მათემატიკა

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი

№9 **2023**

ივანე ჯავახიშვილის
სახელობის თბილისის
სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო
მეცნიერებათა
ფაკულტეტი

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

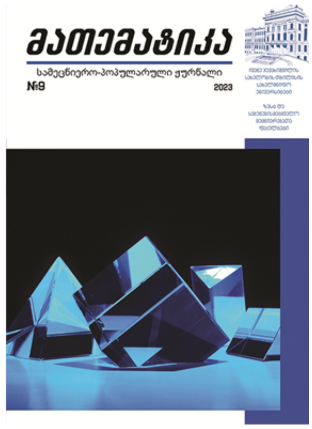
მათემატიკა

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი
მასწავლებლებისა და მოსწავლეებისთვის

დაარსდა 2013 წელს;
მიეძღვნა ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
95 წლის იუბილეს.

ჩვენი მიზანია მასწავლებლებსა და მოსწავლეებში მათემატიკური ცოდნის პოპულარიზაცია, მათემატიკის მასწავლებელთა პროფესიული ზრდის ხელშეწყობა, მოსწავლეთა ჩართვა მათემატიკის ლამაზ სამყაროში მოგზაურობისა და საინტერესო ამოცანების ამოხსნის პროცესში; მოგაწვდით ინფორმაციას ჩვენი წარმატებული კურსდამთავრებულების საქმიანობისა და მომავალი სტუდენტების პერსპექტივების შესახებ.

უნივერსიტეტის
გამომცემლობა



სარჩევი

სარჩევი

ჟურნალი „მათემატიკა“

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი „მათემატიკა“ დაარსდა 2013 წელს, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის 95 წლის იუბილესთან დაკავშირებით, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის საბჭოს გადაწყვეტილებით. ჟურნალის შექმნის იდეა ფაკულტეტის დეკანს — რამაზ ბოჭორიშვილს ეკუთვნის.

ჟურნალის მთავარი რედაქტორია თეიმურაზ ვეფხვაძე, მთავარი რედაქტორის მოადგილე — ომარ ფურთუხია.

ჟურნალში რამდენიმე განყოფილებაა, რომლებსაც სარედაქციო საბჭოს წევრები ხელმძღვანელობენ: „მათემატიკური სკოლები“ (ომარ ფურთუხია) — წარმოაჩენს იმ ქართველ მეცნიერებს, რომლებმაც დიდი წვლილი შეიტანეს ქართული მათემატიკური სკოლების ჩამოყალიბებასა და განვითარებაში; „ქართველი ავტორები“ (გია გიორგაძე) — პოპულარულ ენაზე გადმოიცემა მასალა მათემატიკური ცნებებისა და პრობლემების წარმოშობისა და განვითარების შესახებ; „თარგმანი“ (ილია თავხელიძე) — უცხოელი ავტორების სამეცნიერო-პოპულარული სტატიები; „მეთოდიკა“ (თეიმურაზ ვეფხვაძე, ქეთევან შავგულიძე) — მასალა, რომელიც ხელს შეუწყობს მასწავლებელთა პროფესიულ ზრდას; „მოსწავლეები“ (თენგიზ კოპალიანი, ბეჟან ღვაბერიძე) — მასალა, რომელიც განკუთვნილია მოსწავლეებში მათემატიკის პოპულარიზაციისთვის; მათემატიკური ოლიმპიადების მიმოხილვა, საინტერესო ამოცანები მოსწავლეებისთვის; „სტუდენტები“ (თინათინ დავითაშვილი) — წარმოაჩენს მათემატიკის დეპარტამენტის წარმატებულ სტუდენტებს; „კურსდამთავრებულები“ (როლანდ ომანაძე) — წარმოგვიდგენს მათემატიკის დეპარტამენტის წარმატებულ კურსდამთავრებულებს; „თსუ“ (რამაზ ბოჭორიშვილი, თინათინ დავითაშვილი) — დაეხმარება ახალგაზრდებს სამომავლო კარიერის დაგეგმვაში; იბეჭდება მასალა, რომელიც აღწერს სასწავლო პროგრამებს, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში ჩატარებულ საინტერესო ღონისძიებებს; რუბრიკით „ჩვენი ამაგდარი პედაგოგები“ წარმოგიდგენთ ჩვენს ღვაწლმოსილ პროფესორებს.

ჟურნალი იღებს სტატიებს ჩამოთვლილი განყოფილებების მიხედვით და დადებითი რეცენზიის მიღების შემთხვევაში იბეჭდება. სტატიის წარმოდგენისას ავტორებმა უნდა დაიცვან მათთვის განკუთვნილი ინსტრუქციის მოთხოვნები.

რა არის მათემატიკური ალბათობა?

ანა დანელია

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის ასისტენტ-პროფესორი

ალბათობის თეორია მათემატიკური მეცნიერების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი დარგია, რომელიც გვეხმარება ბუნებაში არსებული მოვლენებისა და მიმდინარე პროცესების თვისებრივ და რაოდენობრივ აღწერა-შესწავლაში.

მიუხედავად ჩვენ გარშემო არსებული მოვლენებისა და პროცესების უდიდესი მრავალნაირობისა, გარკვეული თვალსაზრისით ისინი ორ დიდ ჯგუფად შეიძლება დავყოთ: დეტერმინისტულ და შემთხვევით მოვლენებად და პროცესებად. ქვა რომ ავწიოთ დედამიწიდან და ხელი გავუშვათ, ის აუცილებლად დავარდება დედამიწაზე (მსოფლიო მიზიდულობის კანონი დეტერმინისტულია). მაგრამ არსებობს მოვლენები, რომელთათვისაც ვერ ხერხდება ისეთი პირობების დადგენა, რომლებიც უზრუნველყოფენ მოვლენების აუცილებლად მოხდენას. ასეთ მოვლენებს შემთხვევით ხდომილებებს ვუწოდებთ. წარმოვიდგინოთ ასეთი ცდა: ავაგდოთ მონეტა და დავაფიქსიროთ, დავარდნის შემდეგ რომელი მხარე აღმოჩნდება ზემოდან „გერბი" თუ „საფასური". ეს შემთხვევითი ცდაა, ვინაიდან მისი შედეგი შემთხვევითია, რადგან ვერ დავასახელებთ პირობებს, რომლებიც ცალსახად უზრუნველყოფენ შედეგს.

სწორედ შემთხვევით ხდომილებებთან და შემთხვევით პროცესებთან დაკავშირებული კანონზომიერებების შესასწავლად გამოიყენება ალბათობის თეორია. რა არის მათემატიკური ალბათობა?

შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ალბათობა ფუნქციაა, ოღონდ ისეთი კი არა, როგორიც, მაგალითად, ლოგარითმია, რომლის არგუმენტები რიცხვებია. ალბათობის არგუმენტები შემთხვევითი ხდომილებებია — ყოველ ხდომილებას თავისი ალბათობა უნდა ჰქონდეს.

ალბათობის ცნება დისკრეტული ალბათობის თეორიაში. დისკრეტული ალბათობის თეორია ისეთ შემთხვევითობებთან დაკავშირებულ ამოცანებს შეისწავლის, რომელთათვისაც ყველანაირ შესაძლო შედეგთა სიმრავლე სასრულია ან თვლადია.

ალბათობა, როგორც ხდომილებათა ფუნქცია, აღვნიშნოთ P ასოთი. უნდა განისაზღვროს ფუნქცია P, ე.ი. წესი, რომლითაც გამოითვლება რიცხვი P(A) მოცემული სიმრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლისათვის. $P(\varnothing)=0$ და $P(\Omega)=1$. ყველა დანარჩენ ხდომილებათა ალბათობების განსაზღვრისათვის საჭიროა დამატებითი ინფორმაცია შემთხვევითი ცდის შესახებ.

წყვილს (Ω, P) ამოცანის ალბათური მოდელი ეწოდება. შევნიშნოთ, რომ ალბათური მოდელი ამოცანის მიხედვით ცალსახად არ განისაზღვრება, ანუ ერთი და იგივე ამოცანა სხვადასხვა ალბათური მოდელით შეიძლება ამოიხსნას.

ჩვეულებრივ იგულისხმება, რომ მათემატიკური მეთოდებით მხოლოდ ისეთ შემთხვევით ცდებთან დაკავშირებული ამოცანები შეიძლება შევისწავლოთ, რომლებიც შემდეგ ორ მოთხოვნას აკმაყოფილებენ:

ა) **არაეგზოტიკურობა**, რაც იმას ნიშნავს, რომ შესაძლებელი უნდა იყოს (თეორიული

მოაზრებით მაინც) შემთხვევითი ცდის n-ჯერ გამეორება ერთსა და იმავე პირობებში და ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად ყოველი ნატურალური n რიცხვისთვის;

ბ) **სიხშირეთა მდგრადობა**, რაც იმას ნიშნავს, რომ შემთხვევით ცდასთან დაკავშირებული ნებისმიერი ხდომილების მოხდენის სიხშირე ამ ცდის n-ჯერ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად გამეორებისას დასაწყისში შეიძლება ცვალებადობდეს, მაგრამ n-ის ზრდასთან ერთად ამ ხდომილებაზე დამოკიდებულ გარკვეულ რიცხვს უნდა უახლოვდებოდეს (რაიმე ხდომილების მოხდენის სიხშირე, ცხადია, უნდა გავიგოთ როგორც ცდის n-ჯერ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად გამეორებისას ამ ხდომილების მოხდენათა რაოდენობის შეფარდება n-თან). ბუნებრივია, რომ რიცხვი, რომელსაც ხდომილების სიხშირე უნდა უახლოვდებოდეს, ამ ხდომილების ალბათობად მივიჩნიოთ. ალბათობის ასეთი გაგება ერთ-ერთი გზაა ალბათობის მათემატიკური ცნების გააზრებისთვის, მაგრამ არა ერთადერთი და არა მთლად გამართული ლოგიკური თვალსაზრისით. ხდომილების ალბათობის ასეთი გაგება დაკავშირებულია ალბათობის თეორიის ერთ-ერთ ძირითად დებულებასთან, რომელსაც დიდ რიცხვთა კანონი ეწოდება.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ალბათობის არგუმენტები შემთხვევითი ხდომილებებია — ყოველ ხდომილებას თავისი ალბათობა უნდა ჰქონდეს. ალბათობები, ანუ ალბათური ფუნქციები, ცხადია, ბევრია, ისევე როგორც მათემატიკურ ანალიზში ლოგარითმის გარდა კიდევ უამრავი სხვა ფუნქციაც არსებობს სხვადასხვა საჭიროებისათვის. მაგრამ ხდომილებათა კლასზე განსაზღვრული ყოველნაირი ფუნქცია ალბათობა არ არის. ალბათურ ფუნქციებს გარკვეული თვისებები უნდა ჰქონდეთ. უფრო მეტიც, ხდომილებათა კლასსაც სპეციალური თვისებები უნდა გააჩნდეს იმისათვის, რომ მასზე ალბათური ფუნქციების განსაზღვრა შესაძლებელი იყოს. სწორედ აქაა ის თეორიული სირთულეები, რომელთა გადალახვა ერთბაშად ძნელია და ამიტომ საფეხურებრივი მიდგომა უფრო გამართლებული ჩანს. ალბათობის ცნების გასარკვევად ჯერ ხდომილებებზე უნდა ვთქვათ ცოტა მეტი. წარმოვიდგინოთ რაიმე შემთხვევითი ცდა. სიტყვა „ცდა“ აქ მხოლოდ რაიმე მოვლენაზე უბრალო დაკვირვებას და შედეგის აღნუსხვას ნიშნავს. „შემთხვევითი“ კი იმას ნიშნავს, რომ შედეგი წინასწარ გარკვეული არაა და არც შეიძლება იყოს, ერთსა და იმავე პირობებში ცდის გამეორებისას შედეგები სხვადასხვა შეიძლება იყოს. ასე ვთქვათ, მიზეზი უშუალოდ და პირდაპირ არ განსაზღვრავს შედეგს. შემთხვევითი ცდის ყველა შესაძლო შედეგთა სიმრავლე ჩვეულებრივ აღინიშნება Ω ასოთი, მისი ელემენტები — ω ასოთი, $\omega \in \Omega$.

ცხადია იგულისხმება, რომ სხვადასხვა ω-ები ცდის სხვადასხვა შესაძლო ელემენტარულ შედეგს აღნიშნავს, ანუ არც ერთი ω „დაშლადი“ არ არის — არ წარმოიდგინება რაიმე სხვა შედეგების საშუალებით. ასეთ ω-ს, ანუ ცდის ყოველ ელემენტარულ შესაძლო შედეგს ელემენტარული ხდომილება ეწოდება. ამგვარად, Ω ელემენტარულ ხდომილებათა სიმრავლეა, მისი ელემენტები არც რიცხვებია, არც ვექტორები, არც სხვა რაიმე ტრადიციული მათემატიკური ობიექტები, Ω აბსტრაქტული სიმრავლეა. განვიხილოთ შემდგი შემთხვევითი ცდის მაგალითი: ვთქვათ ექსპერიმენტი ნიშნავს სიმეტრიული მონეტის აგდებას. ვაკვირდებით, რა „მოდის“ დავარდნილ მონეტაზე. ამ ექსპერიმენტის შედეგებია; „გერბის მოსვლა“ (გ) და „საფასურის მოსვლა“ (ს). ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება $\Omega = \{ს, გ\}$.

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი: აგორებენ ორ კამათელს. ყოველ მოსალოდნელ შედეგს შევუსაბამოთ რიცხვთა წყვილი (i, j), სადაც i პირველ კამათელზე მოსასვლელი რიხვია, ხოლო j- მეორეზე. ამ ცდისათვის ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეა:

$$\Omega = \begin{matrix} \{(1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6)\} \end{matrix}$$

ზემოთ აღნიშნული საფეხურებრივი მიდგომა ალბათობის ცნებისადმი და, მაშასადამე, ალბათობის თეორიის სწავლების საკითხისადმი, Ω სიმრავლის სიმძლავრის მიხედვით უნდა მოხდეს. პირველი საფეხური შეესაბამება იმ შემთხვევებს, როდესაც Ω სასრული სიმრავლეა, ე.ი. შეიცავს რაღაც n რაოდენობის ω ელემენტებს: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$, n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი შეიძლება იყოს 1-დან დაწყებული, ω_i ელემენტების დალაგების რიგს მნიშვნელობა არა აქვს. მეორე და მესამე საფეხურებისთვის Ω უსასრულო სიმრავლეა, ე.ი. შემთხვევითი ცდის ყველა (ურთიერთგამომრიცხავ) შესაძლო შედეგთა სიმრავლე ანუ ელემენტარულ ხდომილებათა სიმრავლე არაა სასრული. მაგრამ უსასრულო სიმრავლეები ერთმანეთისაგან განსხვავდება მათში შემავალ ელემენტთა „რაოდენობის“ მიხედვით. ყველაზე „ნაკლებად უსასრულო“ თვლადი სიმრავლეებია, რაც იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერ უსასრულო სიმრავლეს თვლადი ნაწილი ანუ თვლადი ქვესიმრავლე გააჩნია. თვლადი ისეთ სიმრავლეს ეწოდება, რომელშიც „იმდენივე ელემენტია“, რაც ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში {1,2,...}. ამიტომ თუ Ω თვლადია, მისი ელემენტები შეგვიძლია გადავნომროთ ანუ მიმდევრობის სახით ამოვწეროთ: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots\}$, ელემენტების დალაგების რიგს მნიშვნელობა არა აქვს. მეორე საფეხურს სწორედ თვლადი Ω-ების შემთხვევა წარმოადგენს. თუ უსასრულო სიმრავლე თვლადი არ არის — ასეთია მაგალითად, ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე — მაშინ ის ვერ ჩაიწერება მიმდევრობის სახით, ნომრების სიმრავლე ანუ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე „არ ეყოფა“ ყველა ელემენტს Ω-დან. ამ თვალსაზრისით, რომელსაც გადამწყვეტი მნიშვნელობა აქვს ალბათობის თეორიისათვის, თვლადი სიმრავლეები (და მხოლოდ თვლადი სიმრავლეები) ემსგავსება სასრულ სიმრავლეებს: ორივე შემთხვევაში სიმრავლის ელემენტები შეგვიძლია ამოვწეროთ მიმდევრობის სახით, რომელიც ერთ შემთხვევაში სასრული მიმდევრობა იქნება, მეორეში — უსასრულო. შესაბამისად, ორივე შემთხვევაში თეორიის აგებისათვის საკმარისია მათემატიკური ანალიზის შედარებით ელემენტარული ნაწილი. სწორედ ამიტომ და აქედან გამომდინარე მიზეზების გამო ბუნებრივია, რომ პირველი და მეორე საფეხურის ალბათობის თეორიები გავაერთიანოთ და ერთად შევისწავლოთ საერთო სათაურით „დისკრეტული ალბათობის თეორია“. მესამე საფეხურს კი, რომელსაც არათვლად ელემენტარულ ხდომილებათა სიმრავლეებთან აქვს საქმე, და რომელსაც მოცემულ სტატიაში არ შევეხებით, დავარქვათ „უწყვეტი ალბათობის თეორია“.

ახლა გადავიდეთ ალბათობის განსაზღვრაზე და დავიწყოთ ალბათობის ძირითადი თვისებების შესწავლა დისკრეტული ალბათობის თეორიის მოდელში. გავიხსენოთ, რომ დისკრეტული ალბათობის თეორია ისეთ შემთხვევითობებთან დაკავშირებულ ამოცანებს შეისწავლის, რომელთათვისაც ყველანაირ შესაძლო შედეგთა სიმრავლე სასრულია ან თვლადი უსასრულობაა.

გადავიდეთ ალბათობის განსაზღვრაზე. ალბათობა, როგორც ხდომილებათა ფუნქცია, აღვნიშნოთ P ასოთი. უნდა განისაზღვროს ფუნქცია P, ე.ი. წესი, რომლითაც გამოითვლება რიცხვი P(A) მოცემული Ω სიმრავლის ნებისმიერი A ქვესიმრავლისათვის. ყოველი Ω-სთვის მის ორ ქვესიმრავლეს ანუ ორ ხდომილებას განსაკუთრებული შინაარსი აქვს — ესაა ცარიელი სიმრავლე, რომელიც ჩვეულებრივ აღინიშნება ∅ სიმბოლოთი და მთელი Ω. მათი ალბათური შინაარსი აშკარაა, პირველი ნიშნავს შეუძლებელ ხდომილებას (რაკი არცერთი ω არ უწყობს მას ხელს), მეორე — აუცილებელ ხდომილებას (რაკი ყველა ω უწყობს მას ხელს). ვინაიდან შეუძლებელ ხდომილებას არცერთი ω არ უწყობს ხელს, მისი ალბათობა ნულის ტოლად უნდა მივიჩნიოთ. რაც შეეხება აუცილებელი ხდომილების ალბათობას, ცხადია, რომ ის არცერთი სხვა ხდომილების ალბათობაზე ნაკლები არ უნდა იყოს. ბუნებრივია, და ეს საყოველთაოდ მიღებულიცაა, რომ მისი რიცხვითი მნიშვნელობა ერთის ტოლად მივიღოთ (სინამდვილეში არა მარტო ბუნებრივია, არამედ აუცილებელიცაა). მაშასადამე, $P(\varnothing)=0$ და $P(\Omega)=1$. სინამდვილეში არც ∅ და არც Ω შემთხვევითი ხდომილება არაა, ორივე დეტერმინისტული ხდომილებაა — ერ-

თი ნამდვილად არ მოხდება, მეორე ნამდვილად მოხდება. მათი ჩართვა შემთხვევით ხდომილებათა კლასში შეთანხმების საკითხია. ასეთი შეთანხმებები, რომლებიც შინაარსობრივად არაფერს არ ცვლის და გადმოცემის ფორმას კი ამარტივებს, ხშირად გამოიყენება მათემატიკაში (გავიხსენოთ ცარიელი სიმრავლის ცნება).

ყველა დანარჩენ ხდომილებათა ალბათობების განსაზღვრისათვის საჭიროა დამატებითი ინფორმაცია შემთხვევითი ცდის შესახებ, ანუ იმ ამოცანის შესახებ, რომელთანაც ამ შემთხვევით ცდას ვაკავშირებთ. კერძოდ, საჭიროა ვიცოდეთ არა მარტო ცდის შესაძლო შედეგები $\omega_1, \omega_2, \ldots$, არამედ აგრეთვე ყოველი მათგანის მოსალოდნელობის ზომა, გამოხატული რიცხვით, ანუ ალბათობები $P(\omega_1), P(\omega_2), \ldots$ დისკრეტულ ალბათობის თეორიაში ამ რიცხვების ცოდნა საკმარისია ნებისმიერი ხდომილების ალბათობის გამოსათვლელად, როგორც ეს ქვემოთ მოცემული განსაზღვრებიდან ჩანს. უწყვეტ თეორიაში ეს ასე არ არის. უფრო მეტიც, შესაძლებელია ყოველი ელემენტარული ხდომილების ალბათობა ნული იყოს რაც, ცხადია, გამორიცხავს იმას, რომ უწყვეტ თეორიაში ხდომილებათა ალბათობები განისაზღვრებოდეს ელემენტარულ ხდომილებათა ალბათობებით (აქ სურათი იმის მსგავსია, რაც მონაკვეთის სიგრძის განსაზღვრასთანაა დაკავშირებული: მონაკვეთი წერტილების გაერთიანებაა, ყოველი წერტილის „სიგრძე“ ნულის ტოლია, მაგრამ მონაკვეთის სიგრძე არაა ნული). დისკრეტულ შემთხვევაში კი ყოველი ხდომილების ალბათობა მარტივად განისაზღვრება ელემენტარულ ხდომილებათა ალბათობებით. ვიდრე უშუალოდ განსაზღვრებაზე გადავიდოდეთ, გავიხსენოთ, რომ A ხდომილების მოხდენა ნიშნავს ერთ-ერთი ისეთი $\omega \in \Omega$ ელემენტარული ხდომილების მოხდენას, რომელიც შედის A სიმრავლეში. სწორედ ამის გამო ვუწოდეთ A ხდომილების ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილებები იმ ელემენტარულ ხდომილებებს, რომლებისგანაც შედგება A ხდომილება.

განსაზღვრება 1. დისკრეტულ ალბათობის თეორიაში ელემენტარულ ხდომილებათა სიმრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლე ხდომილებაა. მისი ალბათობა ტოლია მის ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა ალბათობების ჯამის, ანუ

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) . \tag{1}$$

შენიშვნა 1. ვინაიდან შეუძლებელი ხდომილების ალბათობა არცერთი ხდომილების ალბათობაზე მეტი არ უნდა იყოს და, მეორე მხრივ, აუცილებელ ხდომილებას ყველა ელემენტარული ხდომილება უწყობს ხელს, ფორმულა (1)-ში მონაწილე $P(\omega)$ რიცხვები, შესაბამისად, შემდეგ ორ პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს:

1) $0 \le P(\omega) \le 1$ ყველა ω-სთვის Ω-დან,

2) $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$.

შენიშვნა 2 (ალბათობის კლასიკური განსაზღვრება). წინა შენიშვნიდან პირდაპირ გამომდინარეობს, რომ იმ შემთხვევაში, თუ ყველა ელემენტარულ ხდომილებათა საერთო რაოდენობა სასრული n რიცხვია და ყველას ერთი და იგივე ალბათობა აქვს, მაშინ ყოველი მათგანის ალბათობა არის 1/n. ამ შემთხვევაში (1) ტოლობა გვეუბნება, რომ ყოველი A ხდომილების ალბათობა არის n_A / n, სადაც n_A არის A ხდომილებაში შემავალ ელემენტარულ ხდომილებათა საერთო რაოდენობა. ასეთ შემთხვევაში განსაზღვრებას ალბათობის კლასიკური განსაზღვრება ეწოდება.

წყვილს (Ω, P) ამოცანის ალბათური მოდელი ეწოდება. ამოცანის ამოხსნა, ჩვეულებრივ, მისი ალბათური მოდელის გააზრებით უნდა დაიწყოს, თუმცა არის ისეთი ამოცანებიც, რომელთათვისაც ალბათობათა პირდაპირი, უშუალო გამოთვლა უფრო ადვილია, ვიდრე წინასწარ მოდელის აგების გზით ამოხსნა. ახლა მოვიყვანთ ამ ორი საკითხის თითო-თითო საილუსტრაციო მაგალითს.

მაგალითი 1. მონეტას ვაგდებთ გერბზე ორჯერ ზედიზედ დავარდნამდე. მოვძებნოთ ალბათობა იმისა, რომ ცდის დამთავრებას დასჭირდება არაუმეტეს ხუთი აგდებისა.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ გ და ს ასოებით, შესაბამისად, გერბზე და საფასურზე დავარდნა. ცხადია, რომ: ცდა 2 აგდებით დამთავრდება

მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ შედეგი არის გგ; 3 აგდება დაამთავრებს ცდას მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ შედეგი არის სგგ; 4 აგდებით ცდის დამთავრებისთვის შედეგი უნდა იყოს გსგგ ან სსგგ; 5 აგდებით — სგსგგ, გსსგგ ან სსსგგ. ესაა ყველა ის ხდომილება, რომლებიც გვაძლევს ცდის დამთავრებას არაუმეტეს ხუთ აგდებაში. ადვილი მისახვედრია, რომ რაკი მონეტის აგდებებს ერთმანეთთან არანაირი კავშირი არა აქვთ, ამ ხდომილებათა ალბათობები უნდა იყოს, შესაბამისად, 1/4, 1/8, 1/16, 1/16, 1/32, 1/32, 1/32. მაშასადამე, რაკი ეს ხდომილებები ურთიერთგამომრიცხავებია (რატომ არის?), საძებნი ალბათობა არის მათი ალბათობების ჯამი ანუ 19/32.

შემდეგი მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ერთი და იგივე ამოცანა სხვადასხვა მოდელით შეიძლება ამოიხსნას.

მაგალითი 2. n პიროვნება მიუჯდა სიგრძივ განლაგებულ n სკამს შემთხვევითი წესით. გამოვთვალოთ იმის ალბათობა, რომ კონკრეტული 2 პიროვნება a და b ერთმანეთის გვერდით მოხვდა.

ამოხსნა. ვიგულისხმოთ, რომ სკამები დანომრილია. ელემენტარულ ხდომილებებად ავიღოთ n პიროვნების ყველანაირი გადანაცვლება, მათი რაოდენობა არის $n!$. მათ შორის ხელშემწყობია გადანაცვლებები, რომლებშიც a და b ერთმანეთის გვერდით მოხვდება. ასეთი წყვილები შეიძლება დაიწყოს (1,2) ნომრის სკამებიდან და გაგრძელდეს $(n-1, n)$ ნომრის სკამებამდე, მათი რაოდენობა არის $n-1$. ეს რიცხვი უნდა გამრავლდეს ჯერ 2-ზე (ვინაიდან a შეიძლება იყოს როგორც b-ს მარჯვნივ, ასევე მარცხნივ), შემდეგ კიდევ $(n-2)!$-ზე (ვინაიდან დანარჩენი პიროვნებები მათ მიერ დაკავებულ $n-2$ სკამზე შეიძლება მოთავსდნენ $(n-2)!$ სხვადასხვა მიმდევრობით). ამგვარად, სულ $2(n-1)!$ ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილებაა. მაშასადამე, საძებნი ალბათობა არის $2/n$.

ახლა ჩამოვთვალოთ ალბათობის თვისებები. ხშირად ლიტერატურაში სიტყვა „ალბათობა“ ორი სხვადასხვა გაგებით იხმარება. ერთია ალბათობა, როგორც ფუნქცია P, რომელიც ყოველ A ხდომილებას შეუსაბამებს რიცხვს P(A). მეორეა ალბათობა, როგორც რიცხვი P(A), რომელიც არის რომელიმე კონკრეტული A ხდომილების მოხდენის ალბათობა ან, მოკლედ, A-ს ალბათობა. სურათი აქ ისეთივეა, როგორც, მაგალითად, სიტყვა სინუსის შემთხვევაში: როდესაც ლაპარაკობენ სინუსის თვისებებზე, ცხადია, იგულისხმება სინუსი როგორც ფუნქცია, ხოლო როდესაც ამბობენ 90-გრადუსიანი კუთხის სინუსი ერთის ტოლიაო, იგულისხმება ფუნქცია სინუსის ერთი კონკრეტული მნიშვნელობა. თუ გვინდა ხაზი გავუსვათ იმას, რომ ალბათობა გაიგება როგორც ფუნქცია, შეგვიძლია ვთქვათ ალბათური ფუნქცია ნაცვლად ალბათობისა.

ალბათური ფუნქციის პირველი მარტივი თვისებები ჩვენ უკვე აღვნიშნეთ. კერძოდ, აღვნიშნეთ, რომ ყოველი ხდომილების ალბათობა ერთზე ნაკლები ან ტოლი არაუარყოფითი რიცხვია, შეუძლებელი ხდომილების ალბათობა ნულია, აუცილებელი ხდომილების ალბათობა ერთის ტოლია.

ალბათური ფუნქციის მთავარი თვისება არის მისი ადიციურობა. ადიციურობის თვისებას ორი შესაძლო ვარიანტი აქვს: სასრულად ადიციურობა და თვლადად ადიციურობა. სასრულად ადიციურობა იმას ნიშნავს, რომ ყოველი ნატურალური m რიცხვისათვის m რაოდენობის უთავსადი ხდომილებებიდან ერთ-ერთის მაინც მოხდენის ალბათობა მათი ალბათობების ჯამის ტოლია ანუ, თუ $A_iA_j=\varnothing$, $i\neq j,\ i,j=1,2,\dots,m$, მაშინ

$$\begin{aligned} &P(A_1+A_2+\cdots+A_m)= \\ &=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m). \end{aligned} \tag{2}$$

ამ ფაქტს ხშირად ალბათობათა შეკრების თეორემას უწოდებენ. მისი დამტკიცება ადვილად მიიღება ალბათობის განსაზღვრებიდან ანუ ტოლობა (1)-დან. აქვე, ამ თვისების გამოყენებით, მკითხველს ვთავაზობთ შემდეგ ამოცანას: დაამტკიცეთ, რომ ნარდის თამაშის დროს, კამათლებზე მოსულ ციფრთა ჯამი ყველაზე ხშირად არის 7.

