a_1}\le 2.$$

ამოცანა 4

აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი ამოზნექილი მრავალკუთხედი Φ შეიცავს Φ_1 და Φ_2 მრავალკუთხედებს ისეთს, რომ მათ საერთო შიგა წერტილი არ გააჩნიათ და ისინი მსგავსებია Φ მრავალკუთხედის, მსგავსების კოეფიციენტით $1/2$.

ამოხსნა: ვთქვათ, A და B წერტილები Φ მრავალკუთხედის ერთმანეთისაგან ყველაზე დაშორებული წვეროებია. მაშინ $\Phi_1=H_A^{1/2}(\Phi)$ და $\Phi_2=H_B^{1/2}(\Phi)$ საძიებელი ფიგურებია. ისინი ერთმანეთს არ კვეთენ, ვინაიდან მდებარეობენ AB მონაკვეთის შუაპერპენდიკულარის სხვადასხვა მხარეს. ამასთანავე, ვინაიდან Φ ამოზნექილია, ამიტომ Φ ფიგურა მთლიანად ფარავს Φ_1 და Φ_2 ფიგურებს.

ამოცანა 5

მოცემულია $A_1A_2\ldots A_n$ ამოზნექილი n-კუთხედი. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს $A_iA_{i+1}A_{i+2}$ სამკუთხედი, რომელზედაც შემოხაზული წრეწირი შეიცავს მოცემულ n-კუთხედს მთლიანად.

ამოხსნა: განვიხილოთ ყველა ის წრეწირი, რომელიც გადის ორ მეზობელ A_k და A_{k+1} წვეროებზე და ისეთი A_j წვერო, რომლისთვისაც $\angle A_iA_jA_{i+1}<90^\circ$. ერთი ასეთი წრეწირი მაინც არსებობს. მართლაც $A_iA_{i+2}A_{i+1}$ და $A_{i+1}A_iA_{i+2}$ კუთხეებიდან ერთ-ერთი

ნაკლებია 90° -ზე და პირველ შემთხვევაში ავიღოთ $A_j = A_{i+2}$, ხოლო მეორე შემთხვევაში ავიღოთ $A_j = A_i$. ზემოთ აღწერილი წრეწირებიდან ავირჩიოთ (ყოველი i და j ინდექსი-სათვის) უდიდესი რადიუსის წრეწირი S. ვთქვათ, გარკვეულობისათვის ეს წრეწირი გადის A_1, A_2 და A_k წერტილებზე.

დავუშვათ, წვერო A_p მდებარეობს S წრეწირის გარეთ. მაშინ წერტილები A_p და A_k მდებარეობს A_1A_2 წრფის ერთ მხარეს და $\angle A_iA_pA_2 < \angle A_iA_kA_2 < 90^\circ$. სინუსების თეორემის თანახმად, $A_iA_pA_2$ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი მეტია $A_iA_kA_2$ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსზე. მივიღეთ წინააღმდეგობა, ამიტომ S წრეწირი შეიცავს მთელ $A_1A_2\ldots A_n$ მრავალკუთხედს.

ვთქვათ $\angle A_2A_1A_k \le \angle A_1A_2A_k$. ვაჩვენოთ, რომ A_2 და A_k მეზობელი წვეროებია. თუ $A_k \ne A_3$, მაშინ $180^\circ - \angle A_2A_3A_k \le \angle A_2A_1A_k < 90^\circ$, ამიტომ $A_2A_3A_k$ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი მეტია $A_1A_2A_k$ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსზე. მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე S წრეწირი გადის მეზობელ A_1 A_2 და A_3 წვეროებზე.

მასალა მომზადდა თენგიზ კოპალიანისა და ბექან ღვაბერიძის მიერ

ახალი ამოცანები

ამოცანა 1. ვთქვათ, $A_n = ru^n + sv^n$, სადაც n ნატურალური რიცხვია, r, s, u, v მთელი რიცხვებია, $u \neq \pm v$ და P_n აღნიშნავს A_n-ის მარტივი გამყოფების სიმრავლეს. აჩვენეთ, რომ $P = \cup_{n=1}^{\infty} P_n$ სიმრავლე უსასრულოა.

ამოცანა 2. ამოხსენით ნატურალურ რიცხვებში განტოლება:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz.$$

ამოცანა 3. ვთქვათ, p მარტივი რიცხვია. რამდენი n ნატურალური რიცხვი არსებობს, რომლისთვისაც pn იყოფა $p + n$-ზე?

ამოცანა 4. ცნობილია, რომ $a_1, a_2, a_3, \dots$ არითმეტიკული პროგრესიის წევრებს შორის არის a_1^2, a_2^2, a_3^2 რიცხვებიც. აჩვენეთ, რომ ამ პროგრესიის ყველა წევრი მთელი რიცხვია.