რა თქმა უნდა, ფორმულა (2) მართებულია მხოლოდ უთავსადი ხდომილებებისთვის. ახლა ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ალბათობის განმსაზღვრელი ფორმულა (1)-ის გამოყენებით ადვილად მიიღება ორი A და B ხდომილების გაერთიანების ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულა იმ შემთხვევისთვისაც, რო-

ცა ეს ორი ხდომილება არ არის უთავსადი. მართლაც, ყოველი ω-სთვის AB თანაკვეთიდან $P(A \cup B)$-ს გამოსათვლელ ჯამში რიცხვი P(ω) ერთხელ შევა, ვინაიდან, თუ ორ ან მეტ სიმრავლეს საერთო ელემენტი აქვს, ის მათ გაერთიანებაში მხოლოდ ერთხელ შედის (გაიხსენეთ მარტივი ტოლობა $A \cup A = A$), ხოლო P(A) + P(B)-ს გამოსათვლელ ჯამში კი – ორჯერ (ერთხელ P(A)-ს გამოთვლისას, მეორედ P(B)-ს გამოთვლისას). ამიტომ, როგორც ეს ადვილი მისახვედრია, გვექნება ტოლობა

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB), \qquad (3)$$

რომელიც, ბუნებრივია, ტოლობა (2)-ს ემთხვევა $m = 2$-სთვის, თუ $AB = \varnothing$.

ტოლობა (3)-ის უშუალო შედეგია ის, რომ

$$P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$$

ხდომილებათა ნებისმიერი წყვილისათვის. ანალოგიური უტოლობა სამართლიანია და ასევე დამტკიცდება ხდომილებათა ნებისმიერი სასრული ან თვლადი მიმდევრობისათვისაც, ე.ი.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) \le P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

ამ უტოლობით გამოხატულ თვისებას ალბათობის ნახევრად ადიციურობას უწოდებენ. ზოგჯერ მას ბულის უტოლობადაც მოიხსენიებენ.

ცალკე აღნიშვნის ღირსია ადიციურობის თვისება რაიმე A ხდომილებისა და მისი დამატებისათვის $\overline{A}$, რომელიც შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ (რატომ შეგვიძლია?):

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}). \qquad (4)$$

ეს ფორმულა მოხერხებულია და ხშირად გამოიყენება – თუ ერთ-ერთის ალბათობა ვიცით, ან A-ს მოხდენის ან არმოხდენის, მეორის ალბათობას ეს ფორმულა მოგვცემს. ხშირად გამოიყენება აგრეთვე შემდეგი მარტივი ფორმულა (დაამტკიცეთ!):

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}) \qquad (5)$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ალბათობის მთავარი თვისება არის მისი ადიციურობა. ამ ზოგად თვისებასთან ერთად ალბათობას კიდევ მრავალი ცალკეული კონკრეტული თვისება აქვს, რომლებიც ძირითადად ამ ზოგადი თვისების სხვადასხვა გამოვლინებაა ცალკეული სიტუაციებისათვის. ამის სამი მაგალითი ჩვენ ახლა მოვიყვანეთ (3), (4) და (5) თანაფარდობათა სახით. ქვემოთ მოვიყვანთ სავარჯიშოს ფორმით კიდევ ერთ მაგალითს.

ამოცანაზე გადასვლის წინ ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ მკითხველისთვის ცნობილია შემდეგი ორი მარტივი კომბინატორული ფორმულა, რომელთაც მრავალმხრივი გამოყენებები აქვთ (მათ შორის ალბათობის თეორიაშიც):

ა) n ურთიერთგანსხვავებული ელემენტის ყველა შესაძლო თანმიმდევრობით დალაგებათა რაოდენობის გამოსათვლელი ფორმულა. ეს რაოდენობა აღინიშნება n!-ით და განისაზღვრება ფორმულით $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$, ანუ ყველა ნატურალურ რიცხვთა ნამრავლით 1-დან n-ის ჩათვლით.

n! ძალიან სწრაფად იზრდება n-ის ზრდასთან ერთად. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით რამდენიმე რიცხვითი მონაცემის გაცნობით:

3!=6, 5!=120, 7!=5 040, 10!=3 628 800,
15!=1 307 674 368 000.

ბ) ჯუფთებათა რაოდენობის გამოსათვლელი ფორმულა n ელემენტიდან r ელემენტად, რომელიც განისაზღვრება როგორც n ელემენტიდან r ელემენტის აღება ისეთნაირად, რომ აღებული ელემენტების დალაგების რიგს მნიშვნელობა არა აქვს. მაშასადამე, იგულისხმება n-ელემენტიანი სიმრავლის r-ელემენტიანი ქვესიმრავლეების რაოდენობა. ეს რაოდენობა აღინიშნება სიმბოლოთი C_n^r და განისაზღვრება ფორმულით

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

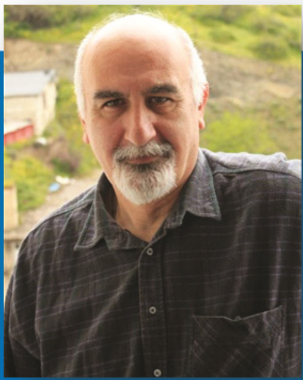
მაგალითი 3. n ბურთულას ვათავსებთ n უჯრაში მათში ბურთულების რაოდენობის შეზღუდვის გარეშე. გამოვთვალოთ იმის ალბათობა, რომ რომელიმე ერთი (მხოლოდ ერთი) უჯრა დარჩება ცარიელი.

ამოხსნა. სავარჯიშოს პირობებით, ყოველი ბურთულა შეიძლება მოხვდეს ნებისმიერ უჯრაში და უჯრებში მოსათავსებელ ბურთულათა რაოდენობაზე არავითარი შეზღუდვა

არ არის. ამიტომ, დათვლის მთავარი წესის მიხედვით, ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა არის n^n. დავთვალოთ, რამდენია მათ შორის ხელშემწყობი, ანუ გვაძლევს ბურთულების განთავსებას სავარჯიშოში მოთხოვნილი პირობით. ასარჩევი გვაქვს უჯრა, რომელიც უნდა დარჩეს ცარიელი და უჯრა, რომელშიც უნდა მოთავსდეს 2 ბურთულა. ეს ორი უჯრა აირჩევა $n(n-1)$ გზით. გარდა ამისა, C_n^2 გზით აირჩევა ორი ბურთულა მათთვის უკვე არჩეულ ერთ უჯრაში მოსათავსებლად. დანარჩენ $n-2$ უჯრაში უნდა მოთავსდეს თითო-თითო ბურთულა (რაკი ცარიელი უჯრა მხოლოდ ერთი უნდა დარჩეს), ეს კი $(n-2)!$ გზით გაკეთდება. ამგვარად, სულ არის $n(n-1)C_n^2(n-2)!=n!C_n^2$ ხელშემწყობი ხდომილება და, მაშასადამე, სავარჯიშოს პასუხია $n^{-n}n!C_n^2$.

შემდეგ სტატიაში განვიხილავთ საინტერესო ამოცანებს, რომლებიც დაგვეხმარება ალბათობის თეორიის უფრო სხვა კუთხით დანახვაში.

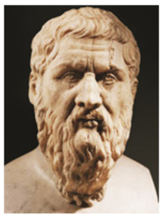
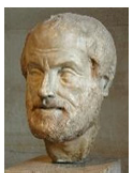
მათემატიკოსი და მათემატიკის შესწავლა

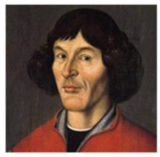
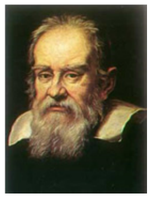


შეაგროვა და თარგმნა ილია თავხელიძემ

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
ასოცირებული პროფესორი;
ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა
ფაკულტეტი, აკადემიკოს ილია ვეკუას პრემიის ლაურეატი;
1984 წ. დაჯილდოებულია უკრაინის მათემატიკოსთა 2009 წლის
ყრილობის, აკადემიკოს ნიკოლოზ ბოგოლიუბოვის
მემორიალური ოქროს მედლით.

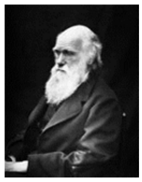
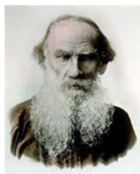
40 წელზე მეტია ვასწავლი თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში. ყოველთვის მაინტერესებდა სხვადასხვა ადამიანის აზრი მათემატიკოსებისა და მათემატიკის შესწავლის მნიშვნელობასა და მეთოდებზე. ამ ორი ცნების შესახებ ახლა შემოგთავაზებთ ჩემ მიერ სხვადასხვა დროს და გარემოებაში შეგროვებულ, ქართულად გადათარგმნილ და ჩაწერილ გამონათქვამებს. აქაა ზოგიერთი გამონათქვამი, რომელსაც მე ხანდახან არც კი ვეთანხმები (ზოგჯერ კატეგორიულად), მაგრამ მკითხველმა უნდა იცოდეს ამ ულამაზესი მეცნიერების შესახებ გამოთქმული სხვადასხვა მოსაზრება. ამ მხრივ განსაკუთრებით საინტერესოა არამათემატიკოსებისს მოსაზრებები. წინა ნომრებში შემოგთავაზეთ გამონათქვამები მათემატიკის, გეომეტრიის, რიცხვისა და დამტკიცების შესახებ. შემდგომ ვაპირებ წარმოგიდგინოთ ასეთივე კოლექციები: მათემატიკური კანონზომიერების, მათემატიკური დარგებისა და სხვათა შესახებ. სამწუხაროდ, ამ გამონათქვამებს აკლია ციტირება, მაგრამ ჩვენი მკითხველი მგონი მომიტევებს. ასევე მოხარული ვიქნები, თუ ჩვენს ჟურნალს გაამდიდრებთ ჩემ მიერ ვერმოძიებული ციტატებით.

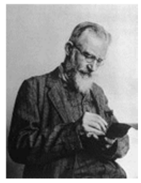
1. მე თითქმის არ შემხვედრია მათემატიკოსი, რომელსაც მსჯელობის უნარი ჰქონია; 2. ნუთუ ვერ ამჩნევ, რომ მათემატიკისადმი მიდრეკილი ადამიანი დახვეწილია ბუნების შემსწავლელ ყველა მეცნიერებაში? 3. მათემატიკის შესწავლა გვაახლოებს უკვდავ ღმერთებთან.	**პლატონი** 429-347 ძვ.წა	
1. თუმც მათემატიკოსი თავისებურად სარგებლობს ზოგადი დებულებებით, მაგრამ მათემატიკის საწყისები უნდა გამოიკვლიოს ფილოსოფიის საწყისებმა; 2. პითაგორელები იყვნენ პირველები, ვინც მათემატიკური მეცნიერებების დაუფლების შედეგად წინ წასწიეს ეს მეცნიერება და ჩათვალეს მათემატიკა ყველაფრის საწყისად; 3. ჩვენ სიამოვნებით შევიმეცნებთ მათემატიკას... ის აღგვაფრთოვანებს, როგორც ლოტოსის ყვავილი.	**არისტოტელე** 384-322 ძვ.წა	

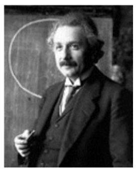
კეთილი ქრისტიანი უნდა უფრთხილდეს მათემატიკოსს და ყველას, ვინც წინასწარმეტყველებს. საშიშროება უკვე არსებობს, რომ მათემატიკოსებმა დადეს შეთანხმება ეშმაკთან სულის დაბნელებისა და ადამიანის ჯოჯოხეთის ბორკილებში ჩაკეტვის შესახებ.	**ნეტარი ავგუსტინი** (ავრელიუს) 354-430	
1. დაე, არავინ, ვინც არ არის მათემატიკოსი, არც კი გაბედოს ჩემი შრომების წაკითხვა; 2. ის, ვინც აძაგებს მათემატიკურ მეცნიერებათა ჭეშმარიტებას და იკვებება ბუნდოვანებით, არასოდეს შეეცდება სოფისტ მეცნიერებთან შეკამათებას — მეცნიერებები, რომლებიც გვასწავლიან მხოლოდ მუდმივ ყვირილს.	**ლეონარდო და ვინჩი** 1452-1519	
1. მათემატიკოსები წერენ მათემატიკოსებისთვის; 2. ...იმიტომ არ მინდოდა თქვენი უწმინდესობისთვის დარჩენილიყო დაფარული ერთადერთი რამ, რამაც მიბიძგა ზეციური სხეულების მოძრაობების გაანგარიშებისკენ. ვიცოდი, რომ სხვა ხერხების ძიებისას მათემატიკოსები არავითარ შემთხვევაში არ დაეთანხმებოდნენ არსებულ გამოკვლევას.	**ნიკოლოზ კოპერნიკი** 1473-1543 ასტრონომი	
ჩვენ ვსწავლობთ: ისტორიიდან — სიბრძნეს, პოეზიიდან — გონებამახვილობას, მათემატიკიდან — გამჭრიახობას.	**ფრენსის ბეკონი** 1561-1626	
1. რა კავშირი აქვს ფილოსოფიას რაიმეს გაზომვასთან? სწორედ მათემატიკოსებს უნდა ენდოთ და ისინი ზომავენ ცას, როგორც ჩვენ ვზომავთ მინდორ-ველს. 2. ისევ რომ დავიწყო სწავლა, პლატონის რჩევას მივყვებოდი და მათემატიკით დავიწყებდი.	**გალილეო გალილეი** 1564-1642	
თუ ჩვენ რაიმე ნამდვილად ვიცით, ეს ვიცით მათემატიკის შესწავლის წყალობით.	**პიერ გასენდი** 1592-1655	
როგორც წინაპრები ბუნების შესწავლისას ანიჭებდნენ დიდ მნიშვნელობას მექანიკას, ასევე თანამედროვე ავტორები, უგულებელყოფენ რა სუბსტანციას და მის შინაგან თვისებებს, ცდილობენ დაუმორჩილონ ბუნების კანონები მათემატიკურ კანონებს.	**ისააკ ნიუტონი** 1642-1725	
მათემატიკოსები შეყვარებულებს გვანან — საკმარისია დაეთანხმო მათემატიკოსის უმარტივეს დებულებას და დაუყოვნებლივ ის ჩამოაყალიბებს შედეგს, რომელთანაც ისევ მოგიწევს დათანხმება, და ამ შედეგიდან კიდევ პროცესი მეორდება.	**ბერნერ ლე ბოვიე დე ფონტენელი** 1657-1757 მწერალი	
მათემატიკოსები ტრაბახობენ თავიანთი მომხიბვლელი მიღწევებით, მაგრამ, სინამდვილეში, ისინი ჩაფლულები არიან გონებრივ აკრობატიკაში და ხელს არაფრით უწყობენ საზოგადოებას.	**ოგიუ სორაი** 1666-1728 ფილოსოფოსი	

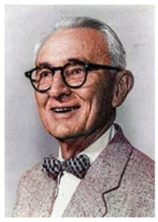
ნუთუ მათემატიკოსებს თავიანთი საიდუმლოებები არ გააჩნიათ? მეტიც, თავიანთი უსიამოვნებები და წინააღმდეგობები?	**ჯორჯ ბერკლი** 1685-1753 ფილოსოფოსი	
ერთადერთი გზა იმის გასაგებად, თუ რას გულისხმობენ მათემატიკოსები უსასრულობის ქვეშ, არის ადამიანური სისულელის მასშტაბზე დაფიქრება.	**ფრანსუა მარი არუე ვოლტერი** 1694-1778	
1. რაც უფრო ნაკლებს ერევა ღმერთი მეცნიერების სამყაროს საქმეებში, მით უკეთესია მეცნიერებისთვისაც და ღმერთის ავტორიტეტისთვისაც; 2. მათემატიკოსები დღემდე უშედეგოდ ცდილობდნენ აღმოეჩინათ რაღაც წესრიგი მარტივი რიცხვების მიმდევრობაში და ჩვენ გვაქვს საფუძველი ვიფიქროთ, რომ ეს არის საიდუმლო, რომელშიც ადამიანის გონება ვერასოდეს შეაღწევს; 3. მათემატიკა, ალბათ, ვერასოდეს მიაღწევდა იმ მაღალი ხარისხის სრულყოფილებას, რომ არა ამ საკითხების შესწავლაზე გაწეული წინაპართა ძალისხმევა, რომლებსაც დღეს ზოგიერთი უგულებელყოფს, მათი ვითომ უშედეგობის გამო.	**ლეონარდ ეილერი** 1707 – 1783	
მათემატიკა უკვე იმიტომაც უნდა ისწავლო, რომ ის აზროვნებაში წესრიგს ამყარებს.	**მიხეილ ლომონოსოვი** 1711-1765	
მათემატიკოსები მუდმივად იყენებენ ინტუიციას, ვარაუდს და გამოცნობას, გარდა იმ შემთხვევებისა, როდესაც ისინი აუდიტორიაში არიან.	**ჟოზეფ უორენი** 1741-1775 კონგრესმენი	
ეგრეთ წოდებულმა პროფესიონალმა მათემატიკოსებმა, დანარჩენი კაცობრიობის შედარებით უუნარობაზე დაყრდნობით, საკუთარი თავისთვის მოიპოვეს საყოველთაო რეპუტაცია, რომელიც ძალიან ჰგავს თეოლოგების სიწმინდის რეპუტაციას.	**გეორგ კრისტოფ ლიჰტენბერგი** 1742-1799 ფიზიკოსი	
მათემატიკოსები ამოცანის ამოხსნამდე მონაცემთა მარტივი მოწყობით მიდიან; მსჯელობას ისეთ მარტივ ოპერაციებამდე ამცირებენ და განსჯით ისე მოკლედ, რომ არასოდეს კარგავენ მხედველობიდან მტკიცებულებებს, რომლებიც მათი სახელმძღვანელოა.	**ანტუან ლავუაზიე** 1743-1794 ქიმიკოსი	
მათემატიკოსები გვანან ფრანგებს: თქვენ რაც არ უნდა თქვათ, ისინი ყველაფერს თავის ენაზე გადათარგმნიან და გამოვა რაღაც საპირისპირო.	**იოჰან ვოლფგანგ ფონ გოეთე** 1749-1832 პოეტი	

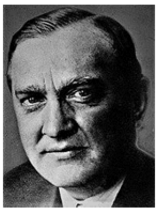
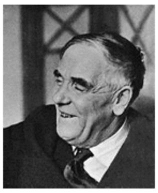
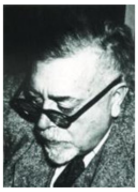
პირველი პირობა, რასაც უნდა ვაკმაყოფილებდეთ მათემატიკაში, ესაა, — ვიყოთ ზუსტები, მეორე — ვიყოთ ცხადები და, რამდენადაც შესაძლებელია — მარტივები	**ლაზარ ნიკოლა მარგარეტ კარნო** 1753-1823 პოლიტიკოსი	
მათემატიკა — მეცნიერების დედოფალია, მისი საყვარელი — ჭეშმარიტება, მისი სამოსი — უბრალოება და სიცხადე. მისი სასახლე გარშემორტყმულია ეკლიანი ჯაგნარით და მასთან რომ მოხვდეს, ყოველ მონადირეს უწევს ამ დაბრკოლების გადალახვა. შემთხვევითი მგზავრი სასახლეში ვერაფერ მიმზიდველს ვერ აღმოაჩენს. მისი სილამაზე ეხსნება ჭეშმარიტების მოყვარულ და სიძნელეებთან შეჭიდებით გამობრძმედილ გონებას, რაც მოწმობს, ადამიანის ბუნებიდან გამომდინარე, თვითმყობად და დაუოკებელ მიდრეკილებას უჩვეულოდ ჩახლართული, მაგრამ ამოუწურავი და ამაღლებული გონებრივი სიამოვნებისაკენ.	**იან სადეცკი** 1756 -1830 პედაგოგი	
დიდ მათემატიკოსთა შორის შესაძლოა იყვნენ ისეთებიც, რომლებმაც თვლა არ იციან.	**ნოვალისი ფრიდრიხ ფონ ჰანდერბერგი** 1772-1801 ფილოსოფოსი	
მოსაზრება, რომ მათემატიკური შესაძლებლობების მქონენი გვხვდებიან სხვა მეცნიერებებთან შედარებით იშვიათად — მხოლოდ ილუზიაა, რომელიც წარმოშვეს იმ ადამიანებმა, ვინც მათემატიკას ზერელედ და არათანმიმდევრულად მიუდგა.	**იოჰან ფრიდრიხ ჰერბარტი** 1776-1841 პედაგოგი	
მათემატიკოსები ერთმანეთის მხრებზე დგანან.	**კარლ ფრიდრიხ გაუსი** 1777-1855	
მათემატიკის შესწავლა, ისევე როგორც ნილოსი, იწყება წამიერად, მაგრამ მთავრდება ბრწყინვალებით.	**ჩარლზ კალებ კოლტონი** 1777-1832 მწერალი	
ცხოვრება ორი რაღაცით ლამაზდება: მათემატიკის შემოქმედებითა და მისი სწავლებით.	**სიმეონ დენი პუასონი** 1780-1840	
მათემატიკას უნდა ასწავლიდნენ სკოლაში იმიტომაც, რომ აქ მიღებული ცოდნა იყოს საკმარისი ჩვეულებრივი მოთხოვნების დასაკმაყოფილებლად.	**ნიკოლოზ ლობაჩევსკი** 1792-1856	

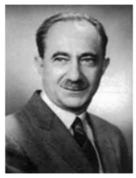
1. ამოცანა იმაში კი არ მდგომარეობს, რომ ვასწავლოთ მათემატიკა, არამედ იმაშია, რომ მათემატიკის საშუალებით მოვაწესრიგოთ გონება; 2. ბევრი რამ მათემატიკიდან არ რჩება მეხსიერებაში, მაგრამ როდესაც გაუგებ მას, მაშინ ადვილია გაიხსენო დავიწყებული.	**მიხეილ ოსტროგრადსკი** 1801-1862	
... მეცნიერ მათემატიკოსთა დარად, ხანდახან თავდავიწყებით იწყებენ უცნობის ძიებას.	**ონორე დე ბალზაკი** 1799-1850 მწერალი	
წრის კვადრატურის პოვნა უფრო ადვილია, ვიდრე ჭკუაში მოატყუო მათემატიკოსი.	**ოგასტეს დე მორგანი** 1806-1876	
უმაღლესი ჰარმონიის წარმოდგენის უნარის მქონე ინტელექტი ყოველთვის დაჯილდოებულია მეტწილად მათემატიკური ხასიათით.	**ედგარ ალან პო** 1809-1849 მწერალი	
ადამიანებს, რომლებმაც მათემატიკის უდიდესი პრინციპები გაითავისეს, გრძნობის ერთი ორგანოთი მეტი აქვთ, ვიდრე ჩვეულებრივ მოკვდავებს.	**ჩარლზ დარვინი** 1809-1882	
შეუძლებელია იყო ჭეშმარიტი მათემატიკოსი, თუ არ ხარ ცოტათი მაინც პოეტი,	**კარლ ვეიერშტრასი** 1815-1897	
ამოცანა იმაში კი არ მდგომარეობს, რომ ვასწავლოთ მათემატიკა, არამედ იმაში, რომ მათემატიკის საშუალებით მოვაწესრიგოთ გონება,	**ვილჰელმ შრადერი** 1817-1907 პედაგოგი	
ორი მეცნიერებაა ზუსტი: მათემატიკა და ზნეობრივი სწავლება... ზუსტი და უეჭველია ისინი იმიტომ, რომ ყველა ადამიანს ერთი და იგივე გონი გააჩნია, რომელიც აღიქვამს მათემატიკას და ერთი და იგივე სულიერი ბუნება, რომელიც აღიქვამს ზნეობრივ (ანუ ცხოვრებისეულ) სწავლებას.	**ლევ ტოლსტოი** 1828 -1910 მწერალი	
მათემატიკოსებმა შეიძლება თავი დაიმშვიდონ იმით, რომ ფლობენ ახალ იდეებს, რომელთა გამოხატვა მხოლოდ ადამიანურ ენას ჯერ კიდევ არ შეუძლია.	**ჯეიმს კლარკ მაქსველი** 1831-1879	
1. უდიდესი მათემატიკოსები, როგორც არქიმედე, ნიუტონი და გაუსი, ყოველთვის აერთიანებდნენ თეორიასა და გამოყენებებს თანაბარი ზომით; 2. ზოგადად, მათემატიკოსებს შორის შეიძლება გამოიყოს სამი ძირითადი კატეგორია და შესაძლო მათი სახელები — ლოგიკოსები, ფორმალისტები და ინტუიციონისტები შეიძლება ემსახურებოდეს მათ დახასიათებას.	**ფელიქს კლაინი** 1849 - 1925	

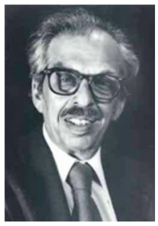
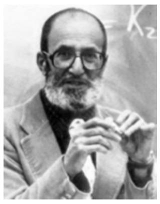
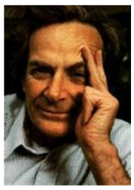
მრავალს, რომელსაც არასდროს ჰქონია შესაძლებლობა ღრმად გაეცნობიერებინა მათემატიკა, ერევა ის არითმეტიკაში და თვლის მშრალ მეცნიერებად. თავისი არსით კი ეს არის მეცნიერება, რომელიც საჭიროებს უდიდეს ფანტაზიას. ჩვენი დროის ერთ-ერთი გამორჩეული მათემატიკოსი (კ. ვეიერშტრასი) სრულიად ჭეშმარიტად ამბობს, რომ, არ შეიძლება იყო მათემატიკოსი, თუ ამავე დროს სულიერად არ ხარ პოეტი.	**სოფია კოვალევსკაია** 1850-1891	
1. მათემატიკოსები არ ანადგურებენ წინაღობებს, რომლებიც ხელს უშლიან, არამედ, უბრალოდ, გააქვთ ისინი თავისი მეცნიერების ფარგლებს გარეთ; 2. მათემატიკოსები არ სწავლობენ ობიექტებს, არამედ სწავლობენ ობიექტებს შორის ურთიერთობებს; 3. მათემატიკოსებად იბადებიან და არ იქმნებიან.	**ანრი პუანკარე** 1854-1912	
მათემატიკოსი ოპერირებს სიმბოლოების სიმრავლეში. ცხადია, რომ მას საქმე აქვს წმინდა ფორმალურ ჭეშმარიტებებთან. მიუხედავად ამისა, შეუძლია მიაღწიოს ფიზიკური სამყაროს აღწერისათვის ძალზე მნიშვნელოვან შედეგებს.	**კარლ პირსონი** 1857-1936	
მათემატიკური აზროვნების უნარი — ადამიანის ერთ-ერთი კეთილშობილი უნართაგანი.	**ჯორჯ ბერნარდ შოუ** 1856-1960 მწერალი	
... უბრალოდ წარმოუდგენელია იმ ადამიანის მოტყუება, რომელსაც შეუძლია დაკვირვება და მოვლენათა ანალიზი. მისი დასკვნები იქნება, ევკლიდეს თეორემების მსგავსად, უშეცდომო.	**სერ არტურ კონან დოილი** 1859-1930 მწერალი	
არსებობს გამოსაყენებლად საიმედო წესი: როდესაც მათემატიკოსი ან ფილოსოფოსი ბუნდოვნად წერს, ის უაზრობას ლაპარაკობს.	**ალფრედ ნორტ უაიტჰედი** 1861-1913	
1. ის გახდა პოეტი — მათემატიკოსისათვის მას არ ეყო ფანტაზია; 2. მათემატიკა არ იცნობს რასებს ან გეოგრაფიულ საზღვრებს; მათემატიკისთვის კულტურული სამყარო ერთი ქვეყანაა.	**დავიდ ჰილბერტი** 1862-1943	
მათემატიკოსები, როგორც ძროხები სიბნელეში, ყველანი ერთნაირები მეჩვენებიან.	**აბრაჰამ ფლექსნერი** 1866 -1959 პედაგოგი	
ყოველ ეპოქას ჰყავს რამდენიმე გამოჩენილი მათემატიკოსი. სხვები, შესაძლოა, წარმატებულები არიან, როგორც მასწავლებლები, მათი მოღვაწეობა არავის არ ვნებს, მაგრამ მათემატიკისათვის მათ არავითარი მნიშვნელობა არა აქვთ. მათემატიკაში ან გენიოსი ხარ, ან არარაობა.	**ალფრედ ადლერი** 1870 -1937 ფსიქოთერაპევტი	

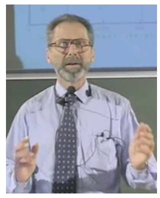
რომ შექმნა ჯანსაღი ფილოსოფია, უნდა გაემიჯნო მეტაფიზიკას, მაგრამ იყო კარგი მათემატიკოსი.	**ბერტრან რასელი** 1872 -1970 ფილოსოფოსი	
ჩემი აზრით, მათემატიკოსს, ვინაიდან და რადგანაც ის არის მათემატიკოსი, არ ეგების ფილოსოფიით ყურადღების დაკავება; უფრო იმიტომაც, რომ მრავალი ფილოსოფოსი ამ აზრს გამოთქვამდა.	**ანრი ლებეგი** 1875-1941	
თუ ვიმსჯელებთ სამყაროს შემოქმედის ქმნილებაზე ზოგიერთი სპეციფიკური განსაკუთრებულობით, ის წარმოგვიდგება, როგორც მათემატიკოსი.	**ჯეიმს ჰოპვუდ ჯინსი** 1877-1946	
1. არქიმედე ემახსოვრებათ მაშინაც კი, როდესაც ესქილე იქნება დავიწყებული, იმიტომ, რომ ენები კვდება და მათემატიკური იდეები არა. შესაძლოა „უკვდავება“ სულელური სიტყვაა, მაგრამ ალბათ, მათემატიკოსს აქვს საუკეთესო შანსი უკვდავებისა, რასაც ეს უკანასკნელი არ უნდა ნიშნავდეს; 2. მათემატიკა არ არის მხოლოდ მეცნიერული ჭვრეტით დაკავებული გონის ობიექტი, ის აქტიური შემოქმედების ასპარეზია; არავის არ შეუძლია ამით ინუგეშოს თავი, როდესაც დაკარგავს შემოქმედებით ძალას ან სურვილს; ეს შესაძლოა მათემატიკოსს საკმაოდ ადრეულ ასაკში დაემართოს. საწყენია, მაგრამ ამ შემთხვევაში ამას არა აქვს დიდი მნიშვნელობა და, საერთოდ, სისულელე იქნება ამაზე წუხილი.	**გოდფრი ჰაროლდ ჰარდი** 1877-1947	
გასაგებია, რომ მათემატიკური სწავლის მთავარი მიზანი სტუდენტების დაფიქრება უნდა იყოს.	**ჯონ ვესლი იანგი** 1879 -1932	
მათემატიკოსს რაღაც-რაღაცები შეუძლია, მაგრამ, რა თქმა უნდა, არა ის, რაც მისგან ამ მომენტისათვის უნდათ რომ მიიღონ.	**ალბერტ აინშტაინი** 1879-1955	
მათემატიკოსი სწავლობს თავის მეცნიერებას სრულიადაც არა იმიტომ, რომ ის სასარგებლოა. ის სწავლობს მას იმიტომ, რომ ის მშვენიერია.	**ნიკოლაი ლუზინი** 1883-1950	
მათემატიკოსთა უმეტესობის გამოცდილებით, ის, რაც დამაკმაყოფილებელია და ჭეშმარიტია ერთი თაობისთვის, შემდგომ, მუდმივი დაკვირვების ქვეშ, შესაძლოა გადაიქცეს „ობობის ქსელად“.	**ერიკ ტემპლ ბელი** 1883-1960 ფანტასტი	

მე ვიმედოვნებ, რომ მომავალში სულ უფრო მეტი ფიზიკოს-თეორეტიკოსი ეცდება დაეუფლოს მათემატიკური პრინციპების ღრმა ცოდნას, ხოლო მათემატიკოსები არ შემოიფარგლებიან მათემატიკური აბსტრაქციების წმინდა ესთეტიკური განვითარებით.	**ჯორჯ დევიდ ბირხოფი** 1884-1944	
მათემატიკური აზროვნება, ერთდროულად, თავისუფალიცაა და აუცილებელიც. ცალკე აღებული მათემატიკოსი თავისუფალია განსაზღვროს თავისი ცნებები და შემოიღოს თავისი აქსიომები, როგორც ეს მას სურს. მაგრამ ისმის შეკითხვა: დააინტერესებს კი ის თავისი ნააზრევით მათემატიკოს კოლეგებს? ჩვენ არ შეგვიძლია არ ვაღიაროთ, რომ ზოგიერთი მათემატიკური სტრუქტურა, განვითარებული მრავალი მეცნიერის ძალისხმევით, ატარებს აუცილებლობის ბეჭედს, რომელიც არ ეხება ისტორიული წარმოშობის შემთხვევითობას. ნებისმიერი, ვინც თვალს ადევნებს თანამედროვე ალგებრის მიღწევებს, გაოგნებული იქნება თავისუფლებისა და აუცილებლობის სინთეზით.	**ჰერმან ვეილი** 1885-1955	
1. სწავლის საუკეთესი საშუალებაა — თვითონ აღმოაჩინო; 2. თუ გინდათ ცურვის სწავლა, მაშინ თამამად შედით წყალში, ხოლო, თუ გსურთ ისწავლოთ ამოცანების ამოხსნა, ამოხსენით ისინი!	**(დიერდ) ჯორჯ პოია** 1887-1985	
1. რეალობის მყუდრო სახლიდან ადვილია შეხვიდე მათემატიკის უღრან ტყეში, მაგრამ ცოტას თუ შეუძლია უკან დაბრუნება; 2. არსებობს (სახუმარო) კანონი, რომლის თანახმადაც: მათემატიკოსი ამას უკეთ გააკეთებს. თუ რაიმეს ორ ადამიანს დავავალებთ, რომელთაგანაც ერთი მათემატიკოსია და ეს დავალება ორივესთვის საქმიანობით უცნობია, მაშინ შედეგი ყოველთვის იქნება შემდეგი: მათემატიკოსი ამას უკეთ გააკეთებს; 3. მეცნიერების არცერთი დარგი ისე არ ამყარებს რწმენას ადამიანის გონის ძალაში, როგორც მათემატიკა; მე არ მჯერა, რომ რაღაც ახალი დიდაქტიკური მეთოდები შეძლებენ რეალურად გაზარდონ მათემატიკის გამგებთა წილი სკოლაში. ვაჯამებთ რა პედაგოგების ექსპერიმენტებს, ჩვენ აღმოვჩნდით დილემის წინაშე: ან დავუთმოთ მოთხოვნები... და გავაუქმოთ მათემატიკა, ან მოვიქცეთ ისე, როგორც გვასწავლის ბუნება, რომელიც ფანტავს ათასობით მარცვალს, თუმცა ძალზე ცოტა მოხვდება ნოყიერ ნიადაგში. ამ რამდენიმე მარცვლიდან შემდეგ აღმოცენდებიან: პასკალი, გაუსი და ბოლიაი.	**ჰუგო შტეინჰაუზი** 1887-1972	
სანამ სიტყვით გამოვიდოდა, ლინკოლნი მათემატიკური სიზუსტით გადაიაზრებდა თავის სათქმელს. როდესაც ის 40 წლის გახდა, უკვე კონგრესის წევრი, სწავლობდა ევკლიდეს, რათა ჰქონოდა შესაძლებლობა აღმოეჩინა სოფიზმები და დაესაბუთებინა თავისი მოსაზრებები.	**დეილ კარნეგი** 1888-1955 მწერალი	
ზოგიერთი მათემატიკოსი აზროვნებს აბსტაქციებით; მათემატიკური იდეები საჭიროებენ პროგრესირებად აბსტრაქტულ დახვეწას, აქსიომატიზაციას, კრისტალიზაციას... მაგრამ მათემატიკაში ძირითადი სიძნელეები ქრება, თუ გავითვალისწინებთ, რომ მათემატიკური ცნებები წარმოადგენენ რაღაც რეალური მოვლენის აღწერას.	**რიხარდ კურანტი** 1888-1972	

მათემატიკური ნიჭი მუსიკალურის მსგავსია, ხშირად თანდაყოლილი, თავს იჩენს ადრეულ ასაკში და ორგანულად განსაზღვრავს მოცემული ადამიანის აზროვნების სტილს.	**სერგეი ვავილოვი** 1891-1951 ფიზიკოსი	
მათემატიკოსი — ვისაც დებულებებს შორის ანალოგიების პოვნა ხელეწიფება. საუკეთესო მათემატიკოსი — ვინც დამტკიცებებს შორის ანალოგიებს ადგენს. უფრო ძლიერს შეუძლია შენიშნოს ანალოგიები თეორიებში, მაგრამ არსებობენ ისეთებიც, რომლებიც ანალოგიებს შორის ხედავენ ანალოგიებს.	**სტეფან ბანახი** 1892-1945	
ხომ არ მოვიდა დრო, რომ ყველა მათემატიკოსი ჩავრიცხოთ „სპორტულ“ განყოფილებაში, როგორც მოჭადრაკეები?	**პეტრე ლ. კაპიცა** 1894 -1984 ფიზიკოსი	
ე.წ. კულტურული ადამიანების უმეტესობა, რომელიც მათემატიკასთან საქმიანობით არაა დაკავშირებული, დასაშვებად თვლის, რომ ამ მეცნიერებაზე არავითარი წარმოდგენა არ ჰქონდეს. მათემატიკა მათთვის — რაღაც ძალზე მოსაწყენი, განყენებული და მშრალია... ყველაზე სამწუხარო შემთხვევებში ითვლება, რომ ეს თითქმის ბუღალტერიით დაინტერესების ტოლფასია.	**ნორბერტ ვინერი** 1894 -1964	
მათემატიკოსები დიდხანს ცხოვრობენ; ეს არის ჯანსაღი პროფესია. მიზეზი, რის გამოც დიდხანს იცოცხლებთ, არის სასიამოვნო აზრები. მათემატიკა და ფიზიკა ხომ ძალიან სასიამოვნო საქმეა.	**დირკ იან სტრუიკი** 1894-2000	
თუ ღმერთი არსებობს — ის უდიდესი მათემატიკოსია.	**პოლ ადრიენ მორის დირაკი** 1902-1984	
მათემატიკოსი არა მარტო ხელს უწყობს ბუნებისმეტყველის მიერ ნაპოვნი ამონახსნის ღრმა გაგებას, არამედ არსებითად აზოგადებს პრობლემის თავდაპირველ ჩამოყალიბებას.	**იუჯინ პოლ ვიგნერი** 1902-1995	
დღეისათვის არა მარტო ჩვენმა მმართველებმა არ იციან მათემატიკა, არამედ ჩვენმა ფილოსოფოსებმაც და, უფრო მეტიც — ჩვენმა მათემატიკოსებმა არ იციან მათემატიკა.	**რობერტ ოპენჰეიმერი** 1904-1967 ფიზიკოს - თეორეტიკოსი	
ყოველი, ვინც ვერ ერკვევა მათემატიკაში — არასრული ადამიანია; უკეთეს შემთხვევაში — უწყინარი პრიმატია, რომელმაც ისწავლა ფეხსაცმლის ტარება, დაბანა და სახლის არდანაგვიანება.	**რობერტ ჰაილაინი** 1907 -1988 მეცნიერ-ფანტასტი	

ვინც ბავშვობიდან მეცადინეობს მათემატიკაში, ის ავითარებს ყურადღებას, ავარჯიშებს ტვინს, თავის ნებელობას, გამოიმუშავებს დასახული მიზნის მიღწევისათვის დაჟინებულ და შეუპოვარ სწრაფვას.	**ალექსი ი. მარკუშევიჩი** 1908-1979	
შემოქმედების სიხარულსაც და ძალის წყაროსაც მათემატიკის სამეფოში ყველა იპოვის, ვინც მის შენობას აშენებს.	**სერგეი სობოლევი** 1908 -1989	
ალფრედ ნორტ უაიტჰედმა ოდესღაც თქვა: „შეუძლებელია არ აღვნიშნოთ, რომ მათემატიკაში მოღვაწეობა ადამიანის სულზე ღმერთებისაგან გარდმოსული სიგიჟეა“. სიგიჟისა არ ვიცი, მაგრამ ღვთიური უეჭველია. მათემატიკოსები ქმნიან გამჭრიახობისა და ინტუიციის აქტებით. შემდეგ ლოგიკა ადებს სანქციებს ინტუიციის შემოქმედებას.	**მორის კლაინი** 1908-1992	
მათემატიკოსებმა ბევრი რამ იციან ძალიან ცოტა რამის შესახებ, ხოლო ფიზიკოსებმა ძალიან ცოტა რამე იციან ძალიან ბევრის შესახებ.	**სტანისლავ ულამი** 1909-1984	
მათემატიკოსები თავად ადგენენ ზოგადობისა და ელეგანტურობის სტანდარტებს თავიანთ ექსპოზიციაში, რაც გასაგებია.	**კენეტ ე. ბულდინგი** 1910-1993 ეკონომისტი	
1. საკმარისია აჩვენო რაღაც შეუძლებელი, რომ გამოჩნდება მათემატიკოსი, რომელიც ამას შეძლებს; 2. აზროვნებაში სიმამაცე ყოველ მათემატიკოსს გააჩნია. მათემატიკოსს არ უყვარს, როდესაც მას რაიმეს შესახებ უყვებიან; მას უნდა, რომ ამ დებულებამდე თვითონ მივიდეს; 3. მათემატიკაში, თუ წარმოიშობა კანონზომიერება, ჩვენ შეგვიძლია დავსვათ შეკითხვები: რატომ ხდება ეს? რას ნიშნავს ეს? ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ ამ კითხვებზე პასუხები. ფაქტობრივად, მათემატიკოსი გრძნობს, რომ ყოველი კანონზომიერებისათვის მან უნდა იცოდეს, რატომ წარმოიშვა ის.	**უოლტერ ვარვიკ სოიერი** 1911- 2008	
მათემატიკოსი — ეს ის ადამიანი კი არაა, ვისაც შეუძლია მათემატიკით იყოს დაკავებული, არამედ ის, ვისაც არ შეუძლია არ იყოს დაკავებული მათემატიკით.	**იზრაილ გელფანდი** 1913 -2009	
მათემატიკოსი — ეს არის ყავის თეორემებში გადამამუშავებელი მანქანა.	**პაულ ერდოში** 1913-1996	

არსებობენ ორი სახის მათემატიკოსები — ჭკვიანები და სულელები. მე ერთ-ერთი სულელთაგანი ვარ.	**ლიპმან ბერსი** 1914-1993	
ინჟინერი, რომელიც არ ფლობს მათემატიკურ მეთოდებს — ინჟინერი კი არა, მონტიორია ... ინჟინერი, სრული ამ სიტყვის გაგებით, წარმოუდგენელია მათემატიკის საფუძვლიანი ცოდნის გარეშე. მათემატიკის ცოდნის გარეშე შეუძლებელია ააგო: ხიდი, კაშხალი, ჰიდროსადგური. მათემატიკის მოცულობის შემცირება — დანაშაულია! რაც შეიძლება დიდი მოცულობითაა შესასწავლი მათემატიკა და, რაც მთავარია, საფუძვლიანად!	**ალექსანდრე დ. ალექსანდროვი** 1912-1999	
როგორც ჩანს, მათემატიკოსებს არ უჭირთ ახალი ცნებების შექმნა უფრო სწრაფად, ვიდრე ძველის კარგად გაგება.	**ედუარდ ნორტონ ლორენცი** 1917-2008 მეტეოროლოგი	
მათემატიკის სწავლის ერთადერთი გზა მათემატიკის „კეთებაა“.	**პოლ ჰალმოში** 1919-2006	
მათემატიკის გაკვეთილებზე გონებრივი სამუშაო — აზროვნების ქვაკუთხედია.	**ვასილ ო. სუხომლინსკი** 1918-1978 პედაგოგი	
მცდარია, რომ ე.წ. „აბსტრაქტული მათემატიკა“ ასეთი ძნელია... არ მჯერა, რომ არსებობენ, ერთი მხრივ, ცოტა უცნაური ადამიანები, რომლებსაც აქვთ უნარი გაიგონ მათემატიკა, და მეორე მხრივ — ნორმალური ადამიანები. მათემატიკა წარმოადგენს ადამიანის ერთ-ერთ აღმოჩენას, ამიტომ არ შეიძლება ის იყოს უფრო რთული, ვიდრე ადამიანები, ვისაც ის ესმის.	**რიჩარდ ფეინმანი** 1918-1988 ფიზიკოსი	
მათემატიკოსები ხანდახან დიდ რიცხვებთან ურთიერთობენ, მაგრამ შემოსავლის მხრივ არასდროს.	**აიზეკ აზიმოვი** 1920-1992 ფანტასტი	
შესანიშნავი მათემატიკის გასაკეთებლად ორი გზა არსებობს. პირველი ის არის, რომ იყოთ ყველა სხვაზე ჭკვიანი; მეორე გზა არის — იყოთ ყველა სხვაზე სულელი, მაგრამ დაჟინებული.	**რაულ ბოტი** 1923-2005	

სამწუხაროდ, სამყარო მათემატიკოსთა მოხერხებულობისთვის არ არის შექმნილი.	**ბენუა მანდელბროტი** 1924-2010	
რატომ ეშინიათ ბავშვებს მათემატიკის? არასწორი მიდგომის გამო. იმიტომ, რომ მას განიხილავენ როგორც საგანს.	**შაკუნტალა დევი** 1929-2013 მწერალი	
მათემატიკოსები მენეჯერებივით არიან — მათ სურთ გაუმჯობესება ცვლილების გარეშე.	**ედსგერ დეიქსტრა** 1930-2002 ინფორმატიკოსი	
მათემატიკოსები ნამდვილად არასათანადოდ არიან დაფასებულნი, თითქმის ისევე, როგორც საკონცერტო დარბაზში გამომსვლელი პიანისტები. ეს ძალიან დიდი კონკურენციის სფერო.	**ჯან-კარლო როტა** 1932-1999	
ჩვენ კი არ ვირჩევთ მათემატიკას ჩვენს პროფესიად, არამედ ის გვირჩევს ჩვენ.	**იური მანინი** 1937	
თქვენ უნდა ჩაუღრმავდეთ საკუთარ თავს, რათა მიხვდეთ საკუთარ არსს, რომ დაკავდეთ ისეთი რთული საქმით, როგორიცაა მათემატიკური კვლევა. თქვენ უნდა გჯეროდეთ, რომ თქვენ ფლობთ საგანძურს, რომელიც ჩამალულია თქვენი გონების სიღრმეში, როგორც განძი, რომელიც უნდა გაუზიაროთ სამყაროს.	**ივ მეიერი** 1939	
მათემატიკოსები ცოტათი ჰგვანან ლაკონიურ ვერმონტელს, რომელიც კითხვაზე, ცხოვრობდა თუ არა ამ შტატში მთელი ცხოვრება, პასუხობს: „ჯერ არა“.	**ჯონ ალენ პაულოსი** 1945	
მათემატიკოსები არ კმაყოფილდებიან იმის ცოდნით, რომ „პრობლემას“ არ აქვს ამონახსნი ოთხ მილიონამდე ან ოთხ მილიარდამდე; მათ ნამდვილად სურთ იცოდნენ, რომ აღნიშნულს საერთოდ არ აქვს ამონახსნი.	**ანდრიუ ვაილსი** 1953	
მათემატიკოსებს სიამოვნებთ ფიქრი უმარტივეს შესაძლო საკითხებზე, ხოლო უმარტივესი შესაძლებელი რამ არის წარმოსახვითი.	**პოლ ლოკჰარდი** 1956 ასტრონავტი	

ფიზიკოსები უფრო ავანგარდულ კომპოზიტორებს ჰგვანან. ისინი მზად არიან ტრადიციული წესები დაარღვიონ... მათემატიკოსები კლასიკურ კომპოზიტორებს უფრო ჰგვანან.	**ბრაიან გრინი** 1963-2012 ფიზიკოსი	
მათემატიკოსებს აქვთ გარკვეული ტიპის გონება, როგორც მთამსვლელებს, რადგან მთაზე ასვლა მათთვის წარმოუდგენლად საინტერესო პრობლემებს ქმნის.	**ჯიმი ჩინი** 1973 ალპინისტი	

თარგმანი

წერტილები და წრფეები

Department of
Mathematics/Computing
York College (CUNY)
Jamaica, NY

http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fc-2020-04

ჯოზეფ მალკევიჩი

პროფესორი.
კვლევის ინტერესები: გეომეტრია, კომბინატორიკა, გრაფთა თეორია, მათემატიკური მოდელირება და მათემატიკური განათლება; არის ბევრი კარგი წიგნისა და მრავალი სტატიის ავტორი.

თეიმურაზ ალიაშვილი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
ასოცირებული პროფესორი,
ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტის ბიზნესის,
ტექნოლოგიისა და განათლების ფაკულტეტი

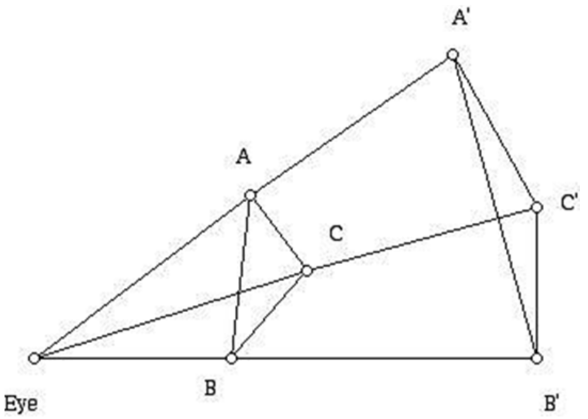
როდესაც ადამიანები ფიქრობენ მათემატიკაზე, ისინი ფიქრობენ რიცხვებსა და ფიგურებზე. მათემატიკის ინტერესი არითმეტიკისა და ალგებრის მიმართ განპირობებულია რიცხვებით, ხოლო მათემატიკის გეომეტრიისადმი მიდრეკილების მიზეზია ფიგურები. თუმცა, ხშირ შემთხვევაში, გაცილებით უკეთესია ჩავწვდეთ არსს, რომ გავიგოთ ყველა სახის ფორმათა კანონზომიერებები, იქნება ეს რიცხვითი თუ გეომეტრიული ფორმები, თუ ფორმები კიდევ უფრო ზოგადი აზრით.

მე მოგითხრობთ ზოგიერთი მნიშვნელოვანი მიღწევის შესახებ, რომელიც დაკავშირებულია გეომეტრიის ბაზისურ ინტუიციურ იდეებთან — წერტილებთან და წრფეებთან. ჩვენ განვიხილავთ წერტილებს, წრფეებს და სეგმენტებს (ორ წერტილს შორის მოთავსებული წრფის ნაწილი), რომლებიც დახაზულია ევკლიდეს სიბრტყეზე და არა სხვა რომელიმე ზედაპირზე, მაგ., როგორიცაა სფერო ან ელიფსოიდი, ჰიპერბოლური ან პროექციული სიბრტყეები და სხვ. ბევრ ასეთ იდეას აქვს ანტიკური ფესვები ბევრ კულტურაში, მაგრამ მათემატიკა ხშირად ხელახლა ინტერესდება ისეთი პრობლემებით, რომლებიც, ერთი შეხედვით, თითქოს უკვე გადაწყვეტილია შორეულ წარსულში.

წერტილებისა და წრფეების კონფიგურაციები

განვიხილოთ ნახ.1, რომელზეც გამოსახულია ორი სამკუთხედი, დანახული ჩვენი თვალთახედვით. მიუხედავად იმისა, რომ დიაგრამაზე არის წერტილების უსასრულო რაოდენობა, ამჯერად ჩვენ დავინტერესდებით მხოლოდ მონიშნული წერტილებით. როგორც ვხედავთ, ამ დიაგრამაზე გამოსახული სეგმენტებიდან ზოგიერთი მათგანი ერთსა და იმავე წრფეზე მდებარეობს. ამ ტიპის ნახაზებში ჩვენ შეგვიძლია წრფის მხოლოდ ნაწილის ჩვენება. შევნიშნოთ, რომ სამკუთხედების შესაბამისი წვეროები განსაზღვრავენ სამ წრფეს: AA', BB' და CC'. ისინი იკვეთებიან ერთ წერტილში, რომელსაც ჰქვია „თვალი”

(“Eye”). შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ EyeA', EyeA და AA'-ს ჩვენ განვიხილავთ სამ განსხვავებულ სეგმენტად, მიუხედავად იმისა, რომ EyeA' შედგება ორი უფრო მცირე (მოკლე) სეგმენტისგან.

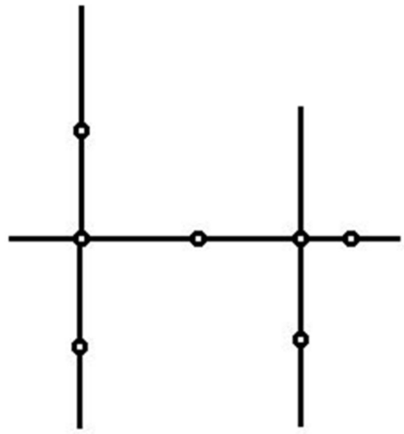


ნახ. 1. *„Eye" წერტილიდან დანახული ორი სამკუთხედის წვეროები.*

თუ დავთვლით ნახაზზე გამოსახულ ფიგურაზე წერტილებს, მივიღებთ 7-ს, ხოლო წრფეების რაოდენობას — 9-ს. აქედან სამი წრფე შეიცავს სამ-სამ წერტილს, დანარჩენი ექვსი კი — ორ- ორს. მივაქციოთ ყურადღება, რომ სეგმენტები Eye C და AB მართალია იკვეთებიან, მაგრამ ჩვენ ასეთი წერტილი არ გვაინტერესებს, ისე როგორც A'B' და CC' სეგმენტების თანაკვეთის წერტილი. როგორ ჩამოვაყალიბოთ ის ინფორმაცია, რასაც ვხედავთ? სეგმენტი Eye A' შედგება Eye A და AA' სეგმენტებისგან, რომლებიც ქმნიან უფრო გრძელ სეგმენტს და Eye, A და A' წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ.

ნახაზზე მონიშნული წერტილების სიმრავლიდან ზოგიერთი წყვილი განსაზღვრავს ორ წერტილიან წრფეებს, წერტილების ზოგიერთი სამეული კი ერთ წრფეზე მდებარეობს. მიაქციეთ ყურადღება, რომ დიაგრამაზე არ არის ნაჩვენები ყველა წრფე, რომელიც შეიძლებოდა მიგვეღო მონიშნული 7-წერტილიანი სიმრავლიდან. თუ ამ 7 წერტილს ექნებოდა „ზოგადი მდებარეობა“, მაშინ გვექნებოდა 21 = (7×6)/2 განსხვავებული წრფე. ცხადია, რომ ორი განსხვავებული წერტილი ევკლიდეს სიბრტყეზე განსაზღვრავს ერთადერთ წრფეს. თუმცა, თუ გვაქვს 4 წერტილი ერთ წრფეზე, მაშინ ამ წერტილების ყოველი წყვილი განსაზღვრავს ერთსა და იმავე წრფეს.

ნახ. 1 არის ცნობილი თეორემის ამოსავალი წერტილი, რომელსაც ძალიან მალე დავუბრუნდებით. საამისოდ რომ მოვამზადოთ შესაბამისი ნიადაგი, მოდით ჯერ დავაკვირდეთ წერტილებსა და წრფეებს მე-2 ნახაზზე. ამ დიაგრამაზე ნაჩვენებია 7 წერტილი და სამი წრფე. ამათგან ერთი წრფე შეიცავს 2 წერტილს, მეორე — 3-ს და მესამე — 4 წერტილს. ხუთ წერტილზე გადის მხოლოდ თითო წრფე, ხოლო ორ წერტილზე გადის ორ-ორი წრფე.



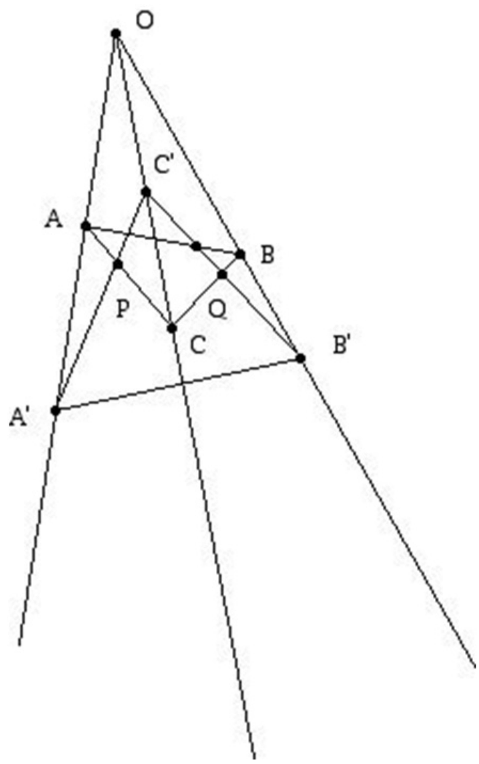
ნახ. 2. *7 წერტილისა და სამი წრფის ერთობლიობა.*

შეიძლება დაინტერესდეთ მართლა იკვეთებიან (ხვდებიან) თუ არა „ვერტიკალური“ წრფეები სადმე შორს. ბევრი იტყვის, რომ დიაგრამა ისეა წარმოდგენილი, რომ წრფეები პარალელურია, ანუ მათ საერთო წერტილი არ აქვთ.

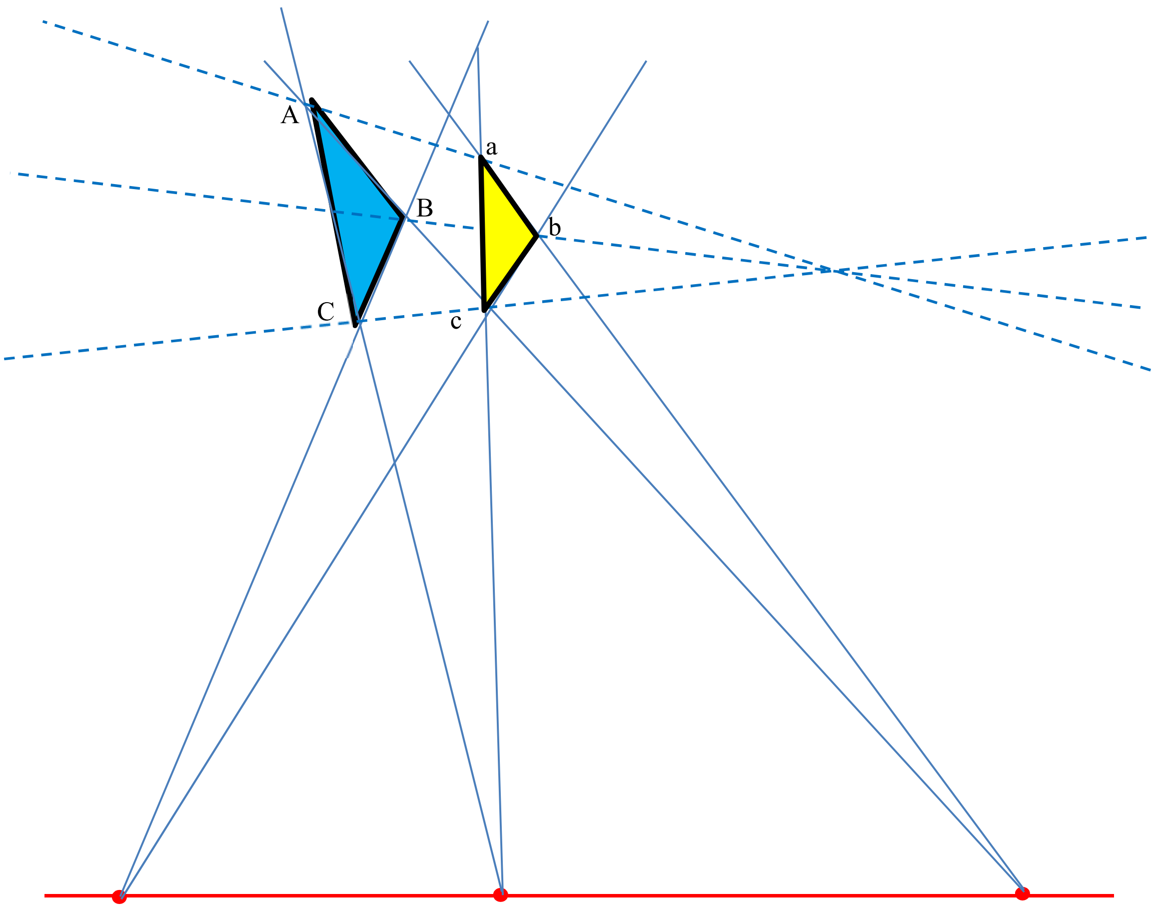
უნდა ითქვას, რომ ბევრი თვალსაზრისით თეორემა, რომლის განხილვასაც ვაპირებთ, უფრო მიეკუთვნება პროექციულ გეომეტრიას (სადაც პარალელური წრფეები არ არსებობს, ანუ წრფეების ყველა წყვილი ზუსტად ერთ წერტილში იკვეთება), ვიდრე ევკლიდურ გეომეტრიას. ჩვენ ამ თეორემას ჩამოვაყალიბებთ ევკლიდური სიბრტყისთვის.