ამოცანა 5. დაამტკიცეთ, რომ ნატურალური რიცხვებისგან შედგენილი ყოველი უსასრულო არითმეტიკული პროგრესია შეიცავს უსასრულო გეომეტრიულ პროგრესიას.

ამოცანა 6. $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ნატურალური რიცხვების მიმდევრობა ისეთია, რომ ყოველი ნატურალური n-ისთვის $a_{n+2}x^2 + a_{n+1}x + a_n = 0$ განტოლებას აქვს ნამდვილი ფესვები. შეიძლება თუ არა ამ მიმდევრობაში იყოს წევრების უსასრულო რაოდენობა?

ამოცანა 7. იპოვეთ მარტივი რიცხვების ყველა ისეთი p, q, r სამეული, რომ ნებისმიერი მათგანის მეოთხე ხარისხი შემცირებული 1-ით იყოფა დანარჩენი ორის ნამრავლზე.

ამოცანა 8. იპოვეთ ნატურალური რიცხვების მკაცრად ზრდადი $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ყველა მიმდევრობა, რომელშიც $a_2 = 2$ და $a_{mn} = a_m a_n$ ნებისმიერი m და n ნატურალური რიცხვებისათვის.

ამოცანა 9. რამდენი გვერდი შეიძლება ჰქონდეს ამოზნექილ მრავალკუთხედს, რომლის ყველა დიაგონალი ტოლია?

ამოცანა 10. a, b და c სამკუთხედის გვერდებია. ცნობილია, რომ $a^3 = b^3 + c^3$. დაამტკიცეთ, რომ ეს სამკუთხედი მახვილკუთხაა.

მასალა მომზადდა თენგიზ კოპალიანისა და ბეჟან ღვაბერიძის მიერ

მექანიკა

გიორგი ბაკურაძე

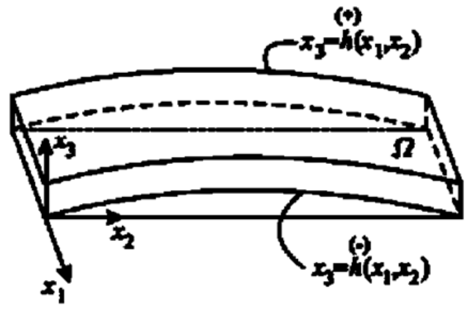
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, დოქტორანტი, საერთაშორისო სადოქტორო პროგრამა მათემატიკაში
International Doctoral Program In Mathematics (tsu.ge)

სკოლის ასაკიდანვე დაინტერესებული ვიყავი ფიზიკა-მათემატიკით; წარმატებულად გამოვდიოდი მათემატიკის ეროვნულ ოლიმპიადებსა და სხვადასხვა კონკურსზე. ამან განაპირობა, რომ ჩავაბარე ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მათემატიკის მიმართულებაზე, რომელიც დავამთავრე წარჩინებით. მაქვს მეცნიერებათა ბაკალავრის აკადემიური ხარისხი მათემატიკაში და მეცნიერებათა მაგისტრის აკადემიური ხარისხი გამოყენებით მათემატიკაში. ამჟამად ვარ დოქტორანტურის სტუდენტი ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მათემატიკის ინგლისურენოვან საერთაშორისო სადოქტორო პროგრამაზე. ჩემი ხელმძღვანელები არიან ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორები: გიორგი ჯაიანი, ნატალია ჩინჩალაძე და ბრემენის უნივერსიტეტის პროფესორი რაინჰოლდ კინცლერი (Reinhold Kienzler). ბაკალავრიატზე სწავლის პერიოდში დაინტერესებული ვიყავი რიცხვითი ანალიზითა და მათემატიკური მოდელირებით, ჩართული ვიყავი სტუდენტურ სამეცნიერო პროექტში „მოდელირება კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებით“, რომლის ხელმძღვანელი იყო პროფესორი რამაზ ბოჭორიშვილი. მაგისტრატურაზე სწავლის პერიოდში დავინტერესდი მექანიკით და მესამე წელია სამეცნიერო საქმიანობას ვეწევი აკადემიკოს ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტში. ჩემი სამუშაო თემა არის „ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები თერმოდრეკადი პიეზო-ელექტრული წამახვილებული პრიზმული გარსული და ღეროსებური სხეულებისათვის“. ინფორმაცია ჩემი სამეცნიერო აქტიურობის შესახებ მოყვანილია სტატიის ბოლოს.