კიდევ მეტი შეიძლება ითქვას ნახ. 1-ზე გამოსახული დიაგრამის შესახებ, მაგრამ შევხედოთ ნახ. 3-ზე, წარმოდგენილ სხვა დიაგრამას, რომელიც დაგვეხმარება მათემატიკური შედეგის ილუსტრაციაში. ნაზ. 1-ზე მონიშნული წერტილი "Eye" შეესაბამება ნახ. 3-ზე გამოსახულ O წერტილს. გარდა ამისა, ორი სამკუთხედი ნახ. 1-ზე არ ფარავს ერთმანეთს, მაშინ როცა ნახ. 3-ზე ისინი ნაწილობრივ ფარავენ ერთმანეთს. რა ხდება (იხ.ნახ. 3),

როდესაც ვუყურებთ ორი სამკუთხედის შესაბამისი წვეროებით განსაზღვრულ AA' , BB' და CC' წრფეებს? რა თქმა უნდა, შესაძლებელია, რომ არსებობდეს რომელიმე წყვილი, რომლებიც პარალელურია, ანუ არ იკვეთებიან. თუმცა, შეიძლება ისიც დავუშვათ, რომ, სინამდვილეში, ყველა წყვილი მართლაც იკვეთება P, Q და R წერტილებში. (P და Q ნაჩვენებია ნახაზზე, მაგრამ R არაა მონიშნული). შეიძლება ითქვას რამე ამ წერტილების სამეულზე? ჩვეულებრივ, თუ ვინმე „შემთხვევით“ აირჩევს სამ წერტილს, არ უნდა ველოდოთ, რომ ისინი მდებარეობენ ერთ წრფეზე; უფრო მოსალოდნელია, რომ ისინი სამკუთხედის წვეროებს წარმოადგენდნენ. თუმცა აქ აღსანიშნავია ერთი ფაქტი, როდესაც ორი საწყისი სამკუთხედისათვის დამახასიათებელია თვისება, რომ მათი შესაბამისი წვეროების დამაკავშირებელი წრფეები ხვდებიან ერთ წერტილში, სამკუთხედების შესაბამისი გვერდები (როდესაც არცერთი წყვილი არ არის პარალელური) იკვეთებიან წერტილებში, რომლებიც მდებარეობენ ერთ წრფეზე!



ნახ. 3. *დეზარგის კონფიგურაცია, რომელიც არ გვიჩვენებს AB და A'B' წრფეების თანაკვეთის R წერტილს, რომელიც იქნებოდა იმავე წრფეზე, რომელზედაც არიან P და Q წერტილები.*



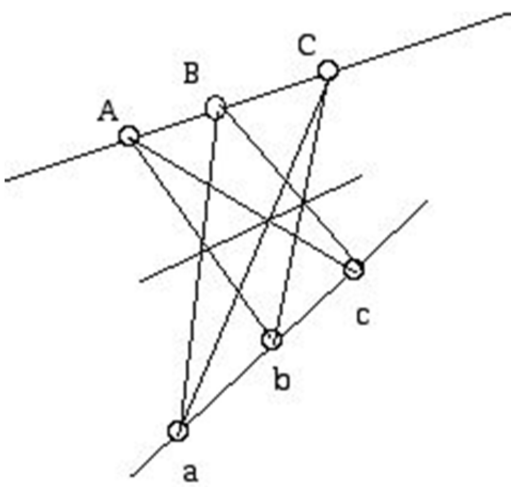
ნახ. 4. *კიდევ ერთი დასრულებული დეზარგის კონფიგურაცია, რომელიც გვჩვენებს 10 წერტილს და წრფეებს.*

ეს თეორემა თავის დროზე ვერ შენიშნეს დიდმა ბერძენმა გეომეტრებმა, მაგრამ აღმოაჩინა ჟირარ დეზარგმა (1591-1661). ეს არის მათემატიკაში იმ სიტუაციის მაგალითი, როდესაც ხდება ისეთი რამ, რისი მოლოდინიც არ უნდა გვქონდეს, მაგრამ თითქოს ჯადოსნურად მაინც ხდება. მათემატიკის უნარი, მოულოდნელ სიტუაციებში გასაოცარი კავშირების დამყარებისა, არის ერთ-ერთი მიზეზი იმისა, რის გამოც ამდენ ადამიანს იზიდავს ეს საგანი. ის, ვინც თვლის, რომ ნახ. 3-ში შეიძლება უბრალო დამთხვევა იყოს, უნდა გადახედოს დეზარგის სხვა კონფიგურაციას (ნახ. 4), რომელიც ხაზს უსვამს ფერებში მოცემულ ორ სამკუთხედს. ადვილად შესამჩნევია წერტილი რომელიც არის „პერსპექტივაში“ (სადაც იკვეთება ლურჯი წრფეები) და წრფე, საიდანაც ისინი არიან „პერსპექტივაში“.

ფორმალურად ჩამოვაყალიბოთ დეზარგის თეორემა.

თეორემა (დეზარგი). *ABC და abc ორი განსხვავებული სამკუთხედია ევკლიდეს სიბრტყეში. თუ შესაბამის წვეროებზე გამავალი წრფეები ერთ წერტილში იკვეთებიან, მაშინ შესაბამისი გვერდების გაგრძელებები იკვეთებიან წერტილებში, რომლებიც მდებარეობენ ერთ წრფეზე.*

ზოგჯერ ამ თეორემას ამგვარადაც ამბობენ, — თუ ორი სამკუთხედი არის „პერსპექტივაში“ წერტილიდან, მაშინ ისინი „პერსპექტივაში“ არიან წრფიდანაც.



ნახ. 5. *პაპუსის თეორემის ამსახველი დიაგრამა.*

ისეთი თეორემები, როგორიცაა დეზარგის თეორემა, ცნობილია კონფიგურაციის თეორემების სახით; არსებობს სხვა მსგავსი თეორემებიც, რომლებიც წინ უსწრებს დეზარგს.

გარდა წერტილებისა და წრფეებისგან შედგარი „კონფიგურაციისა“, რომელიც წარმოდგენილია 10 პუნქტითა და 10 წრფით, რომელიც ნაჩვენებია ნახ. 4-ზე, არის კიდევ ერთი გასაოცარი კონფიგურაციის თეორემა, რომელიც დაკავშირებულია დიდ მათემატიკოს, პაპუს ალექსანდრიელთან, რომელიც ცხოვრობდა დაახლ. 290-350 წლებში.

პაპუსის თეორემა შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგნაირად,

თეორემა (პაპუსი). *მოცემულია ექვსი წერტილი, A, B, C ერთ წრფეზე და a, b, c მეორე წრფეზე, რომლებიც იკვეთება (არცერთი წერტილი არ ემთხვევა იმ წერტილს, სადაც ეს ორი წრფე იკვეთება) (ნახ. 5). მაშინ სამი წერტილი, სადაც Ab კვეთს aB-ს, Ac კვეთს aC-ს და Bc კვეთს bC-ს, მდებარეობს ერთ წრფეზე.*

მაშინ როცა დეზარგის თეორემა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც 10 წერტილი და 10 წრფე, 3 წერტილით წრფეზე და ერთ წერტილში გამავალი 3 წრფით, პაპუსის კონფიგურაცია ამ თვალსაზრისით შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც 9 წერტილი და 9 წრფე, სადაც სამი წერტილი მდებარეობს მითითებულ წრფეებზე. მაშინ წრფეების სამეულები გადიან მითითებულ წერტილებში.

პაპუსის თეორემა შეიძლება ჩაითვალოს, როგორც განსაკუთრებული შემთხვევა სხვა შესანიშნავი კონფიგურაციის თეორემისა, რომელიც აღმოაჩინა ფრანგმა ფილოსოფოსმა, მწერალმა და მათემატიკოსმა ბლეზ პასკალმა (1623-1662).

პაპუსის თეორემა მოიცავს 6 წერტილს, რომლებიც დევს ორ წრფეზე და ეს წერტილები

ბლეზ პასკალი (1623-1662)

განსაზღვრავენ წრფეებს, რომლებიც გადაკვეთისას ქმნიან წერტილებს, რომლებიც აგრეთვე მდებარეობენ ერთ წრფეზე. მაგრამ, რადგან ორი განტოლებიდან ორივე პირველი ხარისხისაა ($Ax + By + C = 0$ და $ax + by + c = 0$ სახის, სადაც A, B, a, b და C, c არიან ნამდვილი რიცხვები, ამასთან არცერთი ნამრავლი Aa და Bb არ არის ნული), ამიტომ, თუ ამ ორ განტოლებას გავამრავლებთ, მივიღებთ განტოლებას, რომელიც არის მეორე ხარისხის x და y ცვლადებში. ეს იქნება ორი ცვლადის კვადრატული განტოლება. „ფორმები“, რომლებსაც თქვენ ალბათ ყველაზე კარგად იცნობთ და რომლებიც აკმაყოფილებენ ასეთ განტოლებებს, არის კონუსური კვეთები: წრეები, ელიფსები, პარაბოლები და ჰიპერბოლები. მაგრამ ორი გადამკვეთი წრფე ან ორი პარალელური წრფეც შეიძლება ჩაითვალოს „გადაგვარებულ“ კონუსურ კვეთებად (ამ ფიგურებმა კონუსური კვეთების სახელი იმიტომ მიიღო, რომ ისინი შეიძლება მიღებულ იქნეს კონუსის სიბრტყით გაკვეთის შედეგად). პასკალმა გააცნობიერა, რომ პაპუსის თეორემა შეიძლება განზოგადდეს კონუსურ კვეთებზე.

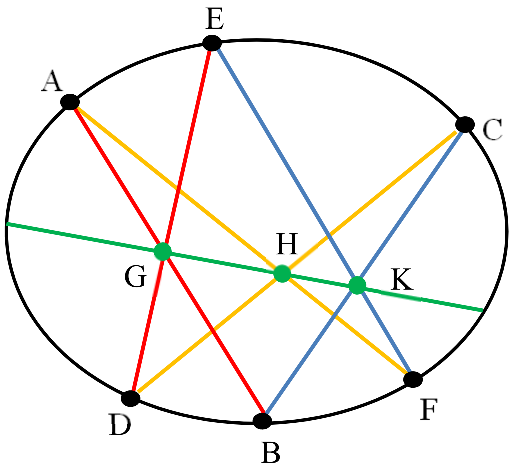
პასკალის თეორემა. *მოცემულია 6 წერტილი, რომლებიც ქმნიან ექვსკუთხედს, რომლის წვეროები მდებარეობს კონუსურ კვეთაზე, მაშინ ამ ექვსკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების სამი წყვილი წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთები იკვეთებიან ერთ წრფეზე მდებარე წერტილებში.*

კონფიგურაციის თეორემებისადმი ინტერესის ზრდა, პაპუსთან, დეზარგთან და პასკალთან, დაკავშირებული იყო გეომეტრიის გაგების უფრო მდიდარ კონტექსტში მოყვანის მცდელობებთან. ვაჩვენოთ ევკლიდეს მე-5 პოსტულატი თანამედროვე ფორმულირებით:

თუ P არის წერტილი, რომელიც არ მდებარეობს L წრფეზე, მაშინ არსებობს L წრფის მიმართ ერთადერთი პარალელური წრფე, რომელიც გადის P წერტილზე.

მცდელობა იმისა, რომ შეიძლებოდა სხვა აქსიომებიდან (საწყისი დაშვებებით) გამოეყვანათ ეს აქსიომა, წარმატებით არ დამთავრებულა. დღეს ჩვენ ვიცით, რატომ ვერ მოხდა ეს: არსებობენ მათემატიკურად (ლოგიკურად არაწინააღმდეგობრივი) გეომეტრიები, სადაც ევკლიდეს მე-5 პოსტულატი არ სრულდება. გარდა ამისა, ადამიანები იკვლევდნენ წერტილოვან/ხაზოვან საკითხებს სფეროზე, მრუდე ზედაპირზე და არა ბრტყელზე, მაგრამ აქ იყო „ბუნებრივი“ დაშვებები, თუ რა შეიძლება იყოს „წრფეები“ და წერტილები ასეთ ზედაპირზე. საბოლოოდ, სფერული გეომეტრია ორ განსხვავებულ მიდგომაში გადაიზარდა. უფრო საინტერესო მიდგომით, წერტილი განიხილებოდა, როგორც წერტილების წყვილი, რომლებიც განლაგებულია დიამეტრის საპირისპირო ბოლოებზე. შეიძლება უცნაურად მოგეჩვენოთ ფიქრი, რომ ორი რამ იდენტიფიცირებულია ისე, რომ ისინი ერთად ჩაითვალოს, მაგრამ ეს თვალსაზრისი ძალიან ნაყოფიერია, რადგან ახლა „ორი წერტილი“ განსაზღვრავს ერთადერთ წრფეს, სფეროს დიდ წრეწირს, რომელიც არის წრეწირი ცენტრით სფეროს ცენტრში.

ბევრ ადამიანს, ვინც გარკვეულწილად იცის გეომეტრია, აწუხებს განსხვავება გრძედსა და განედს შორის. გრძედის წრეწირები არის დიდი წრეწირები, რომლებიც კვეთენ იდეალიზებულ სფეროს, რომელიც წარმოადგენს დედამიწას, სამხრეთ და ჩრდილოეთ პოლუსზე. წრეწირი, რომელიც პოლუსებს შორის არის „ნახევარ გზაზე“ და მდებარეობს პოლუსების შეერთების წრეწირების პერპენდიკულარულ სიბრტყეში, ასევე დიდი წრეწირია და ეს არის სისტემის ეკვატორი. ყველა სხვა განედის წრეწირი არის ეკვატორის „პარალელური“ მაგრამ არ არის დიდი წრეწირი. ისინი არიან მხოლოდ ის წრეწირები, რომლებიც მიიღებიან ეკვატორის პარალელური სიბრტყით სფეროსთან თანაკვეთისას.



ნახ. 6. *დიაგრამა, რომელიც ასახავს პასკალის თეორემას, მოიცავს 6 წერტილს, რომლებიც ჩაწერილია კონუსურ კვეთაში, ამ შემთხვევაში ელიფსში.*

მათემატიკური ცნებების შემოღება სასკოლო კურსში

თეიმურაზ ვეფხვაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი; ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი; მათემატიკურ განათლებაში სამეცნიერო-კვლევითი ინსტიტუტის დირექტორი

მათემატიკური წინადადებებია ცნებების განსაზღვრებები, აქსიომები, თეორემები. აქსიომა არის წინადადება, რომელიც დამტკიცების გარეშე მიიღება. ეს განსაზღვრება განსხვავდება აქსიომის ასეთ გაგებასთან: აქსიომა არის წინადადება, რომელიც არ მოითხოვს დამტკიცებას თავისი თვალსაჩინოების გამო (ან იმის გამო, რომ მრავალჯერადი ცდის შედეგადაა შემოწმებული). მაგალითად, გეომეტრიის ერთ-ერთი პირველი აქსიომაა: „ორ სხვადასხვა წეტილზე შეიძლება გავავლოთ ერთადერთი წრფე"; მეორე წინადადება: „ორი სხვადასხვა წრფე გადაიკვეთება არაუმეტეს ერთ წერტილში" — აქსიომად, როგორც წესი, არ მიიღება, რადგან ის შეიძლება აქსიომების საშუალებით დავამტკიცოთ: რაც შეეხება თვალსაჩინოებას, ორივე წინადადება თვალსაჩინოა.

ზემოთ წარმოვადგინეთ წინადადება, — აქსიომის განსაზღვრება — რომელიც სრული მათემატიკური სიზუსტით არის ჩამოყალიბებული. მათემატიკის სასკოლო კურსის აგების დროს მათემატიკური სიზუსტისა და სიმკაცრის დაცვა ყოველთვის შეუძლებელია (არც არის საჭირო).

ცნობილი მათემატიკოსი და მეთოდისტი ა. შენი აღნიშნავდა (იხ., [1]): „მათემატიკის გამორჩეულ თვისებად მიიჩნევა ზუსტი განსაზღვრებები და მკაცრი დამტკიცებები. ამ რეპუტაციის მხარდასაჭერად, ხშირად, სახელმძღვანელოების ავტორები ვალდებულად თვლიან, რაც შეიძლება ზუსტი განსაზღვრებებით იყოს წარმოდგენილი ცნებები (გარდა ძირითადი ცნებებისა, რომლებიც არ განისაზღვრება)". ავტორი იხილავს რამდენიმე ცნების შემოღების მაგალითს, რომლებიც წინააღმდეგობრივ ასპექტებს შეიცავს; მაგალითად, კუთხის განსაზღვრება ორი სხივის ერთობლიობით ან სიბრტყის წერტილთა სიმრავლით (ბრტყელი კუთხე), კუთხე — როგორც მობრუნების ზომა; ფიგურათა ტოლობის სხვადასხვა განსაზღვრება („ზედდებით", ზომებით, გეომეტრიული გარდაქმნებით). ავტორი ასკვნის: „შეუძლებელია სასკოლო სახელმძღვანელოს ისეთი შედგენა, რომ შევინარჩუნოთ მათემატიკური სიმკაცრე; თუმცა შესაძლოა მეტად „მივუახლოვდეთ" ზუსტ განსაზღვრებებს და ეს მხოლოდ ა. პოგორელოვმა შეძლო (პოგორელოვმა სამკუთხედების ტოლობა ელემენტების ზომებს დაუკავშირა)". თუმცა პოგორელოვის გეომეტრიის სახელმძღვანელოს გამოყენება მე-7 კლასიდან, მოსწავლეთა ასაკის თავისებურებების გათვალისწინებით, მიზანშეუწონლად მიგვაჩნია. ამ მხრივ ჩვენ უფრო ცნობილი მეცნიერის, ჟან დალამბერის (იხ. მაგ., [2]) თვალსაზრისს ვიზიარებთ — მასალის მარტივად და გასაგებად გადმოცემა, სიმარტივისა და სიზუსტის ისეთი შეხამება, რომელიც გამორიცხავს მიუწვდომელ ან მოჩვენებით სიმკაცრეს. დალამბერი

მიზანშეწონილად არ მიიჩნევდა განსაზღვრებებისა და აქსიომების წინასწარ ჩამოყალიბებას.

სტატიაში გვინდა შევეხოთ ცნებების წარმოდგენისას „მოჩვენებითი“ სიმკაცრის დაცვას, ე.წ. ცრუ განსაზღვრებებს, რომლებიც, როგორც წესი, ლოგიკურ წრესა და წინააღმდეგობებს შეიცავს.

მაგალითად, ნატურალური რიცხვების ახსნისას, ზოგიერთი ავტორი (სამწუხაროდ, უმაღლესი სკოლების სახელმძღვანელოებშიც კი) ასეთ „განსაზღვრებას“ გვთავაზობს: „ნატურალური რიცხვები ეწოდება თვლის შედეგად მიღებულ“ რიცხვებს. აქ თითქოს წინ წამოწეულია ნატურალური რიცხვის რიგობითი ასპექტი, მაგრამ, ცხადია, წინააღმდეგობრივია, თვლის პროცესში ნატურალური რიცხვი გვაქვს და თვლის დროს მათ ვიყენებთ. ცხადია, შეუძლებელია ნატურალური რიცხვის აქსიომური მეთოდით შემოტანის რომელიმე ხერხის (პეანოს აქსიომებით, სიმრავლეებს შორის ეკვივალენტობის მიმართების განსაზღვრით) სასკოლო კურსში ჩართვა. მაგრამ სკოლაში (მითუმეტეს დაწყებით საფეხურზე) კითხვის დასმა: რას ეწოდება ნატურალური რიცხვი — არ შეიძლება. მოსწავლეს უნდა შეეძლოს ნატურალური რიცხვების დასახელება, მოქმედებების შესრულება (მაგალითად, თვლის გამოყენებით), მოქმედებათა თვისებების გააზრება. რიცხვის ცნების შემდგომი გაფართოებაც შეიძლება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე დაყრდნობით ვაწარმოოთ: ნატურალურ რიცხვთა წყვილების სიმრავლეზე მიმართების შემოღება:

$$(x_1;y_1) \sim (x_2;y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_2 = x_2 + y_1;$$

ამ მიმართების თვისებების დამტკიცება; დამტკიცება იმისა, რომ ეს მიმართება ეკვივალენტობის მამართებაა და მთელი რიცხვის, როგორც ეკვივალენტობის კლასის სახით შემოღება. ასე მივიღებთ Z სიმრავლეს. შემდეგ შეიძლება შემოვიღოთ მიმართება $Z \times N$ სიმრავლეზე და რაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლის შემოღება. არსებობს სხვა ხერხებიც, რომელთა განხილვა სკოლაში შეუძლებელია. რიცხვის ცნების გაფართოების სქემა შეიძლება მარტივად ასე აღვწეროთ: თავდაპირველად, მოსწავლე ეცნობა ნატურალურ რიცხვებს, რომლებსაც თვლის დროს ასახელებს. ამ სიმრავლეში ყოველთვის სრულდება ორი არითმეტიკული მოქმედება — შეკრება და გამრავლება (პეანოს აქსიომატიკაში ეს მოქმედებებიც შეიძლება „მომდევნოს“ ცნებას დავუკავშიროთ). რაც შეეხება მათ „შებრუნებულ“ მოქმედებებს — გამოკლებას და გაყოფას, ისინი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში ყოველთვის არ სრულდება. ამ მოქმედებების შესრულებადობის სურვილს მივყავართ წილადური და უარყოფითი რიცხვების შემოღებამდე. შედეგად, მივიღებთ რაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლეს. როგორც წესი, წილადური რიცხვები და უარყოფითი რიცხვები ერთდროულად არ შემოდის. სკოლაში თავდაპირველად შემოდის დადებითი წილადი რიცხვები. ამ რიცხვების დამატების შემდეგ, ერთი ნატურალური რიცხვის მეორე ნატურალურ რიცხვზე გაყოფის შესრულება შესაძლებელი ხდება. შემდეგ შემოდის უარყოფითი რაციონალური რიცხვები; შედეგად მიიღება რაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლე. ამასთანავე, კითხვებზე: — რა არის რაციონალური რიცხვი? რას ეწოდება რაციონალური რიცხვი? ასეთ პასუხს ვკითხულობთ:

რაციონალური რიცხვი ეწოდება რიცხვს, რომელიც შეიძლება ჩაიწეროს $\frac{a}{b}$ სახით, სადაც a მთელია, b — ნატურალური.

ეს „განსაზღვრება“, ცხადია, არ არის დამაკმაყოფილებელი. მართლაც, რას ნიშნავს სიტყვები „ეწოდება რიცხვს“. ალბათ, იგულისხმება, რომ ცნობილია რას ნიშნავს „რიცხვი“ — საზოგადოდ, და მათ შორის გამოიყოფა ის რიცხვები, რომლებიც რაციონალურ რიცხვებად ითვლება. თუ ამ „განსაზღვრებას“ ასე გავიგებთ, მაშინ, ბუნებრივია, მივიჩნიოთ, რომ საუბარია რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის გამოყოფაზე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლიდან. მაშასადამე, ზემოთ ჩამოყალიბებული წინადადება შეიძლება ასე გავიგოთ. „ნამდვილ რიცხვს, რომელიც ჩაიწერება $\frac{a}{b}$ $(a \in Z, b \in N)$ სახით, ეწოდება რაციონალური რიცხვი. ამ განსაზღვრებაში მკაფიოდაა მითითებული, რა თვისებით გამოიყოფა რაციონალური რიცხვი ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლიდან. მაგრამ რაციონალური რიცხვის განსაზღვრებად ამ წინადადების მიღება არ შეიძლება. ნამდვილი რიცხვი ხომ უფრო ზოგადი ცნებაა, ვიდრე რაციონალური

რიცხვი; ნამდვილი რიცხვი შემოდის მას შემდეგ, რაც ცნობილი ხდება რაციონალური რიცხვი (გავიხსენოთ $\sqrt{2}$-ის შემოღება, ვამტკიცებთ, $\sqrt{2}$ არ არის რაციონალური რიცხვი). ამიტომ რაციონალური რიცხვის განსაზღვრება ნამდვილი რიცხვით გვაძლევს ლოგიკურ წრეს.

მაშასადამე, ზემოთ მოცემული „განსაზღვრება", რომელიც ზოგიერთი ავტორის მიერ მისაღებად ითვლება, არ შეიძლება ჩაითვალოს კორექტულ მათემატიკურ განსაზღვრებად. როგორ უნდა მოვიქცეთ ამ შემთხვევაში? შეიძლება ისევე მოვიქცეთ, როგორც გეომეტრიაში, როცა გვაქვს განუსაზღვრელი, საწყისი ცნებები და მათი ირიბი განსაზღვრებები აქსიომებით არის წარმოდგენილი. შემოვიღოთ ტერმინი „რაციონალური რიცხვი", ვისარგებლოთ ამ ტერმინით და ჩამოვთვალოთ თვისებები, რომლებიც იძლევა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის „ირიბ" განსაზღვრებას.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს აქვს თვისებები; ყოველი ორი რაციონალური რიცხვისთვის — a და b — არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომელსაც ვუწოდებთ მათ ჯამს: $a+b$ და ჩამოვთვლით ჯამის თვისებებს, მათ შორის, ნატურალური ელემენტის არსებობას. „შებრუნებულის" (მოპირდაპირის) არსებობის ნაცვლად შეიძლება $a+x=b$ განტოლების ამოხსნადობა მოვიყვანოთ. განვსაზღვრავთ გამოკლების შესაძლებლობას.

შეიძლება აქსიომით დავაფიქსიროთ, რომ $N \in Q$. მთელი რიცხვები ვუწოდოთ რაციონალურ რიცხვებს, რომლებიც ჩაიწერება ორი ნატურალური რიცხვის სხვაობის სახით.

შემდეგ შემოდის გამრავლების ოპერაცია, შესაბამისი თვისებით.

ყველა თვისება შეიძლება მივიღოთ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის **განსაზღვრებად.**

მაშასადამე, კითხვაზე, რა რიცხვს ეწოდება რაციონალური რიცხვი, პასუხი შეიძლება ასეთი იყოს: რაციონალური რიცხვი ეწოდება რიცხვს, რომელსაც ზემოთ ჩამოთვლილი თვისებები აქვს.

ანალოგიურად, კითხვაზე: „რა არის ვექტორი?", შეიძლება ვუპასუხოთ: ვექტორი არის ვექტორული სივრცის ელემენტი; ეს სივრცე მოიცემა ვექტორული სივრცის აქსიომებით: პირველი ოთხი აქსიომით მოიცემა შეკრების თვისებები, შემდეგი ოთხი აქსიომით — რიცხვზე გამრავლების თვისებები.

შევეხოთ ირაციონალური რიცხვის „განსაზღვრების" კარგად ცნობილ ფორმულირებას; ვიცით, რომ ყოველი რაციონალური რიცხვი ჩაიწერება უსასრულო პერიოდული ათწილადის ან სასრული ათწილადის სახით და, პირიქით, ყოველი ასეთი ათწილადი გამოსახავს გარკვეულ რაციონალურ რიცხვს. ამიტომ რიცხვი ირაციონალურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის ჩაიწერება უსასრულო არაპერიოდული ათწილადის სახით. ეს თვისება, როგორც წესი, მიიღება ირაციონალური რიცხვის განსაზღვრებად: — „ირაციონალური რიცხვი" ეწოდება რიცხვს, რომელიც ჩაიწერება უსასრულო არაპერიოდული ათწილადის სახით. ეს განსაზღვრებაც არ არის კორექტული. იგი მიუთითებს მხოლოდ ჩაწერის ფორმას და არაფერია ნათქვამი მოქმედებებზე. არ არის საკმარისი მხოლოდ ჩაწერის ფორმის მითითება, საჭიროა, დამატებით, შეკრებისა და გამრავლების განსაზღვრება. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის შემოღება შეიძლება ზემოთ განხილული სქემის ანალოგიურად, როცა შემოვიღეთ რაციონალური რიცხვები. შეიძლება შემოვიღოთ მოქმედებები, მოქმედებათა თვისებები, დალაგების აქსიომები და, დამატებით, აქსიომა, რომელიც იძლევა კიდევ ერთ თვისებას: ყოველ მონოტონურ შემოსაზღვრულ მიმდევრობას ზღვარი აქვს.

შეიძლება შევეხოთ იგივეობისა და განტოლების ცნებების განსაზღვრებებს. აქ გასათვალისწინებელია ის, რომ ცვლადის შემცველი ტოლობის განტოლებად მოხსენიება მიუთითებს ჩვენს დამოკიდებულებაზე ამ ტოლობისადმი. მითითებულ უნდა იქნეს (ან იგულისხმებოდეს), რომ დასმულია ამოცანა: ცვლადის რა მნიშვნელობებისთვის მიიღება ჭეშმარიტი ტოლობა. ხოლო, როცა ვამბობთ, რომ ცვლადის შემცველი ტოლობა იგივეობაა (მოცემულ ტოლობას იგივეობად განვიხილავთ), მაშინ იგულისხმება, რომ ცვლადის ყველა მნიშვნელობისთვის, დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლიდან, მიიღება ჭეშმარიტი რიცხვითი ტოლობა.

ზოგიერთი ცნება სახელმძღვანელოებში სხვადასხვა განსაზღვრებით შემოდის. შეიძლება მათემატიკური სიზუსტე არ იყოს დარღ-

ვეული, მაგრამ განსაზღვრების მიზანშეწონილობაზე შეიძლება საუბარი. მაგალითად, რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი ანდრეი კოლმოგოროვის რედაქციით გამოსახულ სასკოლო სახელმძღვანელოებში ასე იყო განსაზღვრული: a > 0 რიცხვის ხარისხი $r = \frac{m}{n}$ რაციონალური მაჩვენებელი, სადაც m მთელი რიცხვია, ხოლო n ნატურალური (a > 1), ეწოდება რიცხვს $\sqrt[n]{a^m}$ (იხ., მაგ. [3], გვ. 214). აქვე მითითებულია: „a რიცხვის რაციონალური ხარისხი არ განისაზღვრება, როცა a < 0 და ეს შემთხვევითი არ არის. თუ ჩვენ ჩავთვლით, რომ ფორმულა: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ მართებულია a < 0 მნიშვნელობებისასაც, მაშინ, მაგალითად $(-8)^{\frac{1}{3}}$ მნიშვნელობა უნდა უდრიდეს $\sqrt[3]{-8}$-ს, ე.ი. (–2)-ს. მაგრამ, მეორე მხრივ, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ და ამიტომ უნდა შესრულდეს ტოლობა:

$$-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{8^2} = 2 \text{“.}$$

ანალოგიური თვალსაზრისია გატარებული პედაგოგთა სასერტიფიკატო გამოცდილებისთვის განკუთვნილ დავალებებში — რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის განსაზღვრებისას ფუძე დადებითია; გამოცდების ეროვნული ცენტრის მიერ გამოშვებულ ერთ-ერთ კრებულში დავალება 43-ით მოცემულია ამოცანა: „ხარისხის თვისებების შესწავლისას მოსწავლემ შემდეგნაირად „დაამტკიცა“, რომ –1 = 1:

$$-1 = \sqrt[3]{-1} = (-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{2\cdot\frac{1}{6}} = [(-1)^2]^{\frac{1}{6}} =$$
$$= \sqrt[6]{1} = 1 \text{“.}$$

ახსენით, რა შეცდომა დაუშვა მოსწავლემ „დამტკიცებაში“. სკოლაში მიღებული განსაზღვრებების თანახმად, $(-1)^{\frac{1}{3}}$ არ არის განსაზღვრული ([4], გვ. 48). გრიფმინიჭებულ სახელმძღვანელოებშიც, რომლებიც ამჟამად სკოლებში მოქმედებს, რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი დადებითი ფუძის შემთხვევაში განიხილება (იხ., მოც. [5], გვ. 56). ანალოგიურად არის შემოღებული რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი აბიტურიენტებისთვის განკუთვნილ სხვადასხვა კრებულში. თუმცა ზოგიერთ ამერიკულ სახელმძღვანელოში, რომლებიც ჩვენს კერძო სკოლებში გამოიყენება, ვკითხულობთ: „ყოველი ნამდვილი a რიცხვისთვის და ნატურალური m და n რიცხვებისთვის, თუ მოვითხოვთ, რომ $\sqrt[n]{a}$ არსებობს,

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a},\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \text{ და}$$
$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \text{ ".}$$

(იხ., მაგ., [6] და [7]).

აქ ბევრი კითხვის ნიშანი შეიძლება დაისვას. ამ განსაზღვრების მიხედვით, $(-8)^{\frac{1}{3}} = 2$, ხოლო $(-8)^{\frac{2}{6}}$ არ არის განსაზღვრული. სასურველია, რომ საქართველოს სკოლებში მიდგომა ერთნაირი იყოს; რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი არ უნდა იყოს დამოკიდებული რაციონალური რიცხვების ჩანაწერზე — $\frac{1}{3}$ და $\frac{2}{6}$ ერთი და იმავე რიცხვის სხვადასხვა ჩანაწერია. აქ თითქოს არ ირღვევა მათემატიკური სიზუსტე, მაგრამ რაციონალური რიცხვის გააზრებაც გასათვალისწინებელია; გასათვალისწინებელია ის შენიშვნაც, რომელიც ზემოთ იყო მოყვანილი.

ლიტერატურა

1. А. Шень. О "математической строгости" в школьном курсе математики. Москва, мцнмо, 2011.
2. В. Добровольский. Даламбер, "Знание", Москва, 1968.
3. ალგებრა და ანალიზის საწყისები. საშუალო სკოლის მე-10 და მე-11 კლასების სახელმძღვანელო ა. კოლმოგოროვის რედაქციით. თბილისი, 1990.
4. როგორ მოვემზადოთ პედაგოგთა სასერტიფიკატო გამოცდებისთვის. მათემატიკა. გამოცდების ეროვნული ცენტრი. 2008.
5. მათემატიკა. მოსწავლის წიგნი. X კლასი. I სემესტრი. გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე, ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი. გრიფმინიჭებულია საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტროს მიერ 2022 წელს.
6. Algebra and Trigonometry. Iudith A. Beecher, Iudit A. Pema Pearcon, Mavin L. Bitigen. Boston, Sanfrancisco, New York, London, Toronta, Tokyo, Monreal. 2008.
7. Precalculus. Larson, Mostetler. D. C. Heath and Compay, Lexington, Massachusetts. Toronto, 1985.

ფუნქციის გრაფიკის აგება გარდაქმნების საშუალებით

რუსუდან მესხია

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი,
ასისტენტ-პროფესორი,
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

გრაფიკი ფუნქციის მოცემის ერთ-ერთი ხერხია და როცა ფუნქცია ანალიზური სახითაა წარმოდგენილი, გრაფიკის აგებისთვის საჭიროა ფუნქციის თვისებების სრულყოფილი შესწავლა, რასაც, საზოგადოდ, სჭირდება ფუნქციის წარმოებულის გამოყენება. რადგან მათემატიკის სასკოლო კურსში ფუნქციის წარმოებული არ ისწავლება, ამიტომ ფუნქციის გრაფიკის აგება ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების გრაფიკების გარდაქმნის გზით მეტად მნიშვნელოვანია, რამდენადაც ფუნქციის თვისებების შესწავლას არ საჭიროებს. მეორე მხრივ, ასეთი გზით აგებული გრაფიკი გვაძლევს სრულყოფილ ინფორმაციას ფუნქციის თვისებების შესახებ.

ფუნქციის გრაფიკის აგების საკითხი გარდაქმნების საშუალებით განხილულია X კლასის სახელმძღვანელოში [1]. ჩვენ მიერ განხილული სავარჯიშოები ემსახურება ამ თემის უფრო ვრცლად შესწავლას და ყურადღების გამახვილებას მნიშვნელოვან საკითხებზე.

ვთქვათ, A არის ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლის არაცარიელი ქვესიმრავლე. ვიტყვით, რომ A სიმრავლეზე განსაზღვრულია ფუნქცია, თუ A სიმრავლის ყოველი x ელემენტს გარკვეული წესით შეესაბამება ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი და ამ ფაქტს ასე ჩავწერთ: $f : A \to R$. A სიმრავლეს f ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება, f ფუნქციის განსაზღვრის არე $D(f)$-ით აღინიშნება. თუ $x_0 \in A$ მოცემული რიცხვია და მას y_0 ნამდვილი რიცხვი შეესაბამება, მაშინ $y_0 = f(x_0)$ რიცხვს ეწოდება f ფუნქციის მნიშვნელობა x_0 წერტილში.

$x \in A$ ელემენტს დამოუკიდებელი ცვლადი (არგუმენტი) ეწოდება, ხოლო $y = f(x)$ ცვლადს კი — დამოკიდებული.

ამრიგად, ფუნქციის მოცემა ნიშნავს, რომ დასახელებულია განსაზღვრის არე და შესაბამისობის წესი. მაგრამ, შეიძლება ფუნქცია მოცემულ იქნეს ანალიზური სახით, ანუ გარკვეული $y = f(x)$ ფორმულით. ასეთ შემთხვევაში ფუნქციის განსაზღვრის არე არის ყველა იმ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, რომელთათვისაც $f(x)$ გამოსახულებას აზრი აქვს.

ვთქვათ, მოცემულია $f : A \to R$ ფუნქცია, $f(A)$ სიმბოლოთი აღინიშნება სიმრავლე, რომელიც შედგება ყველა იმ y რიცხვებისგან, რომელთათვისაც არსებობს ერთი მაინც x რიცხვი განსაზღვრის არიდან ისეთი, რომ $f(x) = y$. $f(A)$ სიმრავლეს f ფუნქციის მნიშვნელობათა არე ეწოდება და $E(f)$-ით აღინიშნება. მაშასადამე, ფუნქციის მნიშვნელობათა არის

პოვნისთვის უნდა ვიპოვოთ y ცვლადის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y=f(x)$ განტოლებას x ცვლადის მიმართ ერთი მაინც ამონახსნი აქვს.

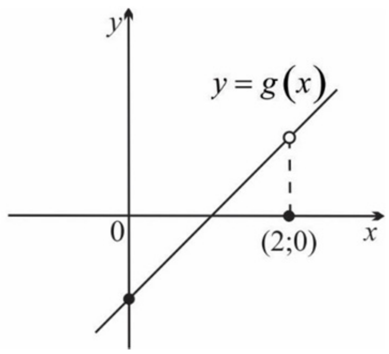
ფუნქციის შესახებ მნიშვნელოვან ინფორმაციას იძლევა ფუნქციის გრაფიკი. ვთქვათ, მოცემულია $f: A \to R$ ფუნქცია. f ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება საკოორდინაციო სიბრტყეზე ყველა შესაძლო $(x; f(x))$ წერტილთა სიმრავლეს, სადაც $x \in A$. f ფუნქციის გრაფიკი Γ_f-ით აღინიშნება:

$$\Gamma_f = \left\{ (x; f(x)) \middle| \ x \in A \right\}.$$

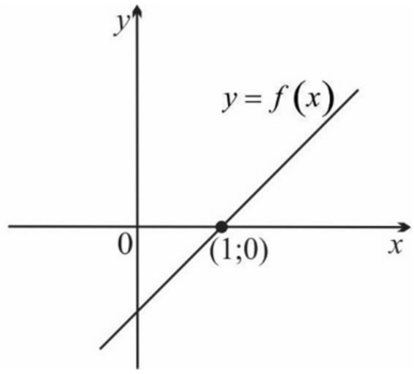
ვთქვათ, მოცემულია $f: A \to R$ და $g: B \to R$ ფუნქციები. ამ ფუნქციებს ტოლი ეწოდება, თუ მათი განსაზღვრის არეები ტოლი სიმრავლეებია, ანუ $A = B$ და ყოველი $x \in A$ რიცხვისთვის $f(x) = g(x)$.

ვთქვათ, B არის A სიმრავლის ქვესიმრავლე, $B \subset A$ და ყოველი $x \in B$ რიცხვისთვის სრულდება $f(x) = g(x)$ ტოლობა, მაშინ g ფუნქციას ეწოდება f ფუნქციის შეზღუდვა B სიმრავლეზე.

განვიხილოთ $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ (იხ. ნახ. 1) და $f(x) = x - 1$ (ნახ. 2) ფუნქციები. $D(g) = R \setminus \{2\}$ და $D(f) = R$ მათი განსაზღვრის არეებია, ამიტომ f და g ფუნქციები არ არის ტოლი $(D(f) \neq D(g))$, მაგრამ, თუ განვიხილავთ f ფუნქციის შეზღუდვას $R \setminus \{2\}$ სიმრავლეზე, მაშინ ის ტოლი იქნება g ფუნქციისა.



ნახ. 1



ნახ. 2

განვიხილოთ ფუნქციასთან დაკავშირებული რამდენიმე მნიშვნელოვანი ცნება.

ფუნქციათა კომპოზიცია. $y = f(x)$ და $y = g(x)$ ფუნქციების კომპოზიცია განისაზღვრება შემდეგი სახით:

$$(f \circ g)x = f(g(x)), \quad g(x) \in D(f).$$

საზოგადოდ, $f \circ g \neq g \circ f$.

$f: A \to R$ ფუნქციას ეწოდება ურთიერთცალსახა, თუ ყოველი $x_1 \neq x_2$ რიცხვებისთვის განსაზღვრის არიდან გვაქვს $f(x_1) \neq f(x_2)$. ვთქვათ, f ურთიერთცალსახა ფუნქციაა, მაშინ შეგვიძლია განვიხილოთ f ფუნქციის შექცეული f^{-1} ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია f ფუნქციის მნიშვნელობათა $f(A)$ არეზე და ყოველი $y \in f(A)$ რიცხვისთვის ადგილი აქვს $f^{-1}(y) = x$ ტოლობას, როცა $f(x) = y$. ამრიგად,

$$f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=x,\quad \forall x\in D\left(f\right),$$

ანუ

$$\left(f^{-1}\circ f\right)\left(x\right)=x,\quad x\in D\left(f\right)$$

და

$$f\left(f^{-1}\left(x\right)\right)=\left(f\circ f^{-1}\right)\left(x\right)=x,\quad \forall x\in E\left(f\right).$$

თუ $D\left(f\right)=E\left(f\right)$, მაშინ:

$$\left(f^{-1}\circ f\right)\left(x\right)=\left(f\circ f^{-1}\right)\left(x\right)=x,\quad x\in D\left(f\right).$$

$y=f\left(x\right)$ და $y=f^{-1}\left(x\right)$ ფუნქციათა გრაფიკები სიმეტრიულია $y=x$ წრფის მიმართ.

ზრდადი და კლებადი ფუნქციები. ვთქვათ, მოცემულია $f:A\to R$ ფუნქცია. f ფუნქციას ეწოდება ზრდადი A სიმრავლეზე, თუ ნებისმიერი x_1 და x_2 რიცხვებისთვის A სიმრავლიდან, როცა $x_1<x_2$, გამომდინარეობს $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$ უტოლობა, ხოლო, თუ $f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$, როცა $x_1<x_2$, მაშინ f ფუნქციას კლებადი ეწოდება A სიმრავლეზე. თუ $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$, $\forall x_1,x_2\in D\left(f\right)$, მაშინ f ფუნქციას მუდმივი ეწოდება A სიმრავლეზე.

ზრდად და კლებად ფუნქციებს მონოტონური ფუნქციები ეწოდებათ.

ლუწი და კენტი ფუნქციები. ვთქვათ, f ფუნქცია განსაზღვრულია კოორდინატთა სისტემის სათავის მიმართ სიმეტრიულ A შუალედში. f ფუნქციას ეწოდება ლუწი, თუ ნებისმიერი $x\in A$ რიცხვისთვის $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$, ხოლო, თუ $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$, მაშინ f ფუნქციას კენტი ფუნქცია ეწოდება. ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ, ხოლო კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სისტემის სათავის მიმართ.

პერიოდული ფუნქცია. $f:A\to R$ ფუნქციას ეწოდება პერიოდული ფუნქცია, პერიოდით $T\neq 0$, თუ ყოველი $x\in D\left(f\right)$ წერტილისთვის $x\pm T\in D\left(f\right)$ და $f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$. თუ T არის პერიოდი, მაშინ $-T$-ც პერიოდია, მართლაც, $f\left(x-T\right)=f\left(x-T+T\right)=f\left(x\right)$. გარდა ამისა, $\pm nT$, $n\in N$ არის აგრეთვე პერიოდი. ჩვეულებრივ, ფუნქციის პერიოდს უწოდებენ ყველა დადებით პერიოდებს შორის უმცირესს.

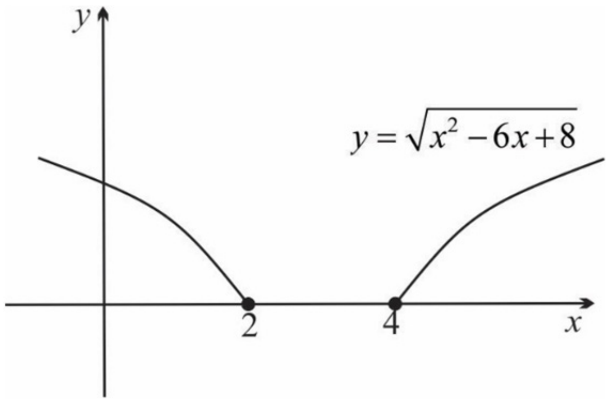
ფუნქციის ექსტრემუმი. ვთქვათ, $f:A\to R$, $x_0\in A$ წერტილს ეწოდება f ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილი, თუ არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო ანუ $\left(x_0-\delta;x_0+\delta\right)$ შუალედი, რომ ყოველი $x\in\left(x_0-\delta;x_0+\delta\right)\cap A$-თვის სამართლიანია $f\left(x\right)\leq f\left(x_0\right)$ $\left(f\left(x\right)\geq f\left(x_0\right)\right)$ უტოლობა.

ლოკალური მაქსიმუმისა და ლოკალური მინიმუმის წერტილებს ლოკალური ექსტრემუმის წერტილები ეწოდება. ფუნქციის მნიშვნელობას ლოკალური ექსტრემუმის წერტილში ეწოდება ლოკალური ექსტრემუმი.

შევნიშნოთ, რომ ზემოთ მოყვანილი ლოკალური ექსტრემუმის განსაზღვრების თანახმად, $x_0\in A$ ჩაითვლება ლოკალური ექსტრემუმის წერტილად მაშინაც, როცა სრულდება $f\left(x\right)\leq f\left(x_0\right)$ ან $f\left(x\right)\geq f\left(x_0\right)$ უტოლობა x_0-ის მარცხენა $\left(x_0-\delta;x_0\right]$ ან მარჯვენა $\left[x_0;x_0+\delta\right)$ მიდამოში. X კლასის სახელმძღვანელოში [1] მოყვანილი განსაზღვრების თანახმად, x_0 წერტილს ლოკალური მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილი ეწოდება, თუ არსებობს x_0

წერტილის ისეთი $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ მიდამო, რომ სრულდება პირობა: $f(x)\le f(x_0)$ $(f(x)\ge f(x_0))$, როცა $x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$. ამიტომ, ამ განსაზღვრების თანახმად, x_0 წერტილის ცალმხრივ მიდამოში შესაბამისი უტოლობის შესრულებისას, x_0 არ ითვლება ლოკალური ექსტრემუმის წერტილად.

განვიხილოთ $f(x)=\sqrt{x^2-6x+8}$ ფუნქცია, $D(f)=(-\infty;2]\cup[4;+\infty)$ (იხ. ნახ. 3)



ნახ. 3

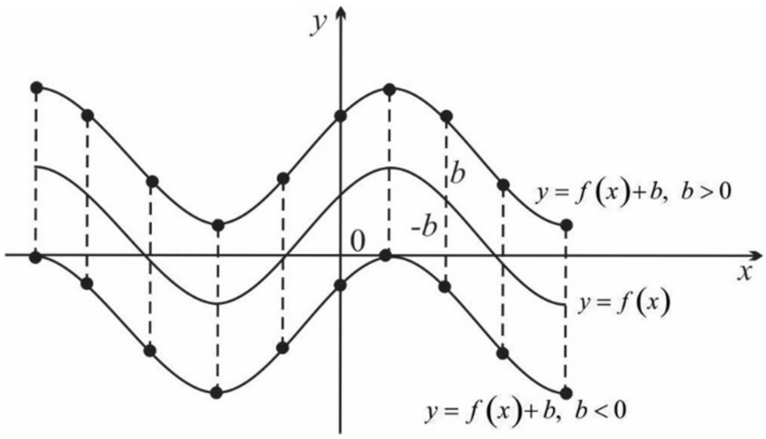
$f(2)=f(4)=0$, ცხადია $f(x)\ge f(2)$, $x\in(-\infty;2]$ და $f(x)\ge f(4)$, $x\in[4;+\infty)$, ამიტომ $x=2$ და $x=4$ ლოკალური მინიმუმის წერტილებია.

$x_0\in A$ წერტილს ეწოდება $f:A\to R$ ფუნქციის გლობალური მაქსიმუმის (გლობალური მინიმუმის) წერტილი, თუ ყოველი $x\in A$ წერტილისთვის ადგილი აქვს $f(x)\le f(x_0)$ $(f(x)\ge f(x_0))$ უტოლობას. გლობალური მაქსიმუმისა და გლობალური მინიმუმის წერტილებს გლობალური ექსტრემუმის წერტილები ეწოდება. შევნიშნოთ, რომ $f(x)=\sqrt{x^2-6x+8}$ ფუნქციისთვის $x=2$ და $x=4$ წერტილები აგრეთვე გლობალური მინიმუმის წერტილებიცაა. მაშასადამე, ზოგიერთი ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი შეიძლება იყოს გლობალური ექსტრემუმის წერტილიც.

მათემატიკის სასკოლო კურსიდან ცნობილია ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების თვისებები და მათი გრაფიკები. ჩვენ განვიხილავთ ფუნქციის გრაფიკის აგების ამოცანას ძირითდი ელემენტარული ფუნქციების გრაფიკების გარდაქმნის გზით.

ამოცანა 1. $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით ავაგოთ $y=f(x)+b$ ფუნქციის გრაფიკი.

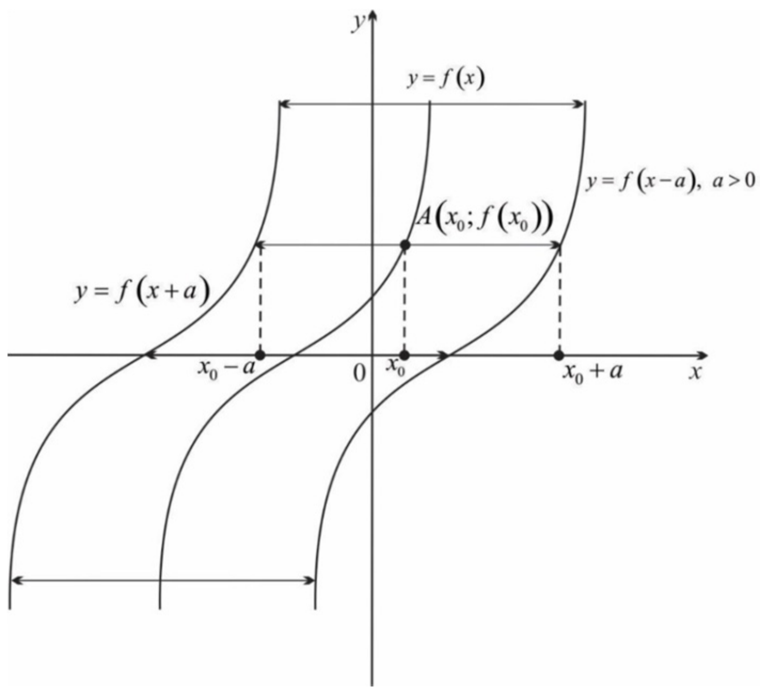
ამოხსნა. ნებისმიერი $x_0\in D(f)$ მნიშვნელობისთვის $A(x_0;f(x_0))$ წერტილი ეკუთვნის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს, ხოლო $A_1(x_0;f(x_0)+b)$ წერტილი კი – $y=f(x)+b$ ფუნქციის გრაფიკს. A_1 წერტილი მიიღება A წერტილისგან პარალელური გადაადგილების შედეგად oy ღერძის მიმართულებით b ერთეულით ზევით, თუ $b>0$ და $-b$ ერთეულით ქვევით, თუ $b<0$. ამრიგად, $y=f(x)+b$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=f(x)$ ფუნქციის პარალელური გადატანით $\vec{a}(0;b)$ ვექტორით (იხ. ნახ. 4). შევნიშნოთ, რომ $\vec{a}(c;d)$ ვექტორის მიხედვით პარალელური გადატანა საკოორდინატო სიბრტყის ყოველ $A(x_0;y_0)$ წერტილს გადაიტანს $A_1(x_0+c;y_0+d)$ წერტილში.



ნახ. 4

ამოცანა 2. მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი. ავაგოთ $y = f(x+a)$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. ავიღოთ $A(x_0; f(x_0))$ წერტილი $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკზე, მაშინ $A_1(x_0 - a; f(x_0))$ წერტილი ეკუთვნის $y = f(x+a)$ ფუნქციის გრაფიკს. ამრიგად, $y = f(x+a)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით $\vec{b}(-a;0)$ ვექტორით (იხ. ნახ. 5). ანალოგიურად, $y = f(x-a)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით $\vec{b}(a;0)$ ვექტორით.



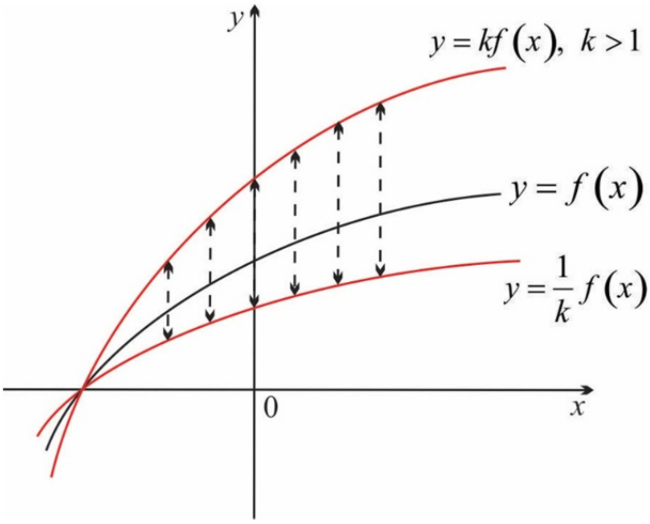
ნახ. 5

გრაფიკის შეკუმშვა და გაჭიმვა

ამოცანა 3. მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი და ავაგოთ $y = kf(x)$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. ავიღოთ $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის $A(x_0; f(x_0))$ წერტილი, მაშინ $A_1(x_0; kf(x_0))$ წერტილი ეკუთვნის $y = kf(x)$ ფუნქციის გრაფიკს. ამრიგად, $y = kf(x)$ ფუნ-

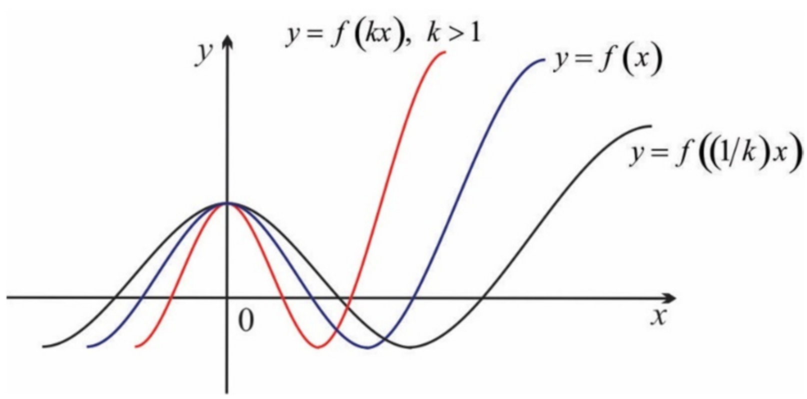
ქციის გრაფიკი მიიღება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისგან, მისი ნებისმიერი წერტილის ორდინატის k-ჯერ გაზრდით (k-ჯერ გაჭიმვით OX ღერძიდან), როცა $k>1$, ხოლო როცა $0<k<1$, მაშინ ორდინატა $\frac{1}{k}$-ჯერ მცირდება (ანუ იკუმშება $\frac{1}{k}$-ჯერ OX ღერძისკენ) (იხ. ნახ. 6).



ნახ. 6

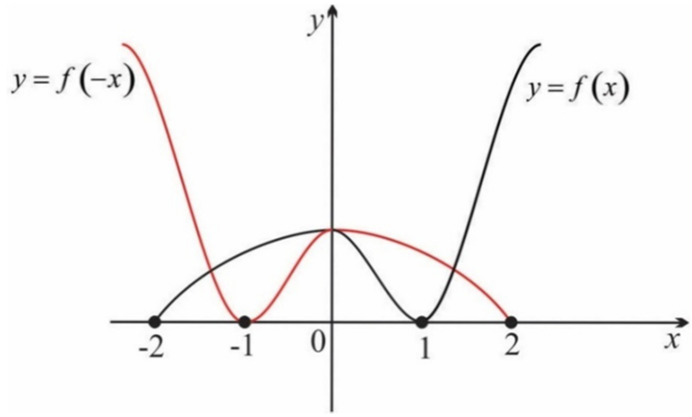
ამოცანა 4. მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი. ავაგოთ $y=f(kx)$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. $A(x_0;f(x_0))$ წერტილი ეკუთვნის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს, ხოლო $\left(\frac{1}{k}x_0;f(x_0)\right)$ ეკუთვნის $y=f(kx)$ ფუნქციის გრაფიკს. ამრიგად, $y=f(kx)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისგან მისი ნებისმიერი წერტილის აბსცისის k-ჯერ შემცირებით (k-ჯერ შეკუმშვით oy ღერძისკენ), თუ $k>1$ და $\frac{1}{k}$-ჯერ გაზრდით ($\frac{1}{k}$-ჯერ გაჭიმვით oy ღერძიდან), თუ $0<k<1$ (იხ. ნახ. 7).



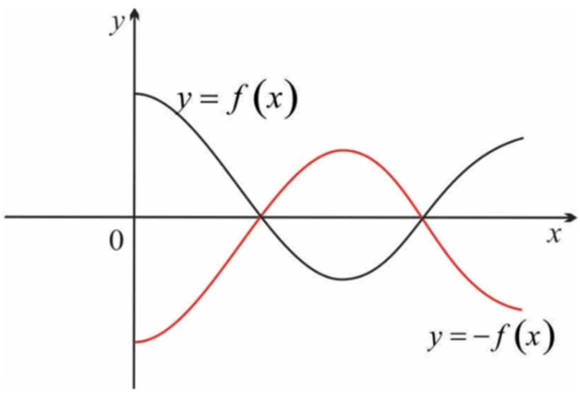
ნახ. 7

შევნიშნოთ, რომ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკიდან oy ღერძის მიმართ სიმეტრიული ასახვით მიიღება $y=f(-x)$ ფუნქციის გრაფიკი. მართლაც, თუ $(x_0;f(x_0))$ წერტილი ეკუთვნის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს, მაშინ $(-x_0;f(x_0))$ ეკუთვნის $y=f(-x)$ ფუნქციის გრაფიკს (იხ. ნახ. 8).



ნახ. 8

$y=-f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისგან Ox ღერძის მიმართ სიმეტრიული ასახვით (იხ. ნახ. 9).

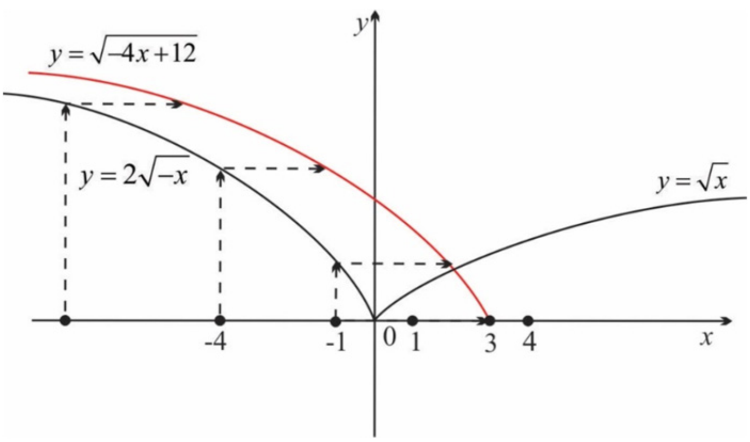


ნახ. 9

განვიხილოთ მაგალითები ფუნქციათა გრაფიკების გარდაქმნის შესახებ.

მაგალითი 1. ავაგოთ $y=\sqrt{-4x+12}$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. $y=\sqrt{-4x+12}=2\sqrt{-(x-3)}$, ამიტომ, ამ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად საკმარისია ავაგოთ $y=\sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკი, შემდეგ $y=\sqrt{-x}$, რომელიც სიმეტრიულია oy ღერძის მიმართ, შემდეგ $y=2\sqrt{-x}$ ფუნქციის გრაფიკი Ox ღერძიდან 2-ჯერ გაჭიმვით და ბოლოს, მიღებული გრაფიკის პარალელური გადატანით $\vec{p}(3;0)$ ვექტორის მიმართულებით (იხ. ნახ. 10).