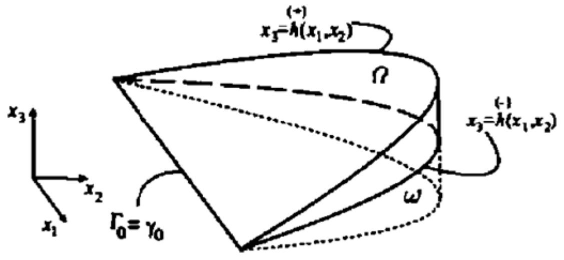
ჩემი სამეცნიერო ინტერესის სფერო მოიცავს გამოყენებით მათემატიკას, კერძოდ მექანიკას; ვცდილობ ცოდნა გავიღრმავო ამ სამეცნიერო დარგში.

1955 წელს ილია ვეკუამ [1] გამოაქვეყნა დრეკადი პრიზმული გარსების მოდელები. მან იმ გარსებს, რომელთა სისქე საზღვარზე ნული ხდება, „წამახვილებული“ გარსები უწოდა, ხოლო 1965 წელს მან შემოგვთავაზა ანალოგიური მოდელები სტანდარტული გარსებისთვის [2] და ორივე ნაშრომში ხაზი გაუსვა წამახვილებული გარსებისთვის სასაზღვრო ამოცანების მნიშვნელობას. ეს დაკავშირებულია გადაგვარებულ კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებსა და სისტემებთან. პრაქტიკაში წამახვილებული გარსები ხშირად გვხდება სივრცულ კონსტრუქციებში ნაწილობრივ ჩამაგრებული ნაპირებით, როგორიცაა: სტადიონის სახურავები, თვითმფრინავების ფრთები, წყალქვეშა ნავების ფრთები და ა. შ.; გარდა ამისა, მანქანათმშენებლობაში (საჭრელი და სარანდავი ჩარხები), კოსმონავტიკაში, ტურბინებში და სხვა საინჟინრო სფეროებში (მაგალითად, კაშხლებში). წამახვილებული გარსების მიერ დაკავებული არეები, თუ მათ განვიხილავთ როგორც სამგანზომილებიანს, წარმოადგენენ სამგან-

ზომილებიან არეებს, საზოგადოდ, არალიფშიცური საზღვრებით. ამ ამოცანებს სტატიკის შემთხვევაში მათემატიკურად მივყავართ რიგის გადაგვარების მქონე ელიფსური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისთვის სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევის საკითხამდე, ხოლო დინამიკის შემთხვევაში, ჰიპერბოლური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისთვის საწყის-სასაზღვრო ამოცანების დასმისა და ამოხსნადობის გამოკვლევის საკითხებამდე (შესაბამის გამოკვლევებთან დაკავშირებით მოცემულია მიმოხილვები [3] და [4]-ში, აგრეთვე ილია ვეკუას კომენტარები [5]-ში (გვ. 86) და [7]). ამავე პერიოდში ილია ვეკუამ შემოგვთავაზა ე.წ პრიზმული გარსების მათემატიკური მოდელი, რომელიც ეფუძნება სისქის ცვლადის მიმართ სამგანზომილებიანი წრფივი დრეკადობის თეორიის გადაადგილების ვექტორის, ძაბვის და დეფორმაციის ტენზორების ფურიე-ლეჟანდრის ორთოგონალურ მწკრივებად გაშლას. გაშლის პირველი $N+1$ წევრის შენარჩუნებით მან შემოიღო ე.წ. N-ური მიახლოება და განსაზღვრა შესაბამისი ორგანზომილებიანი მოდელების იერარქია. ყოველი ეს მიახლოება შეიძლება განვიხილოთ, როგორც პრიზმული გარსების დამოუკიდებელი მოდელი.



ნახ. 1. მუდმივი სისქის პრიზმული გარსი, $\partial\Omega$ არის ლიფშიცური საზღვარი



ნახ. 2. წამახვილებული პრიზმული გარსი. $\partial\Omega$ არის ლიფშიცური საზღვარი

ჩემი კვლევის ინტერესი იყო თერმოდრეკადი კელვინ-ფოიგტის პიეზოელექტრული პრიზმული გარსებისთვის იერარქიული მოდელების აგება და გამოკვლევა. სამაგისტრო ნაშრომი მოვამზადე თემაზე: „იერარქიული მოდელები თერმოდრეკადი კელვინ-ფოიგტის პიეზოელექტრული პრიზმული გარსებისთვის“; თერმოდრეკადი კელვინ-ფოიგტის პიეზოელექტრული პრიზმული გარსებისათვის სიცარიელეებით ავაგე იერარქიული მოდელები. სახელდობრ, ილია ვეკუას განზომილების რედუქციის მეთოდით მივიღე ძირითად განტოლებათა სისტემა და იერარქიული მოდელების N-ურ მიახლოებაში დავსვი სასაზღვრო და საწყის-სასაზღვრო ამოცანები. განვიხილე ტრანსვერსალურად იზოტროპული პიეზოელექტრული მასალის ანტიბრტყელი დეფორმაცია $N=0$ მიახლოებაში, დავსვი და გამოვიკვლიე შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანები.