ნახ. 10

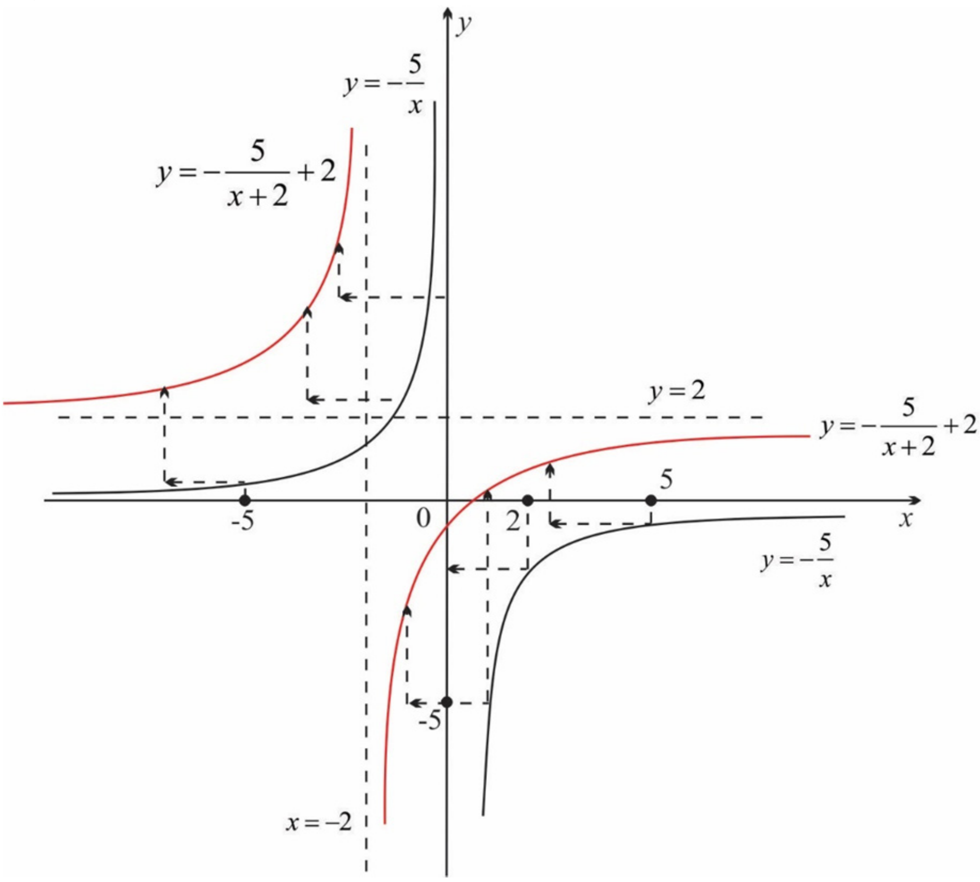
$y=\sqrt{-4x+12}$ ფუნქციის გრაფიკიდან დავასკვნით, რომ ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა: $(-\infty;3]$, მნიშვნელობათა არეა $[0;+\infty)$, ფუნქცია კლებადია განსაზღვრის არეზე, $x=3$ არის როგორც ლოკალური მინიმუმის, ისე გლობალური მინიმუმის წერტილი, ფუნქცია ურთიერთ-ცალსახაა, ამიტომ მას გააჩნია შექცეული ფუნქცია.

მაგალითი 2. ავაგოთ $y=\frac{2x-1}{x+2}$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. $y=\frac{2x-1}{x+2}=\frac{2(x-1/2)}{x+2}=2\left(1-\frac{2.5}{x+2}\right)=2-\frac{5}{x+2}$;

$y=2-\frac{5}{x+2}$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=-\frac{5}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით ჯერ $\vec{p}(-2;0)$ და შემდეგ $\vec{q}(0;2)$ ვექტორით (იხ. ნახ. 11).

$y=\frac{2x-1}{x+2}$ ფუნქციის გრაფიკიდან (ნახ. 11) შეიძლება დავასკვნათ, რომ ამ ფუნქციის გან-საზღვრის არეა: $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$, მნიშვნელობათა არეა: $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$. ფუნქციის ზრდადობის შუალედებია: $(-\infty;-2)$ და $(-2;+\infty)$. ექსტრემუმის წერტილები არ აქვს, არის ურთიერთცალსახა.



ნახ. 11

ზოგადად, $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ წილადწრფივი ფუნქციის გრაფიკის აგება ხდება ანალოგიური გზით: $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით ჯერ $\vec{p}\left(-\frac{d}{c};0\right)$ და შემდეგ $\vec{q}\left(0;\frac{a}{c}\right)$ ვექტორებით, თუ ამ ფუნქციას ჩავწერთ შემდეგი სახით:

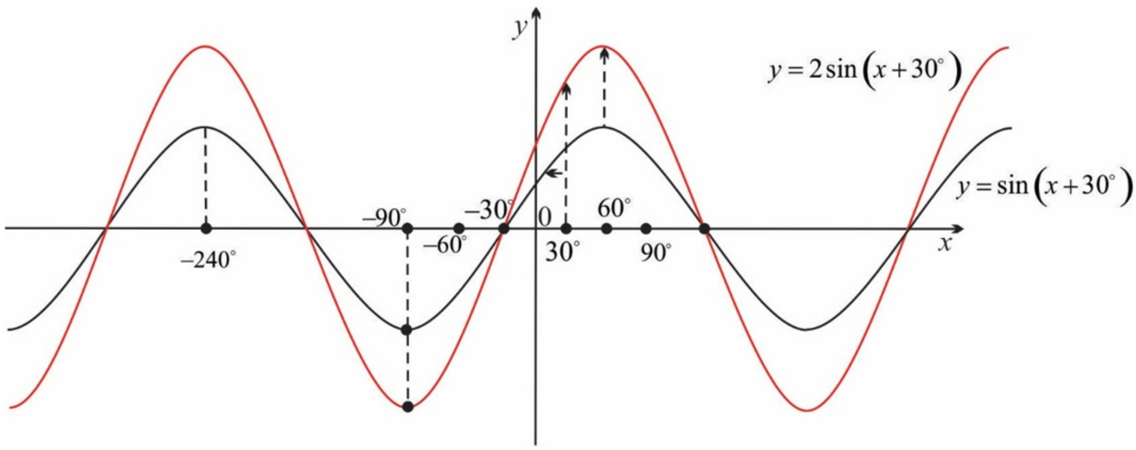
$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a(x+b/a)}{c(x+d/c)}=\frac{a}{c}\left(1+\frac{b/a-d/c}{x+d/c}\right)=\frac{a}{c}+\frac{(bc-ad)/c^2}{x+d/c}=\frac{a}{c}+\frac{k}{x+d/c},$$

სადაც

$$k=\frac{bc-ad}{c^2}.$$

მაგალითი 3. ავაგოთ $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, ამიტომ, ამ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი უნდა გადავიტანოთ პარალელურად $\vec{p}\left(-\frac{\pi}{6};0\right)$ ვექტორით და შემდეგ გავჭიმოთ Ox ღერძიდან 2-ჯერ (იხ. ნახ. 12)



ნახ. 12

შევნიშნოთ, რომ ანალოგიური გზით შეიძლება ავაგოთ $y=a\sin x+b\cos x$, $a,b\in R$ ფუნქციის გრაფიკი, თუ ამ ფუნქციას ჩავწერთ შემდეგი სახით:

$$y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$$

სადაც

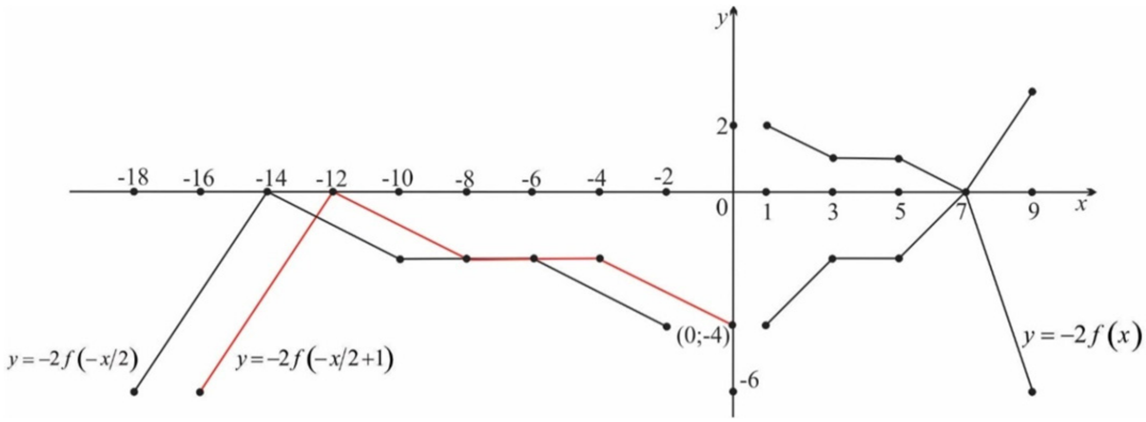
$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \varphi\in[0;2\pi).$$

მაგალითი 4. მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი (იხ. ნახ. 13). ავაგოთ $y=-2f\left(1-\frac{x}{2}\right)$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. $y=-2f\left(1-\frac{x}{2}\right)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკიდან შემდეგი გარდაქმნების თანმიმდევრული განხორციელებით:

$$f(x)\to -f(x)\to -2f(x)\to -2f(-x)\to -2f\left(-\frac{x}{2}\right)\to -2f\left(-\frac{x}{2}+1\right)$$

(იხ. ნახ. 13)



ნახ. 13

შევნიშნოთ, რომ, ზოგადად, $y=f(kx+b)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=f(kx)$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით $\left(-\frac{b}{k};0\right)$ ვექტორის მიმართულებით.

გარდა ფუნქციათა გრაფიკების ზემოთ აღწერილი გარდაქმნებისა, შეიძლება განვიხილოთ $y=f(kx+b)$ და $y=f\left(ax^2+bx+c\right)$ ფუნქციათა კომპოზიციის გრაფიკის აგების საკითხი, როცა $y=f(x)$ ძირითადი ელემენტარული ფუნქციაა. $y=kx+b$ ფუნქციის გრაფიკი არის წრფე, რომელიც სიმეტრიულია $M_0\left(-\frac{b}{k};0\right)$ $(k\neq 0,\ \ k,b\in R)$ წერტილის მიმართ. მართლაც, ვთქვათ, $x_1=-\frac{b}{k}+\alpha$ და $x_2=-\frac{b}{k}-\alpha$ (α ნებისმიერი დადებითი რიცხვია), მაშინ:

$$y(x_1)=kx_1+b=k\left(-\frac{b}{k}+\alpha\right)+b=-b+\alpha k+b=\alpha k,$$

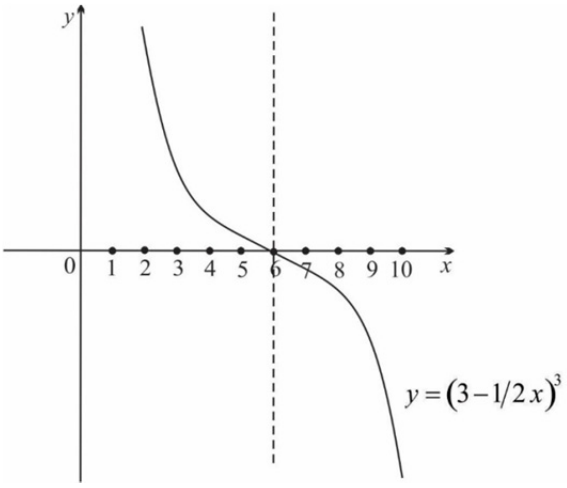
$$y(x_2)=kx_2+b=-\alpha k$$

ე. ი. $y(x_1)=-y(x_2)$, ამიტომ, $M_1(x_1;y_1)$ და $M_2(x_2;y_2)$ წერტილები სიმეტრიულია $M_0\left(-\frac{b}{k};0\right)$ წერტილის მიმართ. ამრიგად, $y=kx+b$ წრფე სიმეტრიულია M_0 წერტილის მიმართ.

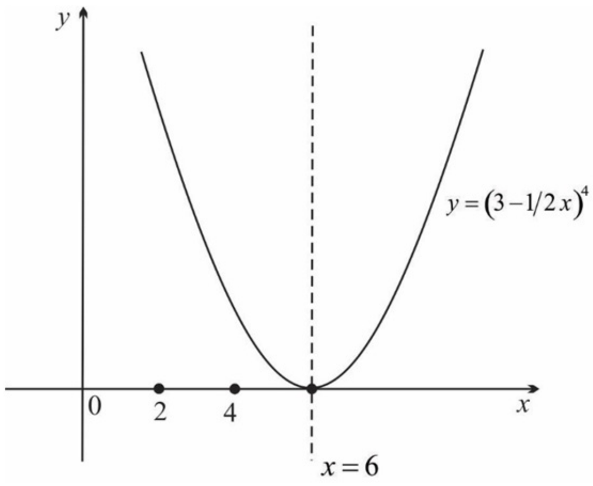
მაგალითი 5. ავაგოთ $y=\left(3-\frac{1}{2}x\right)^3$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. განვიხილოთ $y=3-\frac{1}{2}x$ წრფე. რადგან ის სიმეტრიულია $M_0(6;0)$ წერტილის მიმართ და $y=y_1^3$ კენტი ფუნქციაა, ამიტომ $y=\left(3-\frac{1}{2}x\right)^3$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიული იქნება M_0 წერტილის მიმართ. მისი გრაფიკის ასაგებად საკმარისია შევადგინოთ შემდეგი სახის ცხრილი, სადაც არგუმენტის მნიშვნელობებს განვიხილავთ $M_0(6;0)$ წერტილის მიმართ სიმეტრიულ წერტილებში.

x	6	8	10	4	2
y_1	0	-1	-2	1	2
y_1^3	0	-1	-8	1	8
y_1^4	0	1	16	1	16



ნახ. 14



ნახ. 15

ანალოგიურად, $y=\left(3-\frac{1}{2}x\right)^4$ ფუნქციის გრაფიკი შეიძლება დავხაზოთ იმის გათვალისწინებით, რომ $y=y_1^4$ ფუნქცია არის ლუწი ფუნქცია და $y=\left(3-\frac{1}{2}x\right)^4$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიული იქნება $x=6$ წრფის მიმართ (იხ. ნახ. 15).

$y=f\left(ax^2+bx+c\right)$ **სახის ფუნქციის გრაფიკის აგება.** $y_1=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0,\ a,b,c\in R)$ კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი პარაბოლაა, რომელიც სიმეტრიულია $x=-\frac{b}{2a}$ წრფის მიმართ, ამიტომ $y=f\left(ax^2+bx+c\right)$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიული იქნება $x=-\frac{b}{2a}$ წრფის მიმართ.

მაგალითი 6. ავაგოთ $y=3^{x^2-2x-3}$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. $y_1=x^2-2x-3$ ფუნქციის გრაფიკი პარაბოლაა. მისი დამახასიათებელი წერტილებია ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები: $(0;-3)$, $(-1;0)$ და $(3;0)$, პარაბოლის წვერო $(1;-4)$.

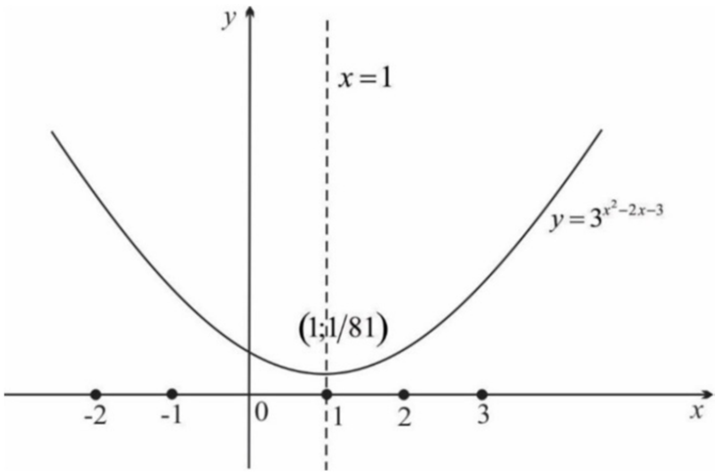
$y=3^{x^2-2x-3}$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა: $(-\infty;+\infty)$ შუალედი. გრაფიკი სიმეტრიული იქნება $x=1$ წრფის მიმართ.

შევადგინოთ $y_1=x^2-2x-3$ და $y=3^{y_1}$ ფუნქციების მნიშვნელობათა ცხრილი:

x	0	1	2	3	-1
y_1	-3	-4	-3	0	0
y	$1/27$	$1/81$	$1/27$	1	1

$y=3^{x^2-2x-3}$ ფუნქციის გრაფიკს ექნება შემდეგი სახე (ნახ. 16)

ამ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $\left(\frac{1}{81};+\infty\right)$ შუალედი, კლებადობის შუალედია $(-\infty;1]$, ზრდადობის შუალედია $[1;+\infty)$; $x=1$ არის როგორც ლოკალური, ისე გლობალური მინიმუმის წერტილი.



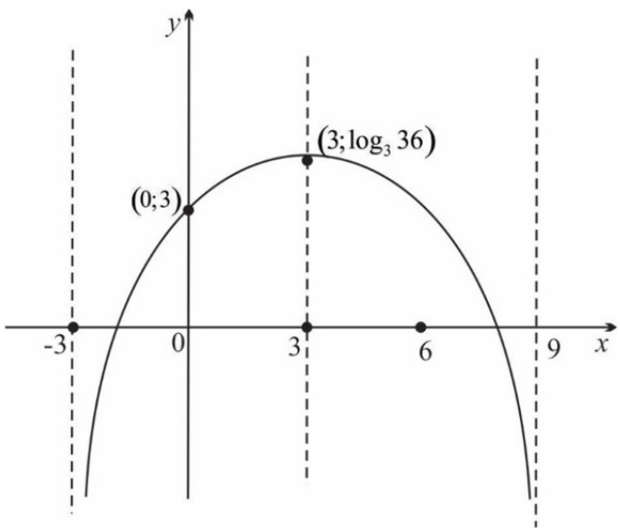
ნახ. 16

მაგალითი 7. ავაგოთ $y=\log_3\left(-x^2+6x+27\right)$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. $y=\log_3\left(-x^2+6x+27\right)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-3;9)$ შუალედი; $y_1=-x^2+6x+27$ ფუნქციის გრაფიკი პარაბოლაა, რომლის წვეროს კოორდინატებია: $(3;36)$, ღერძებთან გადაკვეთის წერტილებია: $(-3;0)$, $(9;0)$ და $(0;27)$. შევადგინოთ $y_1=-x^2+6x+27$ და $y=\log_3 y_1$ ფუნქციების მნიშვნელობათა ცხრილი. გავითვალისწინოთ, რომ $y=\log_3\left(-x^2+6x+27\right)$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $x=3$ წრფის მიმართ და ავაგოთ გრაფიკი (იხ. ნახ. 17).

x	0	3	6
y_1	27	36	27
y	3	$\log_3 36$	3

$y=\log_3\left(-x^2+6x+27\right)$ ფუნქციის გრაფიკიდან ვღებულობთ, რომ ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა: $(-\infty;\log_3 36]$, ზრდადია $(-3;3]$ შუალედში, ხოლო $[3;9)$ შუალედში კი — კლებადია; $x=3$ არის როგორც ლოკალური მაქსიმუმის, ისე გლობალური მაქსიმუმის წერტილი.



ნახ. 17

ამრიგად, როგორც განხილული მაგალითებიდან ჩანს, ფუნქციის გრაფიკი გვაძლევს მნიშვნელოვან ინფორმაციას მისი თვისებების შესახებ, ამიტომ ფუნქციის გრაფიკის აგება ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების გრაფიკების გარდაქმნის საშუალებით მოითხოვს ამ საკითხისადმი განსაკუთრებულ ყურადღებას.

ლიტერატურა

[1] გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ., მათემატიკა — X კლასი, II სემესტრი, გამომცემლობა „ინტელექტი“, 2022.

[2] გოგინავა უ., დანელია ა., კოპალიანი თ., ნადიბაიძე გ., კალკულუსი, სალექციო კურსი, თბილისი, 2007.

[3] Райхмист Р. Б., Графики функций, Москва, 1991.

ავტორის ელექტრონული მისამართი: rusudan.meskhia@tsu.ge

ნორჩი ქართველი მათემატიკოსები საერთაშორისო ოლიმპიადებში

გიორგი ჭელიძე

ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების ლიდერი,
ასოცირებული პროფესორი,
ქუთაისის საერთაშორისო უნივერსიტეტი

გივი ნადიბაიძე

ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების თანალიდერი,
ასისტენტ-პროფესორი,
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

64-ე საერთაშორისო ოლიმპიადა მათემატიკაში ჩატარდა იაპონიის ქალაქ ჩიბაში 3-13 ივლისის პერიოდში. ასპარეზობაში მონაწილეობა მიიღო 112-მა ქვეყანამ და გუნდები, ტრადიციულად, 6-6 მოსწავლისაგან შედგებოდა. საქართველოს ნაკრებს წარმოადგენდნენ: თორნიკე ბერია (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი), დავით კლდიაშვილი (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი), ალექსანდრე კორკოტაშვილი (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი), თამარ ფეიქრიშვილი (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი), გურამ მაჭარაშვილი (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი) და ივანე ყულჯანიშვილი (თბილისის ი. ვეკუას სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი).

საქართველოს მოსწავლეთა ნაკრები გუნდი მათემატიკის საერთაშორისო ოლიმპიადებში მონაწილეობს 1993 წლიდან. 2023 წლის ოლიმპიადაზე საქართველო ოცდამეთერთმეტედ მონაწილეობდა და ქართველმა მოსწავლეებმა განსაკუთრებულ წარმატებას მიაღწიეს. გუნდის ექვსივე წევრმა დაიმსახურა ჯილდო: 1 ოქრო (დავით კლდიაშვილი, კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი); 4 ბრინჯაო (თორნიკე ბერია, თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი; ალექსანდრე კორკოტაშვილი, თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი; თამარ ფეიქრიშვილი, თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი; გურამ მაჭარაშვილი, თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი) და 1 საპატიო სიგელი (ივანე ყულჯანიშვილი, თბილისის ი. ვეკუას სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი).

ქვემოთ დიაგრამაზე ნაჩვენებია 2023 წლის მონაწილეთა შედეგები:

Contestant [♀♂]	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Total	Rank		Award
								Abs.	Rel.	
Team results	**42**	**17**	**11**	**42**	**16**	**1**	**129**	**38**	**66.67%**	**G, B, B, B, B, HM**
Davit Kldiashvili	7	7	7	7	4	1	33	46	92.71%	Gold medal
Tornike Beria	7	7	1	7	2	0	24	145	76.66%	Bronze medal
Aleksandre Korkotashvili	7	1	1	7	3	0	19	279	54.94%	Bronze medal
Tamar Peikrishvili	7	1	0	7	3	0	18	297	52.03%	Bronze medal
Guram Matcharashvili	7	1	0	7	3	0	18	297	52.03%	Bronze medal
Ivane Kuljanishvili	7	0	2	7	1	0	17	315	49.11%	Honourable mention

Leader: **George Chelidze**
Deputy leader: **Givi Nadibaidze**

საქართველოს ოლიმპიური ნაკრების ფორმირება მოხდა ორი შესარჩევი ტურის შედეგის საფუძველზე. შესარჩევ წერებს ადმინისტრირებას უწევდა შოთა რუსთაველის სახელობის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი. მკაცრად რეგლამენტირებულ 2-ტურიან წერით გამოცდებში მონაწილეობის უფლება კი მოიპოვეს რესპუბლიკური სასკოლო მათემატიკური ოლიმპიადის ტურების შედეგებზე დაყრდნობით გამოვლენილმა საუკეთესო მოსწავლეებმა. შესარჩევი წერების საფუძველზე დაკომპლექტდა 6-მოსწავლიანი ნაკრები.

შოთა რუსთაველის სახელობის ეროვნული სამეცნიერო ფონდიდან ამ პროცესს ადმინისტრირებას უწევდა ქალბატონი მაკა ქაჯაია, ხოლო განათლებისა და მეცნიერების სამინისტროდან პროცესს კურირებდა ქალბატონი ნინო ცანდიშვილი. ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების დაკომპლექტების შემდეგ, სამკვირიანი საწვრთნელი მეცადინეობები ჩატარდა კომაროვის სკოლის ბაზაზე ყოველდღიური 6-საათიანი მეცადინეობებით. მოსწავლეთა მომზადება დასრულდა ერთკვირიანი წვრთნებით ბაკურიანში. მოსწავლეებს უტარდებოდათ სატრენინგო წერები საერთაშორისო ოლიმპიადების პირობების გათვალისწინებით.

გუნდის მომზადებაში მონაწილეობდა ასისტენტი გიორგი სვანაძე, რომელიც ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის წარმატებული დოქტორანტია. ასევე მოსწავლეთა მომზადებაში მონაწილეობდნენ გამოცდილი ყოფილი ოლიმპიელები: გიორგი არაბიძე, ლუკა მაჭარაშვილი, ანა ონოფრიშვილი, დემეტრე გელაშვილი, მარიამ იარდავა.

ქვემოთ მოვიყვანთ იმ ამოცანებს, რომლებიც მიეცათ მოსწავლეებს წერებზე:

ამოცანა 1. იპოვეთ ყველა შედგენილი მთელი რიცხვი $n > 1$, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისება: თუ $d_1, d_2, \dots, d_k$, სადაც $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ არის n-ის ყველა დადებითი გამყოფი, მაშინ d_i ყოფს $d_{i+1} + d_{i+2}$, ყოველი $1 \le i \le k-2$.

ამოხსნა: ადვილი შესამოწმებელია, რომ $n = p^r$, ნებისმიერი მარტივი p-სთვის და ყოველი მთელი $r \ge 2$-სთვის, აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას.

ვაჩვენოთ, რომ სხვა ტიპის შედგენილი რიცხვი არ არსებობს, ანუ, თუ n აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას, მაშინ მას არ შეიძლება ჰქონდეს ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული მარტივი გამყოფი. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ p არის n-ის უმცირესი მარტივი გამყოფი, ხოლო q, სადაც $q > p$-ზე, დარჩენილ მარტივ გამყოფებს შორის უმცირესია. დავალაგოთ n-ის გამყოფები ზრდის მიხედვით, გვექნება $1 < p < \cdots < p^k < q < \cdots < n$. შევნიშნოთ, რომ, თუ

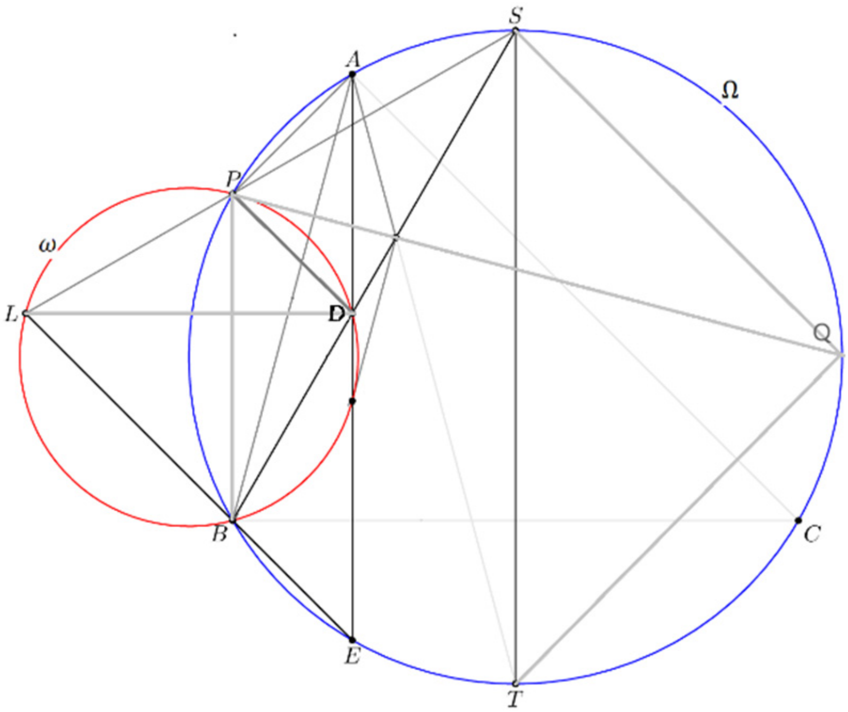
$k \geq 2$-ზე, მაშინ ამოცანის პირობის თანახმად, $p^{k-1}|p^k+q$ და ამიტომ $p|q$, რაც შეუძლებელია. ამრიგად ზრდის მიხედვით დალაგებულ n – ის გამყოფებს ექნება ასეთი სახე: $1<p<q<\cdots<\frac{n}{q}<\frac{n}{p}<n$, საიდანაც ვღებულობთ, რომ $\frac{n}{q}|\frac{n}{p}+n$, ანუ $p|q+pq$ და ე.ი. $p|q$, რაც კვლავ წინააღმდეგობაა. ამრიგად, ჩვენი დაშვება, რომ n-ს აქვს ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული მარტივი გამყოფი, მცდარია. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

პასუხი: $n=p^r$, სადაც p მარტივია და $r \geq 2$.

ამოცანა 2. მახვილკუთხა ABC სამკუთხედში AB გვერდის სიგრძე ნაკლებია AC გვერდის სიგრძეზე. ვთქვათ Ω არის ABC-ზე შემოხაზული წრეწირი და ვთქვათ S არის Ω -ს იმ CB რკალის შუაწერტილი, რომელიც A წვეროს შეიცავს. A წერტილზე BC წრფისადმი გავლებული პერპენდიკულარი BS-ს კვეთს D წერტილში, ხოლო Ω-ს მეორედ კვეთს $E \neq A$ წერტილში. D წერტილზე გამავალი BC-ს პარალელური წრფე BE წრფეს კვეთს L წერტილში. ვთქვათ ω არის სამკუთხედ BDL-ზე შემოხაზული წრეწირი და ვთქვათ ω მეორედ კვეთს Ω წრეწირს $P \neq B$ წერტილში.

დაამტკიცეთ, რომ P წერტილზე ω-ს მიმართ გავლებული მხები BS წრფესთან იკვეთება $\angle BAC$-ს შიდა ბისექტრისაზე.

ამოხსნა: ვთვათ T არის S-ის დიამეტრალურად მოპირდაპირე, ანუ BC რკალის შუაწერტილი. ცხადია, რომ AT წარმოადგენს $\angle BAC$-ს ბისექტრისას. ვთქვათ ω-ს მიმართ P წერტილზე გამავალი მხები Ω -ს მეორედ კვეთს $Q \neq P$ წერტილში. გვაქვს $\angle SQT=90^o$.



ამოცანის ამოსახსნელად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ APD და TQS სამკუთხედები ერთმანეთის მსგავსია და $AP||TQ$, $PD||QS$, $DA||ST$. მართლაც, მაშინ შესაბამისი წვეროების შემაერთებელი მონაკვეთები, კერძოდ, BAC კუთხის AT ბისექტრისა, P წერტილზე ω-ს მიმართ გავლებული PQ მხები და DS მონაკვეთი ერთ წერტილში გადაიკვეთება და ამით ამოცანის ამოხსნა დასრულდება. აქვე შევნიშნოთ, რომ DA და ST გვერდებს საპირისპირო მიმართულება აქვთ და ამიტომ ეს სამი წრფე ერთმანეთის პარალელური ვერ იქნება.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ $AP \perp DP$. ამისათვის განვიხილოთ ციკლური $APBE$ და $DPLB$ ოთხკუთხედები, საიდანაც მივიღებთ, რომ:

$$\angle PAD=\angle PAE=180^o-\angle EBP=\angle PBL=\angle PDL=90^o-\angle ADP.$$

სამკუთხედ APD- ში გვაქვს $\angle DPA = 180^o - \angle PAD - \angle ADP = 90^o$. ამრიგად:

- ADE და ST წრფეები მართობულია BC წრფის და ამიტომ $AD||TS$.
- PQ წრფე არის ω წრის მხები, ამიტომ $\angle DPQ = \angle DBP = \angle SBP = \angle SQP$, საიდანაც ვღებულობთ $PD||QS$.
- დაბოლოს, ვინაიდან $AP \perp PD||QS \perp TQ$, გვაქვს $AP||TQ$.

ამრიგად დავამტკიცეთ, რომ APD და TQS სამკუთხედების შესაბამისი გვერდები ერთმანეთის პარალელურია. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

ამოცანა 3. ყოველი მთელი $k \geq 2$-თვის იპოვეთ მთელ დადებით რიცხვთა ყველა უსასრულო მიმდევრობა $a_1, a_2, \ldots$, რომლისთვისაც არსებობს ისეთი პოლინომი $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1x + c_0$, სადაც $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია, რომ

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \ldots a_{n+k} \text{ ყოველი მთელი } n \geq 1.$$

ამოხსნა: ჯერ ვაჩვენოთ, რომ $(a_n)_{n\in N}$ არაკლებადია. დავუშვათ საწინააღმდეგო, $a_n > a_{n+1}$ რომელიღაც n-თვის. განვიხილოთ უმცირესი $m \geq n$ ინდექსი, ისეთი, რომ $a_m = \min\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$. ცხადია, $m \geq n+1$ და $a_{m-1} > a_m$. ვინაიდან $P(x)$-ის კოეფიციენტები არაუარყოფითია, ამიტომ $P(x)$, როგორც x -ის ფუნქცია, ზრდადია, საიდანაც ვღებულობთ, რომ $P(a_{m-1}) = a_m \ldots a_{m+k-1} >$ $> P(a_m) = a_{m+1} \ldots a_{m+k}$ და ე.ი. $a_m > a_{m+k}$, რაც a_m-ის განსაზღვრებას ეწინააღმდეგება. ამრიგად ვაჩვენეთ, რომ $a_n \leq a_{n+1}$, ყოველი n-თვის. აქვე შევნიშნოთ, რომ, თუ რომელიმე n-თვის გვაქვს $a_n = a_{n+1}$, მაშინ $P(a_n) = P(a_{n+1})$ ტოლობიდან გვექნება, რომ $a_{n+1} = a_{n+k+1}$ და არაკლებადობის გამო $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{n+k+1}$. აქედან კი ინდუქციის გამოყენებით ადვილად მივიღებთ, რომ მიმდევრობა მუდმივია. ამრიგად, დაგვრჩა შემთხვევა, როცა $(a_n)_{n\in N}$ მიმდევრობა მკაცრად ზრდადია. ამ შემთხვევაში დავამტკიცოთ, რომ $(a_n)_{n\in N}$ იქნება არითმეტიკული პროგრესია, რომლის სხვაობაც დადებითი რიცხვია. გადავწეროთ $P(a_n)$ შემდეგნაირად: $P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \ldots a_{n+k} = (a_n + (a_{n+1} - a_n))(a_n + (a_{n+2} - a_n)) \ldots (a_n + (a_{n+k} - a_n))$. ვაჩვენოთ, რომ საკმარისად დიდი n-თვის $(a_{n+1} - a_n) + (a_{n+2} - a_n) + \cdots + (a_{n+k} - a_n) = c_{k-1}$. ამისათვის დავამტკიცოთ შემდეგი

ლემა. არსებობს ისეთი $A > 0$, რომელსაც აქვს შემდეგი ორი თვისება:

1. თუ $(b_1, \ldots, b_k)$ დადებით მთელ რიცხვთა ისეთი k-ეულია, რომ $b_1 + \cdots + b_k > c_{k-1}$, მაშინ ყოველი $x \geq A$ -თვის გვაქვს $P(x) < (x+b_1) \ldots (x+b_k)$.
2. თუ $(b_1, \ldots, b_k)$ დადებით მთელ რიცხვთა ისეთი k-ეულია, რომ $b_1 + \cdots + b_k < c_{k-1}$, მაშინ ყოველი $x \geq A$ -თვის გვაქვს $P(x) > (x+b_1) \ldots (x+b_k)$.

დამტკიცება: ჯერ ვაჩვენოთ, რომ 1 წინადადება ჭეშმარიტია ყოველი ფიქსირებული დადებითი $(b_1, \ldots, b_k)$-თვის. მართლაც, $P(x) - (x+b_1) \ldots (x+b_k) = (c_{k-1} - (b_1 + \cdots + b_k))x^{k-1} +$ (წევრები, რომელთა ხარისხები $\leq k-2$), და რადგანაც პირობის გამო მთავარი კოეფიციენტი უარყოფითია, ამიტომ მთლიანი გამოსახულებაც უარყოფითი იქნება საკმარისად დიდი x-თვის. ვთქვათ ახლა A_1 საერთო ზედა საზღვარია ყველა $(b_1, \ldots, b_k)$ ისეთი k-ეულისთვის სადაც $b_1 + \cdots + b_k = c_{k-1} + 1$. ცხადია, ასეთი არსებობს, ვინაიდან არსებობს მხოლოდ სასრული რაოდენობა ასეთი k-ეულების და თითოეულის ზედა საზღვრებს შორის მაქსიმალურს ავარჩევთ. ახლა ნებისმიერი $({b_1}', \ldots, {b_k}')$-თვის, სადაც ${b_1}' + \cdots + {b_k}' > c_{k-1}$ განვიხილოთ ისეთი $(b_1, \ldots, b_k)$, რომ $b_1 + \cdots + b_k = c_{k-1} + 1$ და ${b_1}' \geq b_1$, ..., ${b_k}' \geq b_k$ და მაშინ, ცხადია, გვექნება $P(x) < (x+b_1) \ldots (x+b_k) \leq (x+{b_1}') \ldots (x+{b_k}')$ ნებისმიერი $x \geq A_1$. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, ისეთი A_2-ის არსებობას, რომლისთვისაც წინადადება 2 მართებულია. ცხადია, რომ ყოველი x-თვის, სადაც $x \geq \max(A_1, A_2)$, სრულდება როგორც წინადადება 1, ისე წინადადება 2. ლემა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ ახლა ისეთი A, რომლისთვისაც სრულდება ლემა და ავიღოთ ისეთი დიდი N, რომ, როცა $n \geq N$, მაშინ $a_n \geq A$. მაშინ $\forall n \geq N$, გვაქვს:

$$(a_{n+1} - a_n) + (a_{n+2} - a_n) + \cdots + (a_{n+k} - a_n) = c_{k-1} .$$

დავწეროთ იგივე პირობა $n+1$-თვის:

$$(a_{n+2} - a_{n+1}) + (a_{n+3} - a_{n+1}) + \cdots + (a_{n+k+1} - a_{n+1}) = c_{k-1}$$

და განვიხილოთ სხვაობა წინა ტოლობასთან, მივიღებთ:

$$a_{n+k+1} - a_{n+1} = k(a_{n+1} - a_n) , \forall n \geq N.$$

ვთქვათ $d = \min\{a_{n+1} - a_n : n \geq N\}$ და ვთქვათ ის მიიღწევა რაიმე $n \geq N$ ინდექსისთვის. მაშინ ზემოთ მიღებული ტოლობიდან გამომდინარე ვღებულობთ:

$$kd = k(a_{n+1} - a_n) = a_{n+k+1} - a_{n+1} = (a_{n+k+1} - a_{n+k}) + \cdots + (a_{n+2} - a_{n+1}) \geq kd$$

ე.ი. $(a_{n+k+1} - a_{n+k}) = \cdots = (a_{n+2} - a_{n+1}) = d$ და მარტივი ინდუქციის გამოყენებით, გვექნება $(a_{n+m+1} - a_{n+m}) = d$, ყოველი ნატურალური m-თვის. ეს კი ნიშნავს, რომ მართებულია ტოლობა $P(x) = (x+d)(x+2d)\dots(x+kd)$ ყოველი x-თვის, აქედან კი მარტივად ვღებულობთ, რომ $a_{n+1} - a_n = d, \forall n \geq 1$.

პასუხი: $(a_n)_{n\in N}$ არის დადებითი მთელი რიცხვებისგან შემდგარი არითმეტიკული პროგრესია, რომლის სხვაობა $d \geq 0$.

ამოცანა 4. ვთქვათ $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ ისეთი ნამდვილი დადებითი რიცხვებია, რომ ყოველი ორი მათგანი ერთმანეთისაგან განსხვავებულია და

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

არის მთელი რიცხვი ყოველი $n = 1,2, \dots ,2023$. დაამტკიცეთ, რომ $a_{2023} \geq 3034$.

ამოხსნა: შემოვიღოთ აღნიშვნები $X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ და $Y_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}$. ამრიგად გვაქვს, $a_n = \sqrt{X_n Y_n}$ და

$$a_{n+2} = \sqrt{(X_n + x_{n+1} + x_{n+2})\left(Y_n + \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right)} =$$

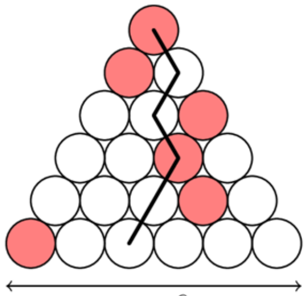
$$\sqrt{{a_n}^2 + X_n\left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right) + Y_n(x_{n+1} + x_{n+2}) + (x_{n+1} + x_{n+2})\left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right)} >$$

$$\sqrt{{a_n}^2 + 4\sqrt{X_n Y_n} + 4} = \sqrt{{a_n}^2 + 4a_n + 4} = a_n + 2.$$

რადგანაც a_n მთელი რიცხვია, ამიტომ $a_{n+2} \geq a_n + 3$ და ვღებულობთ

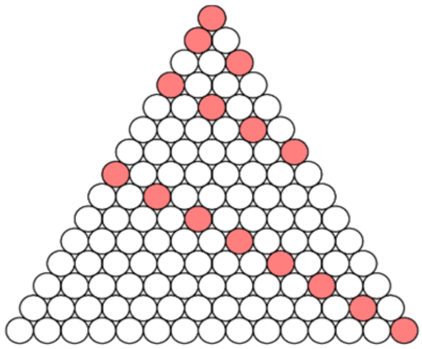
$$a_{2023} \geq a_1 + \sum_{i=1}^{1011} 3 = 3034 \text{ , რ. დ. გ.}$$

ამოცანა 5. ვთქვათ n მთელი დადებითი რიცხვია. იაპონური სამკუთხედი ვუწოდოთ ტოლგვერდა სამკუთხედის ფორმაში ისეთნაირად განლაგებულ $1 + 2 + \cdots + n$ ცალ წრეს, რომ ყოველი $i = 1,2, \dots, n$ -თვის, i–ური სტრიქონი შეიცავდეს ზუსტად i ცალ წრეს, რომელთაგან მხოლოდ ერთი წრეა წითლად გაფერადებული. ნინძას ბილიკი ვუწოდოთ იაპონურ სამკუთხედში ისეთ n წრის მიმდევრობას, რომელიც იწყება სამკუთხედის თავში მდებარე წრიდან და ყოველი მომდევნო წრე არის წინა წრის უშუალოდ ქვემოთ მდგომი ორი წრიდან ერთ-ერთი. სურათზე მოცემულია იაპონური სამკუთხედის მაგალითი, როცა $n = 6$ და ამ სამკუთხედში ნინძას ბილიკი, რომელიც ორ წითელ წრეს შეიცავს.



მოცემული n-თვის იპოვეთ k-ს უდიდესი მნიშვნელობა, ისეთი, რომ ყოველ იაპონურ სამკუთხედში არსებობდეს ნინძას ბილიკი, რომელიც, სულ მცირე, k ცალ წითელ წრეს შეიცავდეს.

ამოხსნა: ვაჩვენოთ, რომ, თუ N ისეთია, რომ $2^N \le n \le 2^{N+1} - 1$, მაშინ ამოცანის პასუხია $k = 1 + N$, ანუ $k = 1 + [\log_2 n]$. ჯერ მოვიყვანოთ ისეთი იაპონური სამკუთხედის მაგალითი, რომელშიც არ იარსებებს ნინძას ბილიკი, რომელიც $1 + N$-ზე მეტ წითელ წრეს შეიცავს. ამისათვის ზემოდან i-ურ სტრიქონში, სადაც $i = 2^a + b$, $0 \le a \le N$ და $0 \le b < 2^a$, შევღებოთ მარცხნიდან $2b + 1$ ადგილას მდგომი ბურთი.



მაშინ ცხადია, რომ ყოველი ნინძას ბილიკი გაივლის არა უმეტეს ერთ წითელ ბურთზე $2^a, 2^a + 1, \dots, 2^{a+1} - 1$ სტრიქონებიდან, სადაც $0 \le a \le N$. აქედან კი ვღებულობთ, რომ $k \le 1 + [\log_2 n]$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ყოველი შეღებვისთვის, ანუ ყოველი იაპონური სამკუთხედისთვის, არსებობს ნინძას ბილიკი, რომელიც, სულ მცირე, $1 + N$ ცალ წითელ ბურთს შეიცავს და ამით ამოცანის ამოხსნა დასრულდება.

ყოველ წრეში ჩავწეროთ მაქსიმალური რიცხვი, რომელიც გვიჩვენებს წითელი ბურთების რაოდენობას იმ ნინძას ბილიკში, რომელიც იწყება სამკუთხედის თავში მდებარე წრიდან და მთავრდება მოცემულ წრეში. შევნიშნოთ, რომ:

- თუ წრე წითელი არაა, მაშინ მასში წერია მაქსიმალური იმ ორ (ან ერთ) რიცხვს შორის, რომლებიც ჩაწერილია მოცემული წრის უშუალოდ ზემოთ მყოფ ორ (ერთ) ბურთში.
- თუ წრე წითელია, მაშინ მასში წერია ზემოთ აღწერილ მაქსიმუმს დამატებული 1.

ვთქვათ ახლა i–ურ სტრიქონში წერია რიცხვები $v_1, v_2, \dots, v_i$ და ვთქვათ v_m მათში მაქსიმალურია. მაშინ $i + 1$ სტრიქონში წერია, სულ მცირე, ორი v_m, ანუ $i + 1$ სტრიქონს აქვს სახე $v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m, v_m, v_{m+1} \dots v_i$ იმ წითელი ბურთის გაუთვალისწინებლად, რომელიც $i + 1$ სტრიქონში მდებარეობს. ამრიგად $i + 1$ სტრიქონში ჩაწერილი რიცხვების S_{i+1} ჯამი მეტია ან ტოლი წინა i სტრიქონში ჩაწერილი რიცხვების S_i ჯამს დამატებული $v_m + 1$. ამ დაკვირვების საფუძველზე ინდუქციის გამოყენებით დავამტკიცოთ შემდეგი

ლემა. $S_{2^j} \ge j \cdot 2^j + 1$, ყოველი $0 \le j \le N$.

დამტკიცება: წინადადება, ცხადია, მართებულია, როცა $j = 0$, ვინაიდან სამკუთხედის თავში 1-იანი წერია. დავუშვათ წინადადება მართებულია j-თვის, მაშინ 2^j სტრიქონში ჩაწერილი

მაქსიმალური რიცხვი, სულ მცირე, $j+1$-ია და ამიტომ ყოველი $k \geq 2^j$-თვის, k-ური სტრიქონის რომელიღაც წრეში წერია $j+1$. ზემოთ აღნიშნული დაკვირვების თანახმად გვექნება:

$$S_{k+1} \geq S_k + (j+1) + 1 = S_k + j + 2$$

და ამიტომ:

$$S_{2^{j+1}} \geq S_{2^j} + 2^j(j+2) \geq j \cdot 2^j + 1 + 2^j(j+2) = (j+1)2^{j+1} + 1.$$

ლემა დამტკიცებულია.

როცა $j = N$, მაშინ, ლემის თანახმად, სტრიქონში ნომრით 2^N მოიძებნება წრე, რომელშიც $N+1$ მაინც წერია, ეს კი ნიშნავს რომ არსებობს ნინძას ბილიკი, რომელიც, სულ მცირე, $N+1$ ცალ წითელ წრეს შეიცავს. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

პასუხი: $k = 1 + [\log_2 n]$.

ამოცანა 6. ვთქვათ ABC ტოლგვერდა სამკუთხედია და ვთქვათ A_1, B_1, C_1 არის ABC სამკუთხედის ისეთი შიგა წერტილები, რომ: $BA_1 = A_1C, CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ და

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^o.$$

ვთქვათ BC_1 და CB_1 იკვეთება A_2 წერტილში, ხოლო CA_1 და AC_1 იკვეთება B_2 წერტილში და AB_1 და BA_1 იკვეთება C_2 წერტილში.

დაამტკიცეთ, რომ, თუ $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის ნებისმიერი ორი გვერდის სიგრძე ერთმანეთისაგან განსხვავებულია, მაშინ სამივე წრეწირი, შემოხაზული, შესაბამისად, AA_1A_2, BB_1B_2 და CC_1C_2 სამკუთხედებზე, გადის ორ საერთო წერტილზე.

ამოხსნა: AA_1A_2, BB_1B_2 და CC_1C_2 სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირები აღვნიშნოთ, შესაბამისად, δ_A, δ_B და δ_C-თი. ამოცანის ამოსახსნელად საკმარისია ვიპოვოთ ისეთი წერტილი X, რომელიც სამივე წრეწირის შიგა წერტილია და X-სგან განსხვავებული Y წერტილი, რომლებსაც ტოლი ხარისხები ექნებათ δ_A, δ_B და δ_C-ს მიმართ. მართლაც, ამ შემთხვევაში სამივე წრეწირს საერთო რადიკალური ღერძი აქვთ და რადგანაც X სამივე წრეწირის შიგა წერტილია, ამიტომ ეს საერთო რადიკალური ღერძი δ_A, δ_B და δ_C გადაკვეთს ორ განსხვავებულ წერტილში და ე.ი. ეს ორი წერტილი იქნება δ_A, δ_B და δ_C-თვის საერთო წერტილები.

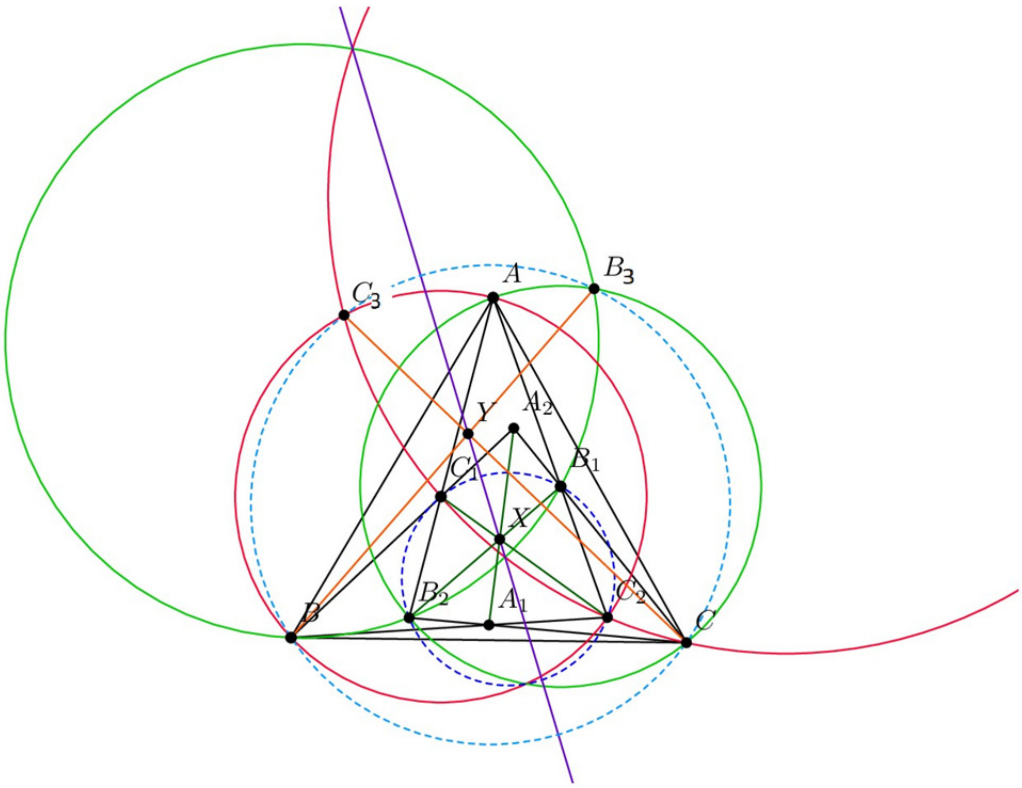
ჯერ ვაჩვენოთ, რომ A_1 არის სამკუთხედ A_2BC-ზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი. ვინაიდან A_1 ძევს BC-ს შუამართობზე და $\triangle\ A_2BC$-ს შიგნით, ამიტომ საკმარისია დავამტკიცოთ ტოლობა $\angle BA_1C = 2\angle BA_2C$.

გვაქვს $\angle BA_2C = \angle A_2BA + \angle BAC + \angle ACA_2 = \frac{1}{2}((180^o - \angle AC_1B) + (180^o - \angle CB_1A) + 60^o = 240^o - \frac{1}{2}(480^o - \angle BA_1C) = \frac{1}{2}\angle BA_1C$. ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ B_1 და C_1 არის, შესაბამისად, $\triangle\ B_2AC$ და $\triangle\ C_2AB$-ზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრები. ამის გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$\angle B_1B_2C_1 = \angle B_1B_2A = \angle B_2AB_1 = \angle C_1AC_2 = \angle AC_2C_1 = \angle B_1C_2C_1$$

და ამიტომ $B_1C_1B_2C_2$ ციკლურია. ანალოგიურად ვაჩვენებთ $C_1A_1C_2A_2$ და $A_1B_1A_2B_2$ ციკლურობას. ამრიგად, თუ გამოვიყენებთ თეორემას რადიკალური ღერძების შესახებ, მივიღებთ, რომ A_1A_2, B_1B_2 და C_1C_2 იკვეთება ერთ X წერტილში, რომელსაც δ_A, δ_B და δ_C-ს მიმართ ერთმანეთის ტოლი ხარისხი აქვს (შევნიშნოთ, რომ $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ ციკლური არაა, ვინაიდან $\angle C_2A_1B_2 + \angle B_2C_1A_2 + \angle A_2B_1C_2 = 480^o \neq 360^o$).

ვთქვათ δ_A მეორედ კვეთს $\triangle\ A_2BC$-ზე შემოხაზულ წრეწირს $A_3 \neq A_2$ წერტილში. ანალოგიურად განვსაზღვროთ B_3 და C_3 წერტილები. ვაჩვენოთ, რომ $BC\ B_3\ C_3$ ციკლურია. ვთქვათ $\measuredangle$ აღნიშნავს მიმართულ კუთხეს, გვაქვს, $\measuredangle B\ C_3C = \measuredangle B\ C_3\ C_2 + \measuredangle\ C_2\ C_3C = \measuredangle BA\ C_2 + \measuredangle\ C_2\ C_1C = 90^o + \measuredangle(\ C_1C,\ AC_2) + \measuredangle\ C_2\ C_1C = 90^o + \measuredangle\ C_1\ C_2B_1$.



ანალოგიურად, $\measuredangle C\,B_3B = 90^o + \measuredangle\,B_1\,B_2\,C_1$ და $B_1\,C_1\,B_2\,C_2$-ის ციკლურობის გათვალისწინებით ვღებულობთ $\measuredangle BB_3C = 90^o + \measuredangle\,C_1\,B_2B_1 = 90^o + \measuredangle\,C_1\,C_2B_1 = \measuredangle B\,C_3C$, რისი ჩვენებაც გვინდოდა. ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ $CA\,C_3A_3$ და ABA_3B_3 ციკლურია. შევნიშნოთ, რომ $A\,C_3BA_3CB_3$ ციკლური არაა, რადგანაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში, $A\,B_2CB_3$-ის ციკლურობიდან გამომდინარე, გამოვიდოდა, რომ B_2 ძევს ABC სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირზე, რაც შეუძლებელია (B_2 არის $\triangle\,ABC$-ს შიგნით). ამრიგად, თუ კვლავ გამოვიყენებთ თეორემას რადიკალური ღერძების შესახებ, მივიღებთ, რომ $A\,A_3$, $B\,B_3$, $C\,C_3$ გადაიკვეთება Y წერტილში, რომელსაც ერთმანეთის ტოლი ხარისხი აქვს δ_A , δ_B და δ_C-ს მიმართ. სანამ დავასრულებთ ამოცანის ამოხსნას, შევნიშნოთ შემდეგი:

1. ვთქვათ O არის $\triangle\,ABC$-ზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი, მაშინ $\angle BA_1C = 480^o - \angle CB_1A - \angle AC_1B > 480^o - 180^o - 180^o = 120^o$, რაც ნიშნავს, რომ A_1 ძევს $\triangle\,BOC$-ს შიგნით. ანალოგიურ შედეგს მივიღებთ B_1 და C_1 წერტილებისთვის და ამრიგად, $\triangle\,B\,A_1C$,$\triangle\,C\,B_1A$, $\triangle\,A\,C_1B$ თანაუკვეთი შიგთავსები აქვთ. აქედან გამომდინარე, $A_1\,B_2\,C_1\,A_2\,B_1\,C_2$ ამოზნექილი ექვსკუთხედია და X წერტილი, როგორც $A_1\,A_2$ სეგმენტის წერტილი, იქნება δ_A-ს შიგნით.
2. რადგანაც A_1 არის A_2BC ცენტრი, ამიტომ $A_1A_2 = A_1A_3$ და ციკლური $AA_2\,A_1A_3$ ოთხკუთხედიდან ვღებულობთ, რომ AA_2 და $AA_3 \equiv AY$ წრფეები ერთმანეთის სარკული ანარეკლებია AA_1 წრფის მიმართ. რადგან X წერტილი $A_1\,A_2$ სეგმენტზე ძევს, ამიტომ $X \equiv Y$ დამთხვევა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, თუ A_1 და A_2, ორივე BC-ს შუამართობზეა. მაგრამ მაშინ $A_1B_1 = A_1C_1$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

ავტორების ელექტრონული მისამართები:

giorgi.chelidze@kiu.edu.ge

givi.nadibaidze@tsu.ge

წინა ნომრის ამოცანების ამოხსნები

ამოცანა 1

ვთქვათ, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ამოზნექილი მრავალკუთხედის გვერდებია, ხოლო P მისი პერიმეტრი. აჩვენეთ, რომ:

$$\frac{a_1}{P-a_1}+\frac{a_2}{P-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{P-a_n}\geq\frac{n}{n-1}.$$

ამოხსნა: აღვნიშნოთ $P-a_i=y_i$. მაშინ:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = nP-\sum_{i=1}^{n} a_i=(n-1)P$$

და

$$a_i=P-y_i=\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} y_j\right)-y_i=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{j\neq i} y_j-(n-2)y_i\right).$$

მიღებული ტოლობების გათვალისწინებით გვექნება:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{P-a_i}=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{y_j}{y_i}-(n-2)n\right).$$

თუ ინდექსთა ყოველი (i,j) წყვილისათვის გამოვიყენებთ უტოლობას $\frac{y_i}{y_j}+\frac{y_j}{y_i}\geq 2$, გვექნება :

$$\frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{y_j}{y_i}-(n-2)n\right)=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{j\neq i}\left(\frac{y_j}{y_i}+\frac{y_i}{y_j}\right)-(n-2)n\right)\geq$$

$$\geq\frac{1}{n-1}((n-1)n-(n-2)n)=\frac{n}{n-1}.$$

ამოცანა 2

ა) აჩვენეთ, რომ არსებობს $a,b,c\in Z$ მთელი რიცხვები, რომლებიც ერთდროულად არაა ნული და სამართლიანია შემდეგი უტოლობები: $|a|,|b|,|c|<10^6$ და

$$|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|<10^{-11}.$$

ბ) აჩვენეთ, რომ, თუ $0\leq|a|,|b|,|c|<10^6$, სადაც $a,b,c\in Z$ ერთდროულად ნულის არატოლი მთელი რიცხვებია, მაშინ:

$$|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|>10^{-21}.$$

ამოხსნა: განვიხილოთ რიცხვთა სიმრავლე:

$$S=\left\{r+s\sqrt{2}+t\sqrt{3}\right\}_{r,s,t\in\{0,1,\ldots,10^6-1\}}.$$

S სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობა ტოლია 10^{18}. აღვნიშნოთ $d=(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})10^6$. S სიმრავლის ნებისმიერი x ელემენტისათვის გვაქვს $0\leq x<d$. $[0,d]$ მონაკვეთი დავყოთ $10^{18}-1$ ტოლ $[(k-1)e,ke]$ მონაკვეთად, სადაც $e=10^{-18}d$ და $k=1,\ldots,10^{18}-1$. იარსებებს ორი ელემენტი $x,y\in S$, რომლებიც ერთ რომელიმე ქვესეგმენტში მდე-

ბარეობენ. ამ ელემენტებისათვის გვექნება $|x-y|\le e<10^{-11}$. ცხადია, $x-y\in S$.

ვთქვათ:

$$F_1=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}, F_2=a+b\sqrt{2}-c\sqrt{3}, F_3=a-b\sqrt{2}+c\sqrt{3}, F_4=-a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}.$$

შევნიშნოთ, რომ რიცხვები $1,\sqrt{2},\sqrt{3}$ მთელ რიცხვთა Z სიმრავლის მიმართ წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ $F_i\ne 0, i=0,1,2,3,4.$ გარდა ამისა, $F=F_1F_2F_3F_4\in Z$ და $|F_1|\ge 1/|F_2F_3F_4|>10^{-21}$, ვინაიდან $1/|F_i|>10^{-7}$.