ჩემი კვლევის ინტერესია თერმოდრეკადი პიეზოელექტრული გარსების და ღეროების იერარქიური მოდელების განხილვა და გამოკვლევა დაბალ მიახლოებებში. შესაბამისად, განვიხილე თერმოდრეკადი კელვინ-ფოიგტის პიეზოელექტრული პრიზმული გარსებისთვის იერარქიული მოდელების $N=1$ მიახლოება, დავსვი სასაზღვრო და საწყის-სასაზღვრო ამოცანები. განვიხილე ტრანსვერსალურად იზოტროპული პიეზოელექტრული მასალის ანტიბრტყელი დეფორმაცია $N=1$ მიახლოებაში.

პიეზოელექტრული მასალები, პრიზმული გარსები, ფირფიტები ფართოდ გამოიყენება სხვადასხვა საინჟინრო სტრუქტურებსა და თანამედროვე ტექნოლოგიებში. აქედან გამომდინარე, მნიშვნელოვანია ავაგოთ და გამოვიკვლიოთ მათი სამგანზომილებიანი მოდელების მიახლოებითი ალგორითმები.

ლიტერატურა:

[1] I. Vekua. On a way of calculating of prismatic shells. Prosceeding of A. Razmadze Institute of Mathematics of Georgian Academy of Sciences, 21:191-259, 1995 (Russian).

[2] I. Vekua. The theory of thin shallow shells of variable thickness. Prosceeding of A. Razmadze Institute of Mathematics of Georgian Academy of Sciences, 30:5103, 1965 (Russian).

[3] Jaiani G., Elastic bodies with non-smooth boundaries-cusped plates and shells, ZAMM, 76, Suppl. 2(1996), 117-120.

[4] Jaiani G., Kharibegashvili S., Natroshvili D. and Wendland W.L., Two-Dimensional hierarchical models for prismatic shells with thickness vanishing at the boundary, Journal of Elasticity, 77(2004), 95-112.

[5] Vekua I., Shell Theory: General Methods of Construction, Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melburne 1985.

[6] Jaiani G., Piezoelectric Viscoelsactic Kelvin-Voigt Cusped prismatic shells, Lecture Notes of TICMI (2018), 1512-0511.

[7] Jaiani G., Cusped Shell-like Structures Springer, Heidelberg-Dorbrecht-London-New York, 2011.

[8] Petia Dineva, Dietmar Gross, Ralf Muller, Tsviatko Rangelov, Dynamic Fractiure of Piezoelectric Materials, Springer (2014).

[9] Natroshvili D., Mathematical Problems Of Thermo-Electro-Magneto-Elasticity, Lecture Notes of TICMI (2011).

[10] Iesan D., On a Theory of Thermoviscielastic Materials vith Voids, Springer, (2011).

[11] R. Kienzler, P. S., Second-order linear plate theories: partial differential equations, stress resultants and displacements. International Journal of Solids and Structures, Amsterdam; (2017) 14-26.

[12] R. Kienzler, P. S., A Reissner-type plate theory for monoclinic material derived by extending the uniform approximation technique by orthogonal tensor decompositions of nth-order gradient. An International Journal of Theoretical and Applied Mechanics AIMETA, New York: Springer; (2016) 2143-2167.

მოხსენებები კონფერენციებზე

1. ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის 75-ე სტუდენტური სამეცნიერო კონფერენცია, რთული გეომეტრიის მქონე ზოგიერთი მულტისტრუქტურული სხეულისთვის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის ერთი რიცხვითი მეთოდის შესახებ. 2014
2. ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის სტუდენტური სამეცნიერო კონფერენცია, იერარქიული მოდელები თერმოდრეკადი კელვინ-ფოიგტის პიეზოელექტრული პრიზმული გარსებისთვის. 2019.
3. The Fourth International Conference on Applications of Mathematics and Informatics in Natural Sciences and Engineering at the Ilia Vekua Institute of Applied Mathematics (VIAM) of the Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Hierarchical Models for Thermoelastic Kelvin-Voigt Piezoelectric Prismatic Shells. 2019.

მონაწილეობა სეზონურ სკოლებში

1. ზამთრის სეზონური სკოლა „მიკრო- და ნანოსტრუქტურების კვლევის მეთოდები“, სიღნაღი, 2016.
2. შემოდგომის სეზონური სკოლა „Chemical and mathematical aspects of environmental (athmosphere) monitoring“, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, 2016.

მათემატიკური მოდელირება

სოფიო ბლიაძე

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, დოქტორანტი, საერთაშორისო სადოქტორო პროგრამა მათემატიკაში
International Doctoral Program In Mathematics (tsu.ge)

მაქვს ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ბაკალავრის აკადემიური ხარისხი მათემატიკაში და მაგისტრის აკადემიური ხარისხი გამოყენებით მათემატიკაში. ამჟამად ვარ დოქტორანტურის სტუდენტი ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ინგლისურენოვან საერთაშორისო სადოქტორო პროგრამაში. ჩემი ხელმძღვანელები არიან თსუ-ის პროფესორები: გიორგი ჯაიანი, ნატალია ჩინჩალაძე და ბრემენის უნივერსიტეტის პროფესორი რეინჰოლდ კინცლერი (Reinhold Kienzler). მე-4 წელია სამეცნიერო საქმიანობას ვეწევი აკადემიკოს ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტში, სადაც ჩემი შესწავლის საგანი არის წამახვილებული იზოტროპული ღეროს სიმტკიცეზე ანალიზი. იმავდროულად, მე-7 წელია ვსაქმიანობ სახელმწიფო სამხედრო სამეცნიერო ტექნიკურ ცენტრ „დელტაში“, სადაც ვარ სიმტკიცის ჯგუფის უფროსი სპეციალისტი, შესაბამისად, ჩემი ფუნქცია და პასუხისმგებლობაა ნაკეთობის შემოწმება წინასწარ განსაზღვრული დატვირთვებისა და სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით: განვსაზღვრო აკმაყოფილებს თუ არა ზემოაღნიშნული სიმტკიცის პირობას. ასე ვთქვათ, სწორედ აქ ვახდენ მექანიკის რიგი თეორიების პრაქტიკულ რეალიზებას, რადგან შეხება მაქვს რეალურ კონსტრუქციებთან, იქნება ეს მძიმე ჯავშანტექნიკა, არტილერია, თუ პერსონალური დაცვის საშუალებები. სწორედ ამ სამსახურმა განსაზღვრა ჩემი სამეცნიერო ინტერესების სფეროც. აკადემიური საქმიანობის თვალსაზრისით კი დისკრეტული მათემატიკისა და პროგრამული პაკეტი MathLab-ის სალექციო კურსებს ვკითხულობ საქართველოს საავიაციო უნივერსიტეტში. საერთო ჯამში კი ეს გამოცდილება მაძლევს ერთგვარ ფუნდამენტს და მოტივაციას ჩემს სამეცნიერო პროდუქტიულობასთან დაკავშირებით. ინფორმაცია ჩემი სამეცნიერო აქტიურობის შესახებ, კერძოდ მონაწილეობა სამეცნიერო კონფერენციებში და პუბლიკაციები მოყვანილია ამ სტატიის ბოლოს.

ჩემი სამეცნიერო ინტერესების სფერო მოიცავს გამოყენებით მათემატიკას, კერძოდ მექანიკას და ასევე გამოყენებით ინჟინერიას. ვცდილობ ცოდნა გავიფართოვო სწორედ ამ სამეცნიერო დისციპლინებში. აგრეთვე ვფლობ კონსტრუქციების სიმტკიცეზე ანგარიშისათვის შექმნილ რამდენიმე საერთაშორისო კომპლექსურ პროგრამულ პაკეტს NASTRAN, ANSYS, ABAQUS, Femap, რომელთა შექმნასაც საფუძვლად უდევს სამშენებლო მექანიკის ერთ-ერთი უნივერსალური მეთოდი — სასრულ ელემენტთა მეთოდი. სასრულ ელემენტთა მეთოდის არსი მდგომარეობს იმაში, რომ ნებისმიერი უწყვეტი სიდიდე (გადაადგილება, ტემპერატურა, წნევა თუ სხვ.) შეიძლება აპროქსიმირდეს მოდელით, რომელიც შედგება ელემენტებისაგან (უბნებისგან). ცალკეულ უბანზე კი საკვლევი სიდიდე აპროქსიმირდება უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციით. ეს პროგრამები საშუალებას იძლევა ფიზიკური ექსპერიმენტი მაქსიმალურად ჩავანაცვლოთ პროგრამული ექსპერიმენტებით.