ამოცანა 3

დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური $n\ge 2$ რიცხვისთვის მოიძებნება n ცალი ერთმანეთის მომდევნო შედგენილი ნატურალური რიცხვი.

ამოხსნა: საძებნ რიცხვებად გამოდგება ერთმანეთის მომდევნო შემდეგი n ცალი რიცხვი:

$(2\cdot 3\cdot 4\cdots(n+1))+2, (2\cdot 3\cdot 4\cdots(n+1))+3,$
$(2\cdot 3\cdot 4\cdots(n+1))+4, \dots,$
$(2\cdot 3\cdot 4\cdots(n+1))+n+1.$

ამოცანა 4

იპოვეთ ნატურალური რიცხვების ყველა მკაცრად ზრდადი $a_1, a_2,,,, a_n$ მიმდევრობა, რომელშიც $a_2=2$ და $a_{mn}=a_m\cdot a_n$, ნებისმიერი m და n ნატურალური რიცხვებისათვის.

ამოხსნა: $a_n=n$ მიმდევრობა ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს. დავუშვათ, რომ არსებობს სხვა მიმდევრობაც. ცხადია, რომ $a_1=1$ და $a_n\ge n$. განვიხილოთ უმცირესი n, რომლისთვისაც $a_n>n$. თუ $n=2m$, მაშინ $a_n=a_2a_m=2m=n$. თუ $n=2m+1$, მაშინ $n<a_n<a_{n+1}=a_{2m+2}=a_2a_{m+1}=2(m+1)==n+1$, ანუ a_n მთელი რიცხვი მოთავსებულია n და $n+1$ მთელ რიცხვებს შორის. ორივე შემთხვევაში მივიღეთ წინააღმდეგობა.

პასუხი: $a_n=n$.

ამოცანა 5

არსებობს თუ არა f ფუნქცია განსაზღვრული $[-1;1]$მონაკვეთზე, რომელიც ნებისმიერი ნამდვილი x-სთვის აკმაყოფილებს ტოლობას
$$2f(\cos x)=f(\sin x)+\sin x\,?$$

ამოხსნა: ვთქვათ, ასეთი ფუნქცია არსებობს, მაშინ, თუ ჩავსვამთ მოცემულ ტოლობაში x-ის მაგივრად $x-\pi$-ს, მივიღებთ $2f(-\cos x)=f(\sin x)+\sin x$, ე.ი. $f(-\cos x)=f(\cos x)$, ნებისმიერი x-თვის, ამიტომ $f(-t)=f(t)$ ნებისმიერი $t\in[-1;1]$-თვის ანუ f ლუწი ფუნქციაა. მეორე მხრივ, თუ ჩავსვამთ მოცემულ ტოლობაში $-x-$ს, მივიღებთ $2f(\cos x)==f(-\sin x)-\sin x$, რადგან f ლუწია $f(-\sin x)=f(\sin x)$ და $2f(\cos x)=f(\sin x)-\sin x$. თუ გამოვაკლებთ საწყისი ტოლობიდან ამ ტოლობას, მივიღებთ $\sin x=0$ ნებისმიერი x-სთვის.

პასუხი: არ არსებობს.

ამოცანა 6

დაამტკიცეთ, რომ n ნატურალური რიცხვის ყველა გამყოფის საშუალო არითმეტიკული $\left[\sqrt{n};\frac{n+1}{2}\right]$ მონაკვეთშია მოთავსებული.

ამოხსნა: $n=1$-სთვის მონაკვეთი წერტილად გადაიქცევა. დავუშვათ, რომ $n>1$ და k არის $n=a^2$ რიცხვის ნატურალურ გამყოფთა რაოდენობა. საკუთრივი გამყოფების რაოდენობა $k-2$-ის ტოლია და თითოეული არ აღემატება $\frac{n}{2}$-ს, მაშინ ყველა გამყოფის ჯამი არ არის მეტი $\frac{n}{2}(k-2)+n+1=\frac{nk}{2}+1$ რიცხვზე, ხოლო მათი საშუალო არითმეტიკული არ აღემატება$\frac{n}{2}+\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}$. ვთქვათ, $d_1d_2=n$ და $d_1\neq d_2$, მაშინ $d_1+d_2>2\sqrt{d_1d_2}=2a$. n −ის ყველა გამყოფი (გარდა a-სი, თუ a მთელია) დაიყოფა ასეთ წყვილებად, ნებისმიერ შემთხვევაში $d_1+d_2+\cdots+d_k>ka$. ე.ი. $\frac{1}{k}(d_1+d_2+\cdots+d_k)>a$.

ამოცანა 7

განვიხილოთ x^2+px+q სახის ყველა შესაძლო სამწევრი p და q მთელი კოეფიციენტებით. ასეთი სამწევრის მნიშვნელობათა სიმრავლე ვუწოდოთ მათი მნიშვნელობების სიმრავლეს ყველა მთელ $x=\pm1,\pm2,\ldots$ წერტილში. მაქსიმუმ რამდენი ასეთი სამწევრის არჩევა შეიძლება, რომ მათი მნიშვნელობათა სიმრავლეები წყვილ-წყვილად არ გადაიკვეთოს?

ამოხსნა: შევნიშნოთ, რომ $x\to x+k$ გარდაქმნა ნებისმიერი მთელი k-სთვის სამწევრის მნიშვნელობათა სიმრავლეს არ ცვლის. მაშინ, თუ ჩავატარებთ გარდაქმნას $x\to x-\left[\frac{p}{2}\right]$, ნებისმიერ მრავალწევრს ექნება შემდეგი ორიდან ერთ-ერთი სახე: x^2+q ან x^2+x+q. სხვადასხვა სახის მრავალწევრების მნიშვნელობათა სიმრავლეები ყოველთვის იკვეთება: მართლაც, x^2+q და x^2+x+q^* მრავალწევრების მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა, როცა $x=q-q^*$, ე.ი. სხვადასხვა სახის მრავალწევრების აღება არ შეიძლება. პირველი სახის ორ მრავალწევრზე მეტის აღება არ შეიძლება, რადგან, თუ $f_1(x)=x^2+\ q$ და $f_2(x)=x^2+q^*$ მნიშვნელობათა სიმრავლეები არ იკვეთება, მაშინ $q-q^*=4k+2$ რომელიღაც $k\in Z$-თვის. მართლაც, კენტი $q-q^*=2k+1$ სხვაობისთვის გვაქვს $f_1(k)=f_2(k+1)$. 4-ის ჯერადი თავისუფალი წევრების $q-q^*=4k$ სხვაობებისათვის გვაქვს $f_1(k-1)=f_2(k+1)$. მაგრამ, თუ ავირჩევთ თუნდაც სამ მრავალწევრს, თავისუფალი წევრების სხვაობებს შორის ერთს მაინც არ ექნება $4k+2$ სახე. ორზე მეტი მეორე სახის მრავალწევრის აღებაც შეუძლებელია, რადგან, თუ $f_1(x)=x^2+x+q$ და $f_2(x)=x^2+x+\ q^*$ მნიშვნელობათა სიმრავლეები არ იკვეთება, მაშინ $q-q^*=2k+1$ რომელიღაც $k\in Z$-თვის. მართლაც, ლუწი $q-q^*=2k$ სხვაობისთვის გვაქვს $f_1(k-\text{ა})=f_2(k)$. მაგრამ, თუ ავირჩევთ თუნდაც სამ მრავალწევრს, თავისუფალი წევრების სხვაობებს შორის ერთი მაინც იქნება ლუწი. საბოლოოდ, ორ მრავალწევრზე მეტის აღება შეუძლებელია. მაგალითი ორის შემთხვევაში: $f_1(x)=x^2$ და $f_2(x)=x^2+2$.

მასალა მომზადდა თენგიზ კოპალიანის მიერ

ახალი ამოცანები

ამოცანა 1. არსებობს თუ არა 10 განსხვავებული ისეთი მთელი რიცხვი, რომ ნებისმიერი 9 მათგანის ჯამი სრული კვადრატია?

ამოცანა 2. ნინომ ჩამოწერა პირველი 100 ნატურალური რიცხვი და ზოგი მათგანი წაშალა. აღმოჩნდა, რომ დარჩენილი რიცხვებიდან თუ a და b-ს მნიშვნელობებად ავიღებთ რომელიმე ორს, $x^2 + ax + b = 0$ განტოლებას ექნება ერთი მაინც ნამდვილი ფესვი. მაქსიმუმ რამდენი რიცხვი შეიძლებოდა დარჩენილიყო წაუშლელი?

ამოცანა 3. ამოზნექილ n-კუთხედს $(n > 4)$ აქვს შემდეგი თვისება: თუ დიაგონალი მისგან მოკვეთს სამკუთხედს, ეს სამკუთხედი ტოლფერდაა. დაამტკიცეთ, რომ ამ n-კუთხედის ნებისმიერ ოთხ გვერდს შორის ორი მაინც ტოლია.

ამოცანა 4. მოცემულია AB მონაკვეთი. სივრცეში აღებულია X, Y და Z წერტილები ისე, რომ ABX ტოლგვერდა სამკუთხედია, ხოლო $ABYZ$ — კვადრატი. დაამტკიცეთ, რომ ყველა ასეთი XYZ სამკუთხედის ორთოცენტრი რომელიღაც ფიქსირებულ წრეწირზეა.

ამოცანა 5. არსებობს თუ არა ისეთი დადებითი α რიცხვი, რომ ყველა ნამდვილი x-სთვის სამართლიანია $|\cos x| + |\cos\alpha x| > \sin x + \sin \alpha x$ უტოლობა?

ამოცანა 6. $PABC$ სამკუთხა პირამიდის ექვსივე წიბოს სიგრძეთა ჯამი S-ის ტოლია და $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 90^\circ$. რა უდიდესი მოცულობა შეიძლება ჰქონდეს მოცემული თვისების მქონე პირამიდებს?.

ამოცანა 7. ცნობილია, რომ ნებისმიერი ნამდვილი x რიცხვისათვის სამართლიანია უტოლობა $|ax^2+bx+c| \le |Ax^2+Bx+C|$. აჩვენეთ, რომ $|b^2-4ac| \le |B^2-4AC|$.

მასალა მომზადდა თენგიზ კოპალიანისა და ბექან ღვაბერიძის მიერ

დავით მელიქიძე

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ბაკალავრი, საბაკალავრო პროგრამა კომპიუტერულ მეცნიერებებში

სკოლის ასაკიდანვე დაინტერესებული ვიყავი მათემატიკით. სწორედ ამიტომ გადავწყვიტე კომაროვის სახელობის ფიზიკა-მათემატიკის სკოლაში ჩაბარება; აქტიურად ვმონაწილეობდი ეროვნულ ოლიმპიადებსა და სხვადასხვა ღონისძიებაში. სკოლა ვერცხლის მედალზე დავამთავრე.

ეროვნულ გამოცდებზე მათემატიკაში მაქსიმალური ქულის მიღების შემდგომ ჩავაბარე ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის კომპიუტერული მეცნიერებების საბაკალავრო პროგრამაზე. პირველ და მეორე კურსზე მონაწილეობას ვიღებდი თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის სტუდენტურ კონფერენციებზე, რომლებშიც მეორე ადგილი ავიღე ვეივლეტ მატრიცების სპექტრალური დეკომპოზიციის თემის დამუშავებით (ჩავერთე ნიუ იორკის უნივერსიტეტში (აბუ-დაბის კამპუსი) არსებულ პროექტში, რომელიც უკავშირდება ვეივლეტების კოეფიციენტების დიდი სიზუსტით გამოთვლის საკმაოდ რთულ თემატიკას. ინტენსიური გამოთვლა ჩავატარე ჩემ მიერ დაწერილი პროგრამის მეშვეობით M რანგისა და N რიგის ვეივლეტ მატრიცების კოეფიციენტების გამოთვლისა N ქრებადი მომენტით. მხელმძღვანელობდნენ: ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორი ალექსანდრე გამყრელიძე და რაზმაძის სახ. მათემატიკის ინსტიტუტის მთავარი მეცნიერ-თანამშრომელი, ნიუ იორკის უნივერსიტეტის (აბუ-დაბის კამპუსი) მკვლევარი ლაშა ეფრემიძე), ხოლო პირველი ადგილი ხელოვნურ ინტელექტზე პროექტით (თემის სახელწოდებაა: „მონოკულარული კვაზი-მკვრივი სამგანზომილებიანი ობიექტების თვალყურის დევნება". ის არის ETH ციურიხის უნივერსიტეტის ერთ-ერთი სამეცნიერო ნაშრომის რეპროდუქცია, რომელიც ღრმა სწავლების ნეიროქსელების კომპიუტერული ხედვის თანამედროვე მეთოდების გამოყენებას მოიცავს. მხელმძღვანელობდნენ: ალექსანდრე გამყრელიძე და გიორგი ჩოგოვაძე, ხელოვნური ინტელექტისა და ღრმა სწავლების ენთუზიასტი, მრავალწლიანი გამოცდილებით კომპიუტერული ტექნოლოგიების სხვადასხვა მიმართულებაში, Microsoft / Uber / Cisco / VMWare / Oracle და სხვა ფირმების ყოფილი თანამშრომელი).

ყოველ სემესტრში მიღებული მაქვს სახელმწიფო სტიპენდია. ზემოთ აღნიშნული შედეგებიდან გამომდინარე, გადავწყვიტე მონაწილეობა მიმეღო ილია ვეკუას სახელობის სტიპენდიის მიღებაზე. ის მათემატიკისა და კომპიუტერული მეცნიერებების მიმართულების განსაკუთრებული მიღწევებითა და წარმატებებით გამორჩეულ ბაკალავრიატისა და მაგისტრატურის სტუდენტებს ენიჭება. საბოლოოდ, სტიპენდიანტი გავხდი ბაკალავრებს შორის.

ამჟამად ვარ მე-3 კურსზე.

მეოთხე საერთაშორისო კონფერენცია „გამოყენებითი მათემატიკის თანამედროვე პრობლემები“

მიძღვნილი ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის დაარსებიდან 105 წლისთავისადმი და ამავე უნივერსიტეტის ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის დაარსებიდან 55 წლისთავისადმი

13-15 სექტემბერი, 2023 წელი

ნატალია ჩინჩალაძე

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი. ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი

გასული საუკუნის განმავლობაში ქართული მეცნიერული აზრის საერთაშორისო აღიარება მნიშვნელოვანწილად განპირობებულია ქართული მათემატიკური სკოლის მიღწევებით, რასაც საფუძველი ძირითადად ამ 105 წლის წინ ჩაეყარა, ***ტფილისის უნივერსიტეტის*** დაარსებისთანავე, როდესაც ამ უნივერსიტეტის ერთ-ერთი ფუძემდებლის — ანდრია რაზმაძის, მისი რეკომენდაციით, პეტერბურგიდან მოწვეული ნიკოლოზ მუსხელიშვილის, აგრეთვე გიორგი ნიკოლაძისა და არჩილ ხარაძის დიდი ძალისხმევისა და მეცადინეობის შედეგად საქართველოში დაიწყო ზუსტ მეცნიერებებში იმ დროისათვის დაგროვილი უმაღლესი ცოდნის სისტემატური გავრცელება და საფუძვლიანი მეცნი-

თსუ 95, გმი 45 — გახსნა
მარჯვნიდან: ვ. პაპავა (თსუ რექტორი), ს. სისაური (შრესფ-ის გენერალური დირექტორი), თ. მარსაგიშვილი (განათლებისა და მეცნიერების მინისტრის მოადგილე), გ. ჯაიანი (გმი დირექტორი)

თსუ 100, გმი 50 — გახსნა
მარჯვნიდან: გ. ჯაიანი (გმი დირექტორი), პ. ექსნერი (ევროპის მათემატიკური საზოგადოების პრეზიდენტი, ჩეხეთი), ნ. ოვსიანიკოვა (თსუ კანცლერი), ფ. ლანძარა (რომის უნივერსიტეტის „ლა საპიენცა“ პროფესორი; იტალია)

ერული კვლევა მათემატიკის როგორც ფუნდამენტურ, ისე გამოყენებით დარგებში. ამ მიღწევებს შორის ძალზე მნიშვნელოვანია დრეკადობის მათემატიკური თეორიის დაფუძნებასა და შემდგომ განვითარებაში ნიკოლოზ მუსხელიშვილის და თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში აღზრდილი მეცნიერების — ილია ვეკუას, ვიქტორ კუპრაძის, ანდრო ბიწაძის, მათი მოწაფეების და მიმდევრების მიერ შეტანილი ღვაწლი, რითაც მათ მსოფლიო ცნობადობა მოიპოვეს.

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის (თსუ) დაარსების 105-ე წლისთავისადმი და ამ უნივერსიტეტში ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის სამეცნიერო-კვლევითი ინსტიტუტის (გმი) დაარსების 55-ე წლისთავისადმი მიძღვნილი საიუბილეო ღონისძიებების ფარგლებში, ა.წ. 13-15 სექტემბერს ჩატარდა მეოთხე საერთაშორისო კონფერენცია „გამოყენებითი მათემატიკის თანამედროვე პრობლემები“ (საერთაშორისო კონფერენციების ამ სერიას საფუძველი ჩაეყარა 2008 წელს, როდესაც ჩატარდა რიგით პირველი კონფერენცია, რომელიც მიეძღვნა თსუ-ის დაარსების 90-ე წლისთავს და თსუ-ში გმი-ს დაარსების მე-40 წლისთავს. მეორე და მესამე კონფერენციები კი, შესაბამისად, ჩატარდა 2013 და 2018 წლებში).

13 სექტემბერს მეოთხე საერთაშორისო კონფერენციის გახსნამდე დამსწრეებმა წუთიერი დუმილით პატივი მიაგეს შოვსა და გურიის რეგიონში ჩამოწოლილი მეწყერის და მაროკოსა და ლიბიაში მომხდარი მიწისძვრის მსხვერპლთა ხსოვნას.

კონფერენცია გახსნა ინსტიტუტის დირექტორმა, პროფესორმა გიორგი ჯაიანმა. კონფერენციის მონაწილეებს მიესალმა და წარმატებული მუშაობა უსურვა თსუ-ის რექტორის მოადგილემ, პროფესორმა ნინო ოკრიბელაშვილმა, რომელმაც აღნიშნა, რომ მსგავსი კონფერენციების ჩატარება ხელს უწყობს საქართველოსა და უცხოელ მეცნიერებს შორის არსებული სამეცნიერო და, ასევე, პირადი კავშირების შენარჩუნებას, გაფართოებას და გაღრმავებას; საშუალებას აძლევს მათ უშუალოდ გააცნონ ერთმანეთს საკუთარი სამეცნიერო ინტერესები, გაუღვივონ და გაუფართოონ ამგვარი ინტერესები საკუთარი ქვეყნების ახალგაზრდა მკვლევრებს. ყოველივე ამის შედეგად კი იზრდება ჩვენი ქვეყნის მათემატიკოსების საერთაშორისო ცნობადობა.

გახსნაზე კონფერენციის მონაწილეებს მიესალმა და ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტსა და ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტს საპატიო დიპლომები გადასცა რუმინეთის მეცნიერებათა აკადემიის სიმონ სტოილოვის მათემატიკის ინსტიტუტის დირექტორმა, პროფესორმა ლუსიენ ბეზნეამ, რომელიც არის გმი-ს ბაზაზე მოქმედი თბილისის საერთაშორისო ცენტრის, მათემატიკასა და ინფორმატიკაში (TICMI) საერთაშორისო სამეცნიერო საბჭოს წევრი, ნომინირებული ევროპის მათემატიკური საზოგადოების სამეცნიერო საბჭოს აღმასრულებელი კომიტეტის მიერ.

ინსტიტუტს მისალოცი ადრესი გადასცა აგრეთვე თსუ მაღალი ენერგიების ინსტიტუტის დირექტორმა, პროფ. მ. ნიორაძემ.

გახსნის ცერემონიაზე მოსმენილ იქნა ორი მოხსენება:

- „თსუ გმი — 55 წლის ისტორია“ (გ. ჯაიანი);
- „მათემატიკა თსუ-ში დაარსებიდან დღემდე“ (ო. ფურთუხია).

ინსტიტუტის დირექტორი, პროფესორი გიორგი ჯაიანი

თსუ რექტორის მოადგილე, პროფესორი ნინო ოკრიბელაშვილი

პროფესორი ლუსიენ ბეზნეა. დიპლომების გადაცემა

პროფ. ომარ ფურთუხია
თსუ მათემატიკის დეპარტამენტის
ხელმძღვანელი

ტრადიციულად, ამ სერიის კონფერენციების ძირითადი თემატიკაა:

- უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მათემატიკური პრობლემები და ანალიზის მონათესავე საკითხები;
- მათემატიკური მოდელირება და გამოთვლითი მათემატიკა;
- დისკრეტული მათემატიკა და ალგორითმების თეორია;
- ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა.

კონფერენციაში, ქართველ მეცნიერებთან ერთად, მონაწილეობდნენ კოლეგები: გერმანიიდან, იტალიიდან, საფრანგეთიდან, პოლონეთიდან და რუმინეთიდან.

პროგრამით გათვალისწინებული იყო გახსნისა და დახურვის 40-წუთიანი მოხსენებები და 35-წუთიანი პლენარული და სექციური მოხსენებები.

პლენარული სამეცნიერო მოხსენებებით გამოვიდნენ:

პროფ. აიეჩ ბენჯედოუ, სორბონის
უნივერსიტეტი, საფრანგეთი
(გახსნითი მოხსენება)

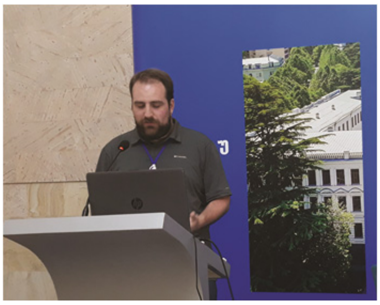
პროფ. გიორგი ჯაიანი

პროფ. ჰოლმ ალტენბახი,
მაგდებურგის უნივერსიტეტი,
გერმანია

გიორგი ბუძღულაშვილი
(თანამომხსენებელი
პროფ. თამაზ ვაშაყმაძე)

პროფ. პაოლო.ე. რიჩი,
უნივერსიტეტი „უნინეტუნო“,
იტალია

პროფ. ვაჟა ტარიელაძე,
ნ. მუსხელიშვილის სახელობის
გამოთვლითი მათემატიკის
ინსტიტუტი, სტუ



გიორგი რუხაია (თანამომხსენებელი პროფ. თეიმურაზ დავითაშვილი)

პროფ. რაინჰოლდ კინცლერი, ბრემენის უნივერსიტეტი, გერმანია

პროფ. გია ავალიშვილი

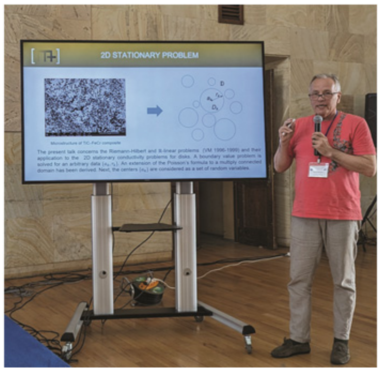
ზურაბ ვაშაკიძე (თანამომხსენებელი პროფ. ჯემალ როგავა)

პროფ. ვოლფგანგ მიულერი, ბერლინის ტექნიკური უნივერსიტეტი, გერმანია

პროფ. ლუსიენ ბეზნეა, რუმინეთის მეცნიერებათა აკადემია

პროფ. ფლავია ლანძარა, რომის უნივერსიტეტი „ლა საპიენცა“, იტალია

პროფ. მერაბ სვანაძე, ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტი



პროფ. ვლადიმერ მიტუშევი, კრაკოვის ტექნოლოგიების უნივერსიტეტი, პოლონეთი

22 პროფ. ნატალია ჩინჩალაძე

პროფ. ალბერტო ჩალდეა, პოტენცას უნივერსიტეტი, იტალია

პროფ. ალექსანდრე მესხი, საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის პრეზიდენტი (დახურვის მოხსენება)

გარდა ამისა, სამ სექციაზე მოისმინეს 18 სექციური მოხსენება. აღსანიშნავია ახალგაზრდა მეცნიერების, მაგისტრების და მაგისტრანტების მოხსენებებით მონაწილეობა კონფერენციის მუშაობაში.

თეა შავაძე

გვანცა შავარდენიძე

პროფ. პეტრე ბაბილუა

28 პროფ. ნინო მანჯავიძე

29 პროფ. მაია სვანაძე

30 დავით კალაძე

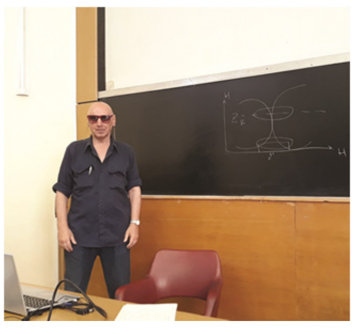
მარიამ კოხრეიძე

ირაკლი სიხარულიძე

გიორგი კაკულაშვილი

პროფ. რომან კოპლატაძე

პროფ. ბაკურ გულუა



გიორგი გელაძე

პროფ. ბადრი ცუცქირიძე

გოგი კეჟერაძე

ბესიკ ტაბატაძე

ანი ოზბეთელაშვილი

მერიამ ჩახოიანცი

არჩილ პაპუკაშვილი

42 კონფერენციის გახსნაზე დამსწრეთა ერთი ნაწილი შესვენებისას

დარბაზში კონფერენციის მსვლელობისას

14 სექტემბრის სექციური სხდომების (ჩატარდა გმი-ში, ილია ვეკუას აუდიტორიაში) მონაწილეთა ერთი ნაწილი შესვენებისას

კონფერენციის სპონსორი გახლდათ შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი („მობილობისა და სამეცნიერო ღონისძიებების საგრანტო კონკურსში (ლოტი II) გამარჯვებული პროექტი #MG-ISE-23-874).

Natalia.chinchaladze@tsu.ge

ინსტრუქცია ავტორებისთვის

1. სტატია აკრეფილი უნდა იყოს Sylfaen-ში, შრიფტის ზომა 11, სტრიქონებს შორის ინტერვა-ლი 1,5, სიტყვებს შორის 1 ინტერვალი, გვერდის Margins – Normal.
2. სტატია ფორმდება შემდეგნაირად: სტატიის სათაური (შრიფტის ზომა 14 Bold), სახელი და გვარი (შრიფტის ზომა 12 Bold), წოდება, თანამდებობა, სამუშაო ადგილი (შრიფტის ზომა 11). ავტორ(ებ)ის/მთარგმნელ(ებ)ის ფოტოსურათი თავსდება სათაურის გვერდით, მარჯვენა მხარეს.
3. ფორმულები და სიმბოლოები იკრიფება Microsoft Eq-თი. თუ ფორმულა ორ სტრიქონს იკა-ვებს, უნდა გაიყოს (რედაქტირების გაადვილების მიზნით).
4. ქვესათაური გამოიყოფა იმავე ზომის Bold შრიფტით. ტექსტი გრძელდება იმავე სტრი-ქონზე.
5. აბზაცისათვის გამოიყენება Tab.
6. ნახატები, ნახაზები, ცხრილები და სხვა არატექსტური გამოსახულებები წარმოდგენილი უნდა იყოს მაღალი გარჩევადობის ნახატის ტიპის ჩანართებით; უნდა იყოს გადანომრილი. შესაბამისი მითითება გაკეთდება ტექსტში (შინაარსობრივი და ვიზუალური მხარის კორექ-ტირებისათვის). გრაფიკულ გამოსახულებაზე, მაგ. ნახ. 1, წარწერა კეთდება 10 ზომის შრიფტით.
7. ლიტერატურის ციტირება ხდება ქრონოლოგიურად (და არა ავტორის გვარების ალფაბე-ტის შესაბამისად): სტატიის ბოლოს, შუაში, იწერება — ლიტერატურა, [ ] სიმბოლოში იწე-რება ნომერი (ასეთივე აღნიშვნა იხმარება ტექსტში), გვარი და ინიციალები, წიგნის, სტა-ტიის (ან ინტერნეტრესურსის მისამართი) სრული ბიბლიოგრაფიული მონაცემები: გამომ-ცემლობა (წიგნის შემთხვევაში), ტომი, ნომერი, გვერდები, წელი. ლიტერატურის მითი-თება ხდება იმ ენაზე, რომელი წყაროთიც ავტორი სარგებლობდა.
8. ტექსტური ჩანართები გაკეთდეს Tex Box-ის საშუალებით. რომელშიც, ისევე, როგორც მთელ ტექსტში, კიდეები სწორდება მარჯვნივ და მარცხნივ, ფორმატირების საშუალებით.
9. Word ფაილთან ერთად ავტორმა უნდა წარმოადგინოს pdf ფაილიც, რითაც მიანიშნებს რედაქტორს სტატიის ვიზუალურ მხარეზე (აქ იგულისხმება, რომ ჩანართებმა არ უნდა და-იკავოს გვერდის მნიშვნელოვანი ნაწილი, ე.ი. ნახატის ტიპის ჩანართები არ უნდა იყოს დი-დი ან ბევრი; არ უნდა დარჩეს გვერდზე, ტექსტის გარეშე, ბევრი თავისუფალი ადგილი).
10. გვერდები არ ინომრება.
11. ტექსტში თეორემა, დებულება, განმარტება ან სხვა მნიშვნელოვანი ცნება (ავტორის შეხე-დულებისამებრ) გამოიყოფა Italic-ით. შრიფტის განსხვავებული ფერი ტექსტში არ იხმარება.
12. თეორემის, დებულების დამტკიცების დაწყება ან დამთავრება რაიმე ნიშნით არ გამო-იყოფა.
13. სტატიას ბოლოში, მარჯვენა კუთხეში, 10 ზომის შრიფტით უნდა მიეთითოს ავტორის ელექ-ტრონული მისამართი; კორპორაციული ელექტრონული ფოსტის გამოყენება სავალდებუ-ლოა თსუ-ის თანამშრომლებისთვის.

გამომცემლობის რედაქტორი **მარინე ვარამაშვილი**

გარეკანის დიზაინერი **მარიამ ებრალიძე**

დამკაბადონებელი **ლალი კურდღელაშვილი**

გამოცემის მენეჯერი **მარიკა ერქომაიშვილი**

0128 თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 1
1, Ilia Tchavtchavadze Ave., Tbilisi 0179
Tel 995(32) 225 04 84, 6284/6279
https://www.tsu.ge/ka/publishing-house

ISSN 2298-0938