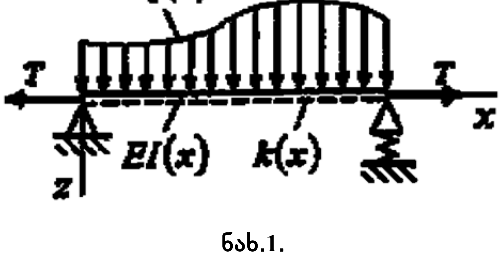
მათემატიკური მოდელების აღწერის შემთხვევაში, ხშირად გვჭირდება შევიმუშაოთ დამატებითი გასამარტივებელი წინადადებები (მოსაზრებები), რომლებიც დაახასიათებს

მოდელისა და შესაბამისი მასალის ცალკეულ თვისებებს. ამით აიხსნება ერთი და იმავე ფიზიკური მოდელისათვის რამდენიმე განსხვავებული მათემატიკური მოდელი. მაგალითად, იზოტროპული ძელის ღუნვაზე ანგარიშისას, საკმარისია განვსაზღვროთ მხოლოდ ნორმალური ძაბვები, რისთვისაც ღუნვის მათემატიკური თეორიით საკმარისია შემოვიტანოთ ბრტყელი კვეთის ჰიპოთეზა, რომლის თანახმად, ძელის განივი კვეთის სიბრტყე დეფორმაციამდე და დეფორმაციის შემდეგ დარჩება სიბრტყედ და იქნება ორთოგონალური ღუნვის ღერძის მიმართ (ტექნიკური თეორია ან ბერნულ-ეილერის თეორია). თუმცა არსებობს ძელის ღუნვის დაზუსტებული თეორია, რომელიც თავის დროზე გამოიკვლია სენ-ვენანმა. თეორიის მიხედვით, როდესაც ძელი დატვირთულია წერტილში მოქმედი ძალებით, ბრტყელი კვეთის ჰიპოთეზა არ სრულდება. მეორე მხრივ, მიღებული შედეგები ზუსტია ძელისათვის, რომლის სიგრძე გაცილებით დიდია, ვიდრე მისი კვეთის გეომეტრიული ზომები.

იზოტროპული, ორთოტროპული ან ანიზოტროპული ფირფიტების და გარსების ქცევის მათემატიკური აღწერისას ასევე გამოიყენება კირხოფ-ლიავის, რაისნერის, ტიმოშენკოს, მინდლინის, კარმანის და სხვათა ჰიპოთეზები. ხშირ შემთხვევაში ამა თუ იმ მათემატიკური მოდელისათვის არსებობს რამდენიმე მეთოდი, რომლითაც შესაძლებელია განხორციელდეს მისი კვლევა. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ არაპრიზმული ძელის დიფერენციალური განტოლება:

$$\left[EI(x)\,w''(x)\right]'' - Tw''(x) + k(x)\,w''(x) = q(x). \quad (1)$$

არაპრიზმული ძელის ღუნვის მათემატიკური მოდელის სქემა მოცემულია ნახ. 1-ზე. ძელზე მოქმედებს q(x) ინტენსივობის დატვირთვა და T ღერძული ძალა. (იხ. ნახ. 1).



ნახ.1.

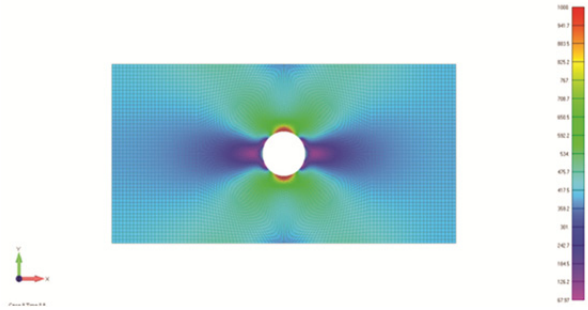
მოცემული მათემატიკური მოდელის ანალიზი, ანუ, (1.) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა, სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით, შესაძლებელია:

1. საწყის პარამეტრთა განზოგადოებული მეთოდით; 2. ვარიაციული მეთოდით; 3. ბადეთა მეთოდით; 4. კოლოკაციის მეთოდით; 5. სასრულ ელემენტთა მეთოდით. სწორედ ამ მეთოდებით ვხელმძღვანელობ, როდესაც ვიკვლევ მსგავსი ტიპის ამოცანებს, რადგან მათემატიკური მოდელის ანალიზისათვის არჩეული მეთოდი, არსებითად განსაზღვრავს ამონახსნების სიზუსტეს.

თავდაპირველად ჩემი კვლევის საგანი იყო წამახვილებული იზოტროპული ღეროს სიმტკიცეზე ანალიზი, რაც თავისთავად გაულისხმობდა კონსოლური მუდმივკვეთიანი პრიზმული ღეროს ოპტიმიზაციას, ეილერბერნულის მოდელზე დაყრდნობით, თუმცა ტოლწინაღობის პირობის გათვალისწინებით. კვლევის შედეგად მასალის ეკონომიას მივიღებთ, თუ ღეროს განივკვეთს მღუნავი მომენტის ცვლილების მიხედვით შევცვლიდით.

ჩემი კვლევის ინტერესია ასევე ფირფიტები, იქნება ეს იზოტროპული თუ კომპოზიტური მასალების შემთხვევა. განხილული მაქვს პერფორირებული შემთხვევაც, სტატიაში (1). რღვევის თეორიის შესწავლისას ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი პრობლემა არის ძაბვათა ველის (ქცევის) შესწავლა, განსაკუთრებით კონცენტრატორების მიდამოში. დიდი პრაქტიკული გამოყენება აქვს ძაბვათა კონცენტრაციების ამოცანების გადაწყვეტას არა მხოლოდ სიხისტეთა მკვეთრი ცვლილების არეში, არამედ ნახვრეტების გარშემო, მით უფრო, თუ მასალა დატვირთვებიდან გამომდინარე ფიზიკურად არაწრფივია. აღნიშნულ სტატიაში (1) განხილულია ერთი ღერძული დატვირთვის ქვეშ მყოფი ფირფიტა ცენტრალური ნახვრეტით.

საილუსტრაციოდ მოვიყვანე ზემოაღნიშნული სტატიიდან (1) მიზეს ეკვივალენტური ძაბვის მნიშვნელობის (case 8. Time 0.8) შემთხვევა, როდესაც მოხდა მასალის პლასტიკური დენადობა (მისმა ძაბვის მნიშვნელობამ გადააჭარბა დენადობის ზღვარს), ასევე წრიული ფორმის ფირფიტები.



/მოდელი აგებულია საანგარიშო პროგრამა FemAP-ში/

ისინი ერთ-ერთ ფართოდ გავრცელებულ ფირფიტებს წარმოადგენს მართკუთხა ფირფიტების შემდეგ. კერძოდ, მისი ფართოდ გამოყენების სფეროს წარმოადგენს თვითმფრინავმშენებლობა (ლუკები). რაც შეეხება მის ჩამაგრებას კონტურზე, ფართოდ გავრცელებულია ხისტი ჩამაგრება. კვლევის მიზანს წარმოადგებს სწორედ ასეთი სახის ფირფიტების ანალიზი სიმტკიცეზე. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მიღებულია ჩაღუნვის ფუნქციის ანალიზური მნიშვნელობა და მღუნავ მომენტთა აღმწერი გამოსახულებები.

ლიტერატურა

1. Ryder G. H. , Strength of Materials. MACMILLAN. 1969.
2. James M. Gere, Mechanics of materials. Thomson. 2004.
3. ჯაიანი გ. უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2004.
4. ბლიაძე ს., სესკურია ზ., ჯაფარიძე კ., კონსტრუქციების მოდელირება და სტრუქტურული ანალიზი MSC/NASTRAN v.4-ში, გამომცემლობა „თბილისი“, 2008.
5. შანშიაშვილი ა. მასალათა გამძლეობა, გამომცემლობა „ცოდნა“, 1969.
6. R. Kienzler, P. Schnieder, Second-order linear plate theories: parial differential equations, stress results and displacement, International journal of solids and structures, 2017.

პუბლიკაციები საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალში „საჰაერო ტრანსპორტი“

1. ჯაიანი გ., ბლიაძე ს., Modelling perforated plate with software complex Femap, 2019.
2. ყიფიანი დ., ბლიაძე ს., ბლიაძე ნ., Analysis of having transversal and longitudinal stiffness rib plate by finite element method, 2016.
3. ყიფიანი დ., ბლიაძე ს., ბლიაძე ნ., The method of calculation the integral of Mori, 2015.
4. ბლიაძე ს., ბლიაძე ნ., Properties of some periodic functions, 2014.

მოხსენებები კონფერენციებზე

1. 10th annual international annual meeting of the Georgian mechanical union, Modeling perforated plate with software complex Femap, თელავი, 2019.
2. 4th international conference on applications of mathematics and informatics, Analyses on strength of isotropic cusped beam, თბილისი, 2019.
3. მე-6 ყოველწლიური სტუდენტური კონფერენცია ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში. წამახვილებული იზოტროპული ღეროს სიმტკიცეზე ანალიზი, თბილისი, 2018.
4. მე-10 ღია სტუდენტური სამეცნიერო-ტექნიკური კონფერენცია. განივი და გრძივი სიხისტის წიბოების მქონე ფირფიტის ანგარიში სასრულ ელემენტთა მეთოდით, თბილისი, 2016.
5. მე-9 ღია სტუდენტური სამეცნიერო-ტექნიკური კონფერენცია. მორის ინტეგრალის გამოთვლის ერთი მეთოდის შესახებ, თბილისი, 2015.
6. მე-8 ღია სტუდენტური სამეცნიერო-ტექნიკური კონფერენცია. პერიოდული ფუნქციების თვისებების შესახებ, თბილისი, 2014.

ინსტრუქცია ავტორებისთვის

1. სტატია აკრეფილი უნდა იყოს Sylfaen-ში, შრიფტის ზომა 11, სტრიქონებს შორის ინტერვა-ლი 1,5, სიტყვებს შორის 1 ინტერვალი, გვერდის Margins – Normal.
2. სტატია ფორმდება შემდეგნაირად: სტატიის სათაური (შრიფტის ზომა 14 Bold), სახელი და გვარი (შრიფტის ზომა 12 Bold), წოდება, თანამდებობა, სამუშაო ადგილი (შრიფტის ზომა 11). ავტორ(ებ)ის/მთარგმნელ(ებ)ის ფოტოსურათი თავსდება სათაურის გვერდით, მარჯვენა მხარეს.
3. ფორმულები და სიმბოლოები იკრიფება Microsoft Eq.-ით. თუ ფორმულა ორ სტრიქონს იკა-ვებს, უნდა გაიყოს (რედაქტირების გაადვილების მიზნით).
4. ქვესათაური გამოიყოფა იმავე ზომის Bold შრიფტით. ტექსტი გრძელდება იმავე სტრი-ქონზე.
5. აბზაცისათვის გამოიყენება Tab.
6. ნახატები, ნახაზები, ცხრილები და სხვა არატექსტური გამოსახულებები წარმოდგენილი უნდა იყოს მაღალი გარჩევადობის ნახატის ტიპის ჩანართებით; უნდა იყოს გადანომრილი. შესაბამისი მითითება გაკეთდება ტექსტში (შინაარსობრივი და ვიზუალური მხარის კორექ-ტირებისათვის). გრაფიკულ გამოსახულებაზე, მაგ. ნახ. 1, წარწერა კეთდება 10 ზომის შრიფტით.
7. ლიტერატურის ციტირება ხდება ქრონოლოგიურად (და არა ავტორის გვარების ალფაბე-ტის შესაბამისად): სტატიის ბოლოს, შუაში, იწერება — ლიტერატურა, [] სიმბოლოში იწერე-ბა ნომერი (ასეთივე აღნიშვნა იხმარება ტექსტში), გვარი და ინიციალები, წიგნის, სტატიის (ან ინტერნეტრესურსის მისამართი) სრული ბიბლიოგრაფიული მონაცემები: გამომცემ-ლობა (წიგნის შემთხვევაში), ტომი, ნომერი, გვერდები, წელი. ლიტერატურის მითითება ხდება იმ ენაზე, რომელი წყაროთიც ავტორი სარგებლობდა.
8. ტექსტური ჩანართები გაკეთდეს Tex Box-ის საშუალებით. რომელშიც, ისევე, როგორც მთელ ტექსტში, კიდეები სწორდება მარჯვნივ და მარცხნივ, ფორმატირების საშუალებით.
9. Word ფაილთან ერთად ავტორმა უნდა წარმოადგინოს pdf ფაილიც, რითაც მიანიშნებს რედაქტორს სტატიის ვიზუალურ მხარეზე (აქ იგულისხმება, რომ ჩანართებმა არ უნდა და-იკავოს გვერდის მნიშვნელოვანი ნაწილი, ე.ი. ნახატის ტიპის ჩანართები არ უნდა იყოს დი-დი ან ბევრი; არ უნდა დარჩეს გვერდზე, ტექსტის გარეშე, ბევრი თავისუფალი ადგილი).
10. გვერდები არ ინომრება.
11. ტექსტში თეორემა, დებულება, განმარტება ან სხვა მნიშვნელოვანი ცნება (ავტორის შეხე-დულებისამებრ) გამოიყოფა Italic-ით. შრიფტის განსხვავებული ფერი ტექსტში არ იხმარება.
12. თეორემის, დებულების დამტკიცების დაწყება ან დამთავრება რაიმე ნიშნით არ გამო-იყოფა.
13. სტატიას ბოლოში, მარჯვენა კუთხეში, 10 ზომის შრიფტით უნდა მიეთითოს ავტორის ელექ-ტრონული მისამართი; კორპორაციული ელექტრონული ფოსტის გამოყენება სავალდებუ-ლოა თსუ-ის თანამშრომლებისთვის.

გამომცემლობის რედაქტორი **მარინე ვარამაშვილი**

გარეკანის დიზაინერი **მარიამ ებრალიძე**

დამკაბადონებელი **ლალი კურდღელაშვილი**

0179 თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 14
14, Ilia Tchavtchavadze Ave., Tbilisi 0179
Tel: +995 (32) 2250484, 6284; 6278
www.press.tsu.edu.ge

ISSN 2298-0